华章数学译丛

29

HZ BOOKS

PEARSON Prentice Hall

Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

(Third Edition)

复分析基础及工程应用

（原书第3版）

（美）E. B. Saff 范德比尔特大学 A. D. Snider 南佛罗里达大学 等著

高宗升 等译



机械工业出版社
China Machine Press

（原书第3版）

复分析基础及工程应用

本书系统而全面地介绍复变理论及其在工程问题上的应用，理论与实际应用密切结合，对工程类学科的学生来说，这种方式更生动地表达了数学理论的内涵。

本书特点

- 结合使用MATLAB工具箱，使复杂算术运算及共形映射更加形象化。
- 阐述复函数在线性分析中的最新用途，如在交流电路、流体力学及信号处理等领域的应用。
- 介绍茹利亚集，这是复分析研究的最新论题。
- 以两种可选的方式给出了柯西定理，提供了更易于形象化、更易于应用到具体问题中的方法。
- 对数值共形映射的清晰阐述，这对现代技术领域中的应用非常重要，与其他数学领域也密切相关。
- 给出在实际工程问题中的应用，引导学生灵活应用数学方法。

作者简介



E. B. Saff 1962年于佐治亚理工学院获得学士学位，1968年于马里兰大学获得博士学位，现为范德比尔特大学数学系教授、构造逼近中心主任。他主要从事逼近论、位势论、复分析和数值分析等领域的研究。



A. D. Snider 1962年于麻省理工学院获得数学学士学位，1966年于波士顿大学获得物理学硕士学位，1971年于纽约大学获得数学博士学位，现为南佛罗里达大学电子工程系教授。他主要从事光谱分析、最优化、电子学与电磁学的数学建模及通信理论等方面的研究。

Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

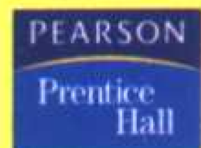
(Third Edition)





影印版

ISBN 7-111-15217-4
定价：59.00元



www.PearsonEd.com



封面设计·杨宇梅



华章图书

华章网站 http://www.hzbook.com

网上购书：www.china-pub.com

投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68995259, 68995264
读者信箱：hzjsj@hzbook.com



ISBN 7-111-20020-9
定价：55.00 元

华 章 数 学 译 丛

29

Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science

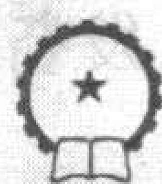
(Third Edition)

复分析基础及工程应用

(原书第3版)

(美) E. B. Saff 范德比尔特大学 A. D. Snider 南佛罗里达大学 等著

高宗升 等译



机械工业出版社
China Machine Press

本书系统而全面地介绍了复分析的基本理论和方法及其在工程问题上的应用，且注重理论与实际密切结合．全书共分八章：复数，解析函数，初等函数，复积分，解析函数的级数表示，留数理论，共形映射，应用数学的变换．为了便于读者掌握本书的主要内容，在每章后面都给出了小结和参考文献，并且配备了大量的例题和练习，书末附有练习答案和提示．

本书内容丰富，理论严谨，讲解透彻，可作为高等院校高年级本科生和研究生复分析课程的教材或教学参考书，还可供需要复变函数知识的工程技术人员参考．

本书版权登记号：图字：01-2005-0519

图书在版编目（CIP）数据

复分析基础及工程应用（原书第3版）/（美）萨夫（Saff，E. B.）等著；高宗升等译．—北京：机械工业出版社，2007.1
（华章数学译丛）
书名原文：Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science, Third Edition
ISBN 7-111-20020-9

Ⅰ．复…　Ⅱ．①萨…　②高…　Ⅲ．复分析　Ⅳ．O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 119307 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：迟振春
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2007 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
186mm × 240mm · 24.75 印张
定价：55.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

译 者 序

本书是一本高水平的理工科大学复分析及应用教材. 与国内外同类教材相比，它具有如下明显的特色和优点：

1. 本书系统地讲述了复分析的基本理论和方法，内容丰富，理论严谨，详略得当. 对于复分析的基本概念和主要定理，一般都给出了准确的叙述和严格的证明；对那些在理论或应用上十分重要、证明比较艰深的少数定理，例如柯西定理、黎曼映射定理等，采用述而不证的方法.

2. 本书最重要的特色之一是着重介绍复分析理论在现代工程科技上的应用. 书中给出了流体力学、电学、磁学、信号处理、热传导等方面的大量实例，把复分析这门学科和实际问题的联系描述得淋漓尽致，为学生应用复方法解决工程问题打下了坚实的基础.

3. 本书十分重视学生知识面的拓宽和数学素质的培养. 例如，第 2 章介绍了现代复分析中的茹利亚集和芒德布罗集；第 4 章给出了柯西定理的两种可供选择的表述方法；第 8 章介绍了傅里叶变换、梅林变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换和 z 变换；附录 A 介绍了共形映射的数值结构等一般复分析教材中少见的内容，为学生的进一步学习和提高创造了条件.

4. 本书的内容编排新颖，生动活泼，可读性强，有令人耳目一新之感. 书中许多内容，例如第 5 章中洛朗定理的证明与第 6 章中儒歇定理的说明等，讲解通俗易懂，令人过目不忘.

5. 本书非常适合读者自学. 每章后面不仅有小结，而且还附有相应的参考文献，同时配有大量的例题和练习. 另外，书后附有练习答案供读者参考.

本书可作为高等院校理工科高年级本科生和研究生的复分析教材或教学参考书，同时也可供工程技术人员参考之用.

本书第 1 章与第 2 章由高宗升翻译；第 3 章由玄祖兴翻译；第 4 章与第 8 章由尚丽娜翻译；第 5 章、第 6 章及索引由滕岩梅翻译；前言、第 7 章以及附录由王松敏翻译. 最后由高宗升统稿. 由于译者水平所限，译文中难免有疏漏和错误之处，敬请读者批评指正.

高宗升

于北京航空航天大学理学院

前　言

本书之所以出第3版，是因为我们确信学过微积分的理工科大学生完全有能力理解复分析基础，并且可以应用其方法来解决工程问题. 因此，在写作本书时，对那些没有耐心阅读定理证明的读者，也尽力使其更加容易接受复分析的基础. 为了实现这一目标，在本书内容的讲解和编排上，我们参考了微积分教材的叙述方式，并且还具体体现了书中理论在工程上的应用. 这样，读者就不会觉得本书的数学方法枯燥无味了.

下面具体谈谈本书的编写方式. 首先，我们回答大部分教师都会问的问题：这本书包含的内容层次是什么，也就是说，哪些结果被论证了，哪些结果仅仅被陈述了？我们的回答是：反映解析函数性质的结果，我们都加以证明了；对于大部分涉及实分析更深层内容的结果(例如，复分析的黎曼和的收敛、判断收敛的柯西判别法、古萨的广义柯西定理以及黎曼映射定理)，我们没有给予证明. 其次，在本书中，我们避免了传统的叙述方式，没有讨论复数的有序数对，而采用了更加清晰明了的(基于代数扩域的)描述方法.

在第4章，我们给出了柯西定理的两个可供选择的表述. 第一个表述基于周线的形变，即拓扑学家所谓的同伦. 我们尽量使初学者觉得这个方法容易理解，因为该方法易于形象化，并且易于应用到具体的问题中. 第二个方法是从周线积分来解释的，证明时利用了线积分和格林定理. 这两个平行的方法使得4.4节有两部分内容，读者可以只读其中一部分，而忽略另一部分，并不会影响到对本书后面内容的进一步学习(尽管从这里读者很容易看出我们的优选).

笔者认为二维稳定状态下的温度形式是大家最熟悉的调和函数的实例，所以我们主要从这个问题的理解来使解析函数理论形象化. 整本书中都可以看到这个应用，尤其在第7章共形映射的背景中强调了这一点. 在第7章，我们还指出了直接方法和间接方法的不同. 前者要求先构造出映射进而解决实际问题，而后者先假设出映射，然后研究该映射解决的问题. 许多比较早的书上的技巧都不能运用间接方法，因此，在学习这部分内容时，我们希望读者不要先人为主.

在第3版中，L. N. Trefethen 和 T. Driscoll 更新了附录 A. 该附录反映了共形映射的数值结构在近些年所取得的进展. 附录 B 汇编了一些常用的映射，并且给出了它们的具体表达式和图形.

线性系统分析是本书多次涉及的另一个应用. 在第3章中学习了超越函数后，紧接着介绍了频率分析的基本思想；另外，我们在适当的时候提到了史密斯图、电路合成和稳定性准则；在第8章中，随着对傅里叶变换、梅林变换、拉普拉斯变换、希尔伯特变换和 z 变换的解析函数方面的讲解，以及在信号处理和通信工程中的新应用的介绍，使这方面的内容达到了极致. 因此，对于想在这些领域进一步学习的读者来说，我们希望本书能对他们有所帮助.

第3版的特色

第3版的新颖之处是：讨论了黎曼球面，从而解释了复分析中“无穷远点”这一概念的本

质意义；介绍了函数的迭代和独特而有趣的茹利亚集，并在复平面上给出了它们的图形；在对多项式和有理函数的分析中，引入复观点，丰富了过去的研究结果；对于简单几何图形，全面介绍了用于计算恒温的调和函数方法．选讲章节前面都加了星号，以便读者选学．在每章的最后给出了小结和参考文献．与前两版一样，正文精选了大量用于阐明定理、技巧以及复分析应用方面的例子，使本书的品质更加完美．

教师(以及感兴趣的学生)可以从 Francisco Carreras 开发的 MATLAB 工具箱中得益，可从下面的网站下载该工具箱：

http：//ee. eng. usf. edu/people/snider2. html

(点击 complextools. zip 可以顺利地下载)．文件 compman. doc 详细地说明了该工具箱的使用方法．MATLAB 工具箱提供了形象化的机上作图、有趣的复数代数处理、常见的共形映射以及设计儒可夫斯基(Joukowski)机翼的入门指导．

该书难免有误，读者可通过勘误表反映给我们．勘误表是一个可下载的 PDF 文件，可以在上面的网站上找到．

笔者的导师 Joseph L. Walsh 和 Paul Garabedian 对本书给予了指导，在此对他们表示衷心的感谢．南佛罗里达大学的 Samuel Garrett 是笔者多年的同事，在此也对他致谢．另外，编辑 George Lobell 对本书给予了很大的支持，Adam Lewenberg 提供了技术支持，出版商 Bob Walters 在本书印刷过程中给予了指导．下面的数学家对书稿提出过宝贵意见：马里兰大学的 Carlos Berenstein、科罗拉多大学的 Keith Kearnes、阿肯色大学的 Dmitry Khavinson、华盛顿大学的 Donald Marshall(第 1 ~ 4 章)、加州大学圣芭芭拉分校的 Mihai Putinar、亚利桑那州立大学的 Sergei Suslov、巴特勒大学的 Rebecca Wahl、得克萨斯技术大学的 G. Brock Williams，在此对他们表示衷心的感谢！

E. B. Saff

esaff@ math. vanderbilt. edu

A. D. Snider

snider@ eng. usf. edu

目　录

第1章 复　　数

1.1 复数代数

为了用合适的方法研究复数系，先简单回顾一下运算中所用到的各种数的构造.

我们先从有理数说起. 有理数是形如 $m/n(n\neq 0)$ 的两个整数之比，并且约定所有形如 n/n 的有理数都等于1(因此可消去公因子). 有理数之间的加、减、乘、除运算总能在有限步内完成，其结果仍是有理数. 此外，有理数的运算满足一些简单的运算法则，即我们熟悉的交换律、结合律和分配律. 设 a，b，c 为任意有理数，

加法交换律

$$a+b=b+a$$

乘法交换律

$$ab=ba$$

加法结合律

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

乘法结合律

$$a(bc)=(ab)c$$

分配律

$$(a+b)c=ac+bc,$$

注意，有理数只是我们在求解形如 $ax+b=0$ 的方程时可能需要的数. 对于非零数 a，该方程的解为 $x=-b/a$，它是两个有理数之比，从而也是有理数.

但是，我们在有理数系中求解二次方程时，会发现它们中的一些无解. 例如，对于简单的方程

$$x^2=2 \tag{1}$$

来说，任意有理数都不是它的解(参见本节末习题29). 因此，为得到更为满意的数系，在有理数中添加一个新的符号，记之为$\sqrt{2}$，把它定义为方程(1)的解，这样就扩大了"数"的概念. 修改数的概念之后，它的标准表达式可写为

$$a+b\sqrt{2}, \tag{2}$$

这里 a，b 为有理数. 加法和减法运算按照

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2} \tag{3}$$

进行. 由分配律以及记号$\sqrt{2}$的平方总可由有理数2来代替，对于乘法，我们有

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}. \tag{4}$$

最后，利用众所周知的分母有理化过程，可将任意两个新数的商化为标准形式

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}. \tag{5}$$

这种带有根式的运算读者已经十分熟悉了，且容易看出得到的数系的运算也满足交换律、结合律和分配律. 但是，记号$\sqrt{2}$并不能轻易地被有理数消掉. 这一点在标准形式(2)及运算法则(3)、(4)、(5)中可以明显地看出来. 事实上，当对那些含有$\sqrt{2}$的项进行运算时，除去$\sqrt{2}$平方的情况外，我们只是对这些项中的有理数进行计算，而$\sqrt{2}$仅仅是作为一个记号保留下来. 因此，把$\sqrt{2}$作为一个数添加到有理数系中有点人为化的过程，这样做只不过使我们可以构造一个更大的数系，使得方程 $x^2=2$ 有解.

在上述想法下，假设我们已把全体实数加入到有理数系中. 它们中的一些数，例如，$\sqrt[4]{17}$，可作为更复杂的方程的解出现. 其他的数，例如 π 和 e，可由极限得到. 每一个无理数都以一种人为的方式引入，而得到的数集与数学运算同样满足交换律、结合律和分配律[⊖].

2

即便如此，我们仍不能求解方程

$$x^2=-1. \tag{6}$$

然而经验表明，我们可以再次通过添加方程(6)的解的一个记号$\sqrt{-1}$来扩大数系；习惯上用记号 i(工程上常用字母 j)来代替. 下面仿照(与$\sqrt{2}$有关的)表达式(2)～(5)归结出如下数的概念[⊖].

定义 1 形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数称为**复数**(complex number)，其中 a，b 都是实数. 两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 与 $c+d\mathrm{i}$ 相等，即 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$，当且仅当 $a=c$，$b=d$.

复数的加减法运算由下面的等式给出：

$$(a+b\mathrm{i})\pm(c+d\mathrm{i}):=(a\pm c)+(b\pm d)\mathrm{i},$$

这里符号:=表示“定义为”.

根据分配律及等式 $\mathrm{i}^2=-1$，两个复数的乘法定义为

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}):=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}.$$

为了计算两个复数的商，可将“分母有理化”，得

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}\frac{c-d\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

由此可定义复数的除法为

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}:=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\quad(\text{这里 } c^2+d^2\neq 0).$$

以上是复数系中的一些运算法则. 一些常见的代数性质(如交换律、结合律等)比较容易验证，留作练习.

3

例 1 计算

$$\frac{(6+2\mathrm{i})-(1+3\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})-2}.$$

⊖ 扩充一个数域的代数问题在本章末参考文献[5]中有讨论.

⊖ 高斯(Karl Friedrich Gauss，1777—1855)是第一位自如地使用复数且充分认定其在数学中客观存在的数学家.

解

$$\frac{(6+2i)-(1+3i)}{(-1+i)-2}=\frac{5-i}{-3+i}=\frac{(5-i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-15-1-5i+3i}{9+1} \tag{7}$$

$$=-\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i.$$ ■

（在本书中，记号■表示解题或证明的结束.）

在历史上，由于人们所知道的任何数都不是方程(6)的解，所以把 i 看作一个“虚构”的数. 按照前面的观点，可用记号来代替$\sqrt{2}$或 $\sqrt[4]{17}$. 同样，i 也仅仅是一个为了得到更大的数系而添加的记号. 通常有以下定义[⊖].

> **定义 2**　对于复数 $a+bi$，(实数)a 称为它的**实部**，(实数)b 称为它的**虚部**. 如果 a 为零，则称这个数为**纯虚数**.

为方便起见，习惯上用字母 z 表示一个复数，它的实部与虚部分别记为 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$. 于是，$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z$.

注意等式 $z_1=z_2$ 成立当且仅当 $\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$ 且 $\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$. 因此任意有关复数的等式都可表示为一对实等式.

全体复数的集合记为 **C**. 与实数系不同，**C** 中的元素没有大小顺序；例如，比较 $2+3i$ 与 $3+2i$ 的大小是没有意义的(参见习题 30).

练习 1.1

1. 证明 $-i$ 也是方程(6)的一个根.

2. 证明复数运算满足交换律、结合律和分配律.

3. 注意 0 和 1 作为复数保持它们的“单元性”，即当 z 为复数时，$0+z=z$，$1\cdot z=z$.

(a) 证明复数减法是加法的逆运算(即 $z_3=z_2-z_1$ 当且仅当 $z_3+z_1=z_2$).

(b) 证明书中给出的复数除法是乘法的逆运算(即如果 $z_2\neq 0$，那么 $z_3=z_1/z_2$ 当且仅当 $z_3z_2=z_1$).

4. 证明若 $z_1z_2=0$，则 $z_1=0$ 或 $z_2=0$.

在 5～13 题中，用 $a+bi$ 的形式写出各数.

5. (a) $-3\left(\frac{i}{2}\right)$　(b) $(8+i)-(5+i)$　(c) $\frac{2}{i}$

6. (a) $(-1+i)^2$　(b) $\frac{2-i}{\frac{1}{3}}$　(c) $i(\pi-4i)$

7. (a) $\frac{8i-1}{i}$　(b) $\frac{-1+5i}{2+3i}$　(c) $\frac{3}{i}+\frac{i}{3}$

8. $\frac{(8+2i)-(1-i)}{(2+i)^2}$

9. $\frac{2+3i}{1+2i}-\frac{8+i}{6-i}$

10. $\left[\frac{2+i}{6i-(1-2i)}\right]^2$

4

⊖ René Descartes 在 1637 年引进了“实”和“虚”的术语. W. R. Hamilton 在 1843 年讲到一个数的“虚部”.

11. $i^3(i+1)^2$

12. $(2+i)(-1-i)(3-2i)$

13. $((3-i)^2-3)i$

14. 证明 $\mathrm{Re}(iz)=-\mathrm{Im}z$ 对所有复数 z 成立.

15. 设 k 为整数，证明

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

16. 利用 15 题的结果计算

(a) i^7 (b) i^{62} (c) i^{-202} (d) i^{-4321}

17. 利用 15 题的结果计算 $3i^{11}+6i^3+\frac{8}{i^{20}}+i^{-1}$.

[5]

18. 证明复数 $z=-1+i$ 满足方程 $z^2+2z+2=0$.

19. 把复方程 $z^3+5z^2=z+3i$ 写成两个实方程.

20. 求解下列方程：

(a) $iz=4-zi$ (b) $\frac{z}{1-z}=1-5i$

(c) $(2-i)z+8z^2=0$ (d) $z^2+16=0$

21. 复数 z_1, z_2 满足方程组

$$(1-i)z_1+3z_2=2-3i,$$
$$iz_1+(1+2i)z_2=1.$$

求 z_1, z_2.

22. 求方程 $z^4-16=0$ 的所有解.

23. 设 z 是复数，满足 $\mathrm{Re}z>0$. 证明 $\mathrm{Re}(1/z)>0$.

24. 设 z 是复数，满足 $\mathrm{Im}z>0$. 证明 $\mathrm{Im}(1/z)<0$.

25. 设 z_1, z_2 是两个复数且 z_1+z_2, z_1z_2 都是负实数. 证明 z_1, z_2 必为实数.

26. 证明

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}z_j$$

和

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{n}z_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Im}z_j.$$

[和的实(虚)部等于实(虚)部的和.]用公式表示出相应的对复数乘法的猜测并证明它不成立.

27. 证明复数的二项式公式：

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+\binom{n}{1}z_1^{n-1}z_2+\cdots+\binom{n}{k}z_1^{n-k}z_2^k+\cdots+z_2^n,$$

这里 n 是正整数，二项式系数为

$$\binom{n}{k}:=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

28. 利用二项式公式(练习 27)计算 $(2-i)^5$.

29. 证明任意实数都不满足方程 $x^2=2$. [提示：假设 p/q 是它的解，这里 p 和 q 都是整数，那么 2 必整除 p 和 q. 这与分数总可写为两个无公因子的数之比的事实相矛盾.]

[6]

30. 实数系中的大小关系用符号"$>$"表示，其定义的基础是存在子集 $\mathcal{P}$(正实数集)具有下列性质：

(i)对任意 $\alpha\neq0$, α 或 $-\alpha$(但不同时)属于 $\mathcal{P}$.

(ii)若 α 与 β 属于 $\mathcal{P}$, 则 $\alpha+\beta$ 也属于 $\mathcal{P}$.

(iii)若 α 与 β 属于$\mathcal{P}$，则 $\alpha\beta$ 也属于$\mathcal{P}$.

当集合$\mathcal{P}$存在时，记 $\alpha>\beta$ 当且仅当 $\alpha-\beta$ 属于$\mathcal{P}$[⊖]. 证明复数系不存在非空集$\mathcal{P}$满足性质(i)、(ii)和(iii). [提示：论证 i 与 -i 都不属于这样的集合$\mathcal{P}$.]

31. 编一个程序计算复数的和、差、积、商. 输入输出参数要有相应的实部与虚部.

32. 计算乘积$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+i(bc+ad)$时，用直接的方法需要计算四次(实数的)乘法(和两次带符号的加法). 利用计算机计算乘法所用的时间往往远远多于加法. 设计一个程序计算$(a+bi)(c+di)$，使其只需计算三次乘法(需要更多次加法计算). [提示：先计算$(a+b)(c+d)$.]

1.2 复数的点表示

假定读者熟悉笛卡儿坐标系(见图1-1)，它建立了 xy 平面上的点与有序实数对之间的一一对应. 例如：有序数对$(-2, 3)$对应位于 y 轴左方 2 个单位 x 轴上方 3 个单位的点 P.

7

笛卡儿坐标系提供了一种将复数表示为 xy 平面上的点的简便方法，即对任意复数$a+bi$，对应 xy 平面上一个坐标为(a, b)的点. 因此复数 $-2+3i$ 可由图 1-1 中的点 P 来表示. 图 1-1 中其余各点分别表示复数 0，i，2+2i 和 $-4-3i$.

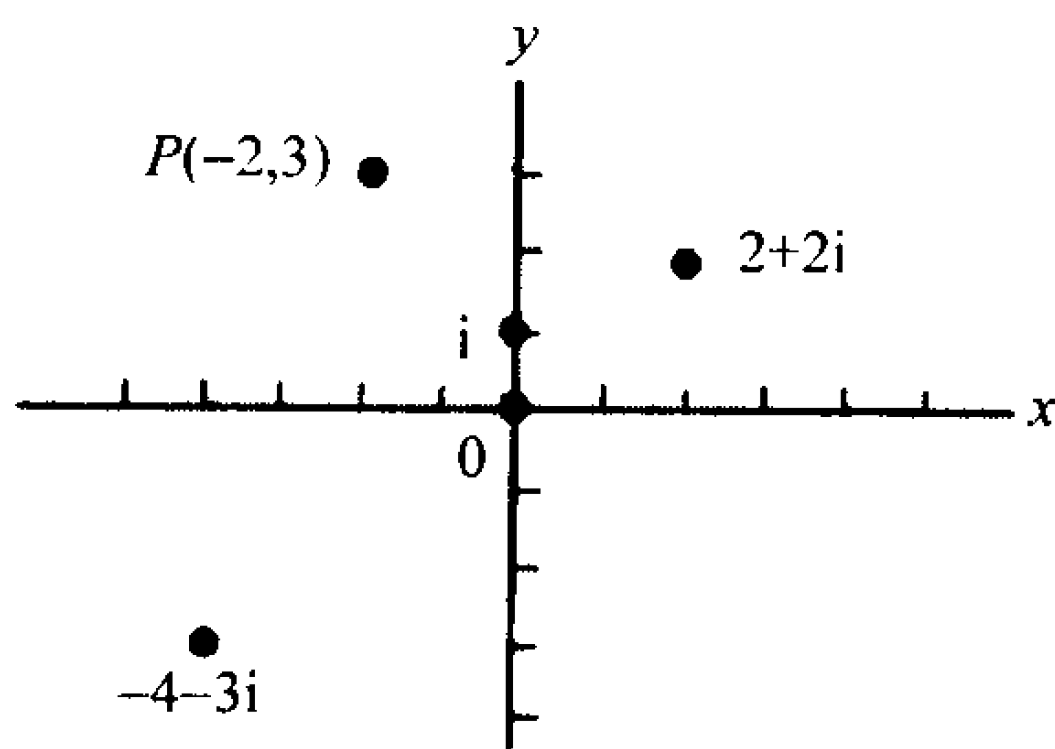


图 1-1　笛卡儿坐标系

用 xy 平面描述复数时，称其为*复平面*或 *z 平面*. (有时称为阿干特(Argand)图；Caspar Wessel 和 Jean Pierre Argand 分别于 1797 年和 1806 年独立地提出了复数在平面上的表示.)因为 x 轴上的每一个点表示一个实数，故把 x 轴称为*实轴*. 类似地，y 轴上的点表示纯虚数，故称其为*虚轴*.

今后，我们把表示复数 z 的点简称为*点 z*；即点 $z=a+bi$ 是坐标为(a, b)的点.

例 1　假设质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的 n 个质点分别位于复平面上的 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 处. 说明该系统的质心是点

$$\hat{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

解　设 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，$\cdots$，$z_n=x_n+y_ni$，令 M 为总质量 $\sum_{k=1}^{n}m_k$. 容易知道已给系统的质心坐标为$(\hat{x}, \hat{y})$，其中

$$\hat{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_kx_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_ky_k}{M}.$$

显然$\hat{x}$，$\hat{y}$分别为复数 $\left(\sum_{k=1}^{n}m_kz_k\right)/M=\hat{z}$的实部和虚部. ■

绝对值. 由庞特里亚金(Pythagorean)定理，从点 $z=a+bi$ 到原点的距离是$\sqrt{a^2+b^2}$. 下面给这种距离一个特殊的记号.

⊖ 事实上，这正是计算机中检验命题 $\alpha>\beta$ 的方法.

> **定义 3** $\sqrt{a^2+b^2}$称为复数 $z=a+bi$ 的**绝对值**(absolute value)或**模**(modulus)，用记号$|z|$表示，即$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$.

特别地，

[8]

$$|0|=0,\quad \left|\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad |3-4i|=\sqrt{9+16}=5.$$

因此复数 z 的模$|z|$恒为非负实数，并且 0 是模为 0 的唯一复数.

令 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$. 那么

$$|z_1-z_2|=|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

它是坐标为(a_1, b_1)，(a_2, b_2)的两点间的距离(参见图 1-2). 从而，$|z_1-z_2|$给出了两点 z_1，z_2 间的距离. 它在描述平面上的某些曲线时是很有用的. 例如，考虑满足方程

$$|z-z_0|=r \tag{1}$$

的所有的点 z 的集合，这里 z_0 是一个给定的复数，r 是一个正实数. 这个点集由所有那些与 z_0 的距离为 r 的点组成. 因此方程(1)表示一个圆周.

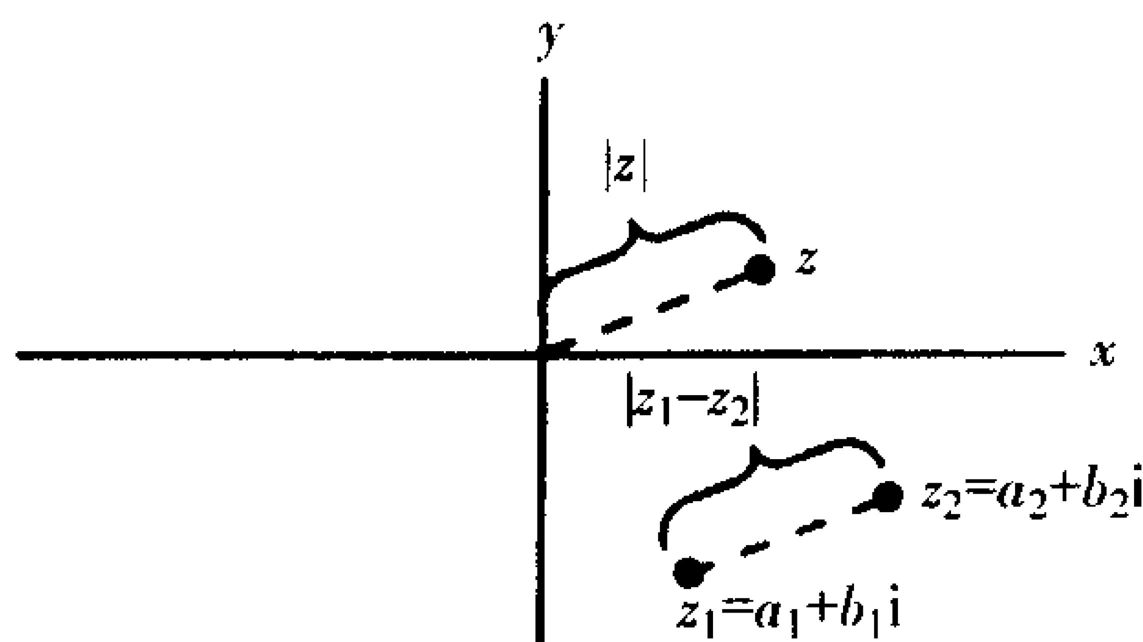


图 1-2 两点间的距离

例 2 描述满足下列方程的点集.

(a) $|z+2|=|z-1|$， (b) $|z-1|=\text{Re}z+1$.

解 (a)点 z 满足方程(a)的充分必要条件是它到点 -2 和点 1 的距离相等. 因此方程(a)为连接 -2 与 1 的线段的中垂线的方程；即满足方程(a)的点集为直线 $x=-\frac{1}{2}$.

一种更常规的方法是令 $z=x+iy$，代入方程进行计算：

$$|z+2|=|z-1|,$$
$$|x+iy+2|=|x+iy-1|,$$
$$(x+2)^2+y^2=(x-1)^2+y^2,$$
$$4x+4=-2x+1,$$
$$x=-\frac{1}{2}.$$

(b)方程(b)的几何意义不很明显，直接计算，得到$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x+1$，或 $y^2=4x$，它表示一条抛物线(参见图 1-3). ■

[9]

复共轭. 点 $z=a+bi$ 关于实轴的对称点是 $z=a-bi$(参见图 1-4). 我们将会看到，$a+bi$ 与 $a-bi$ 之间的关系在复变理论中起了很重要的作用. 下面的定义给这个概念一个特别的记号.

> **定义 4** $a-bi$ 称为数 $z=a+bi$ 的复共轭(complex conjugate)，用记号$\bar{z}$表示，即$\bar{z}:=a-bi$.

于是，

$$\overline{-1+5i}=-1-5i,\qquad \overline{\pi-i}=\pi+i,\quad \bar{8}=8.$$

也有一些书中使用星号，即用 z^* 来表示 z 的复共轭.

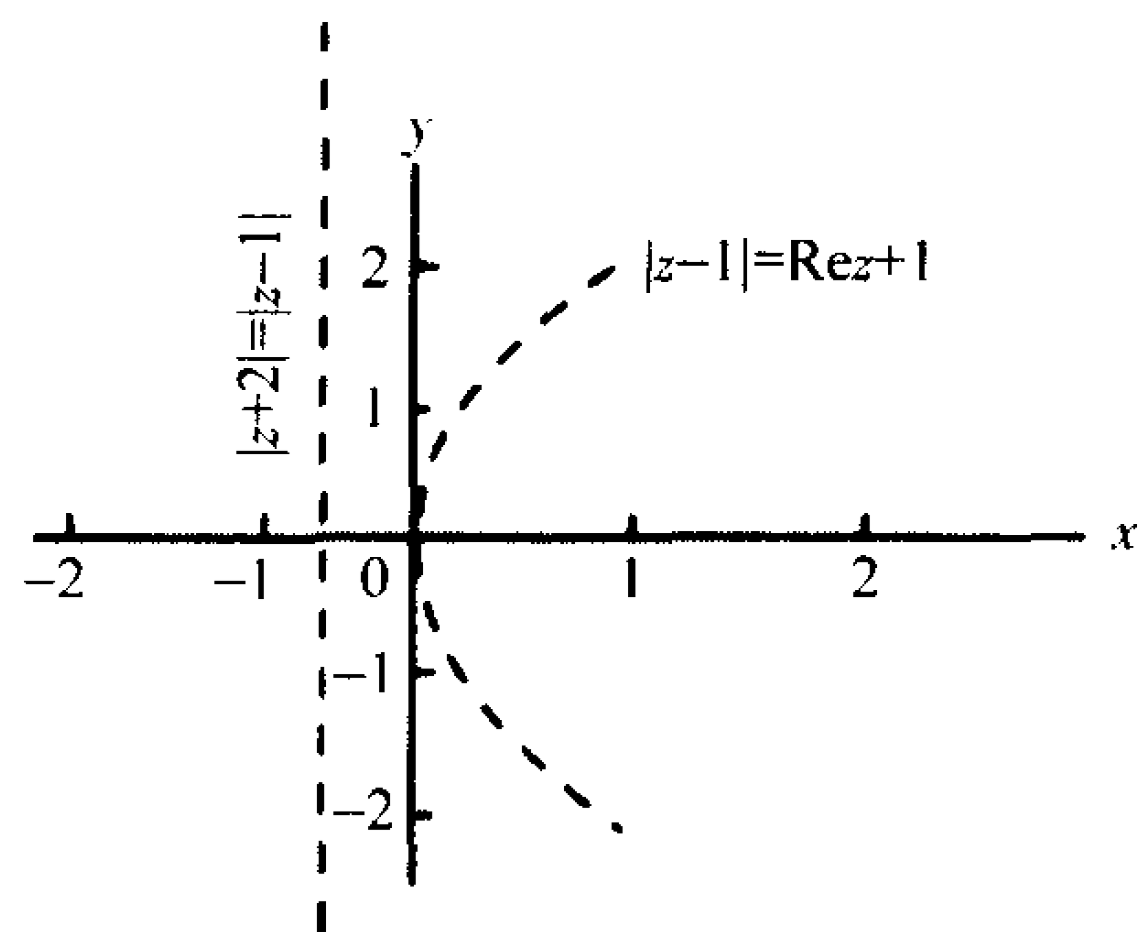


图 1-3　例 2 的图

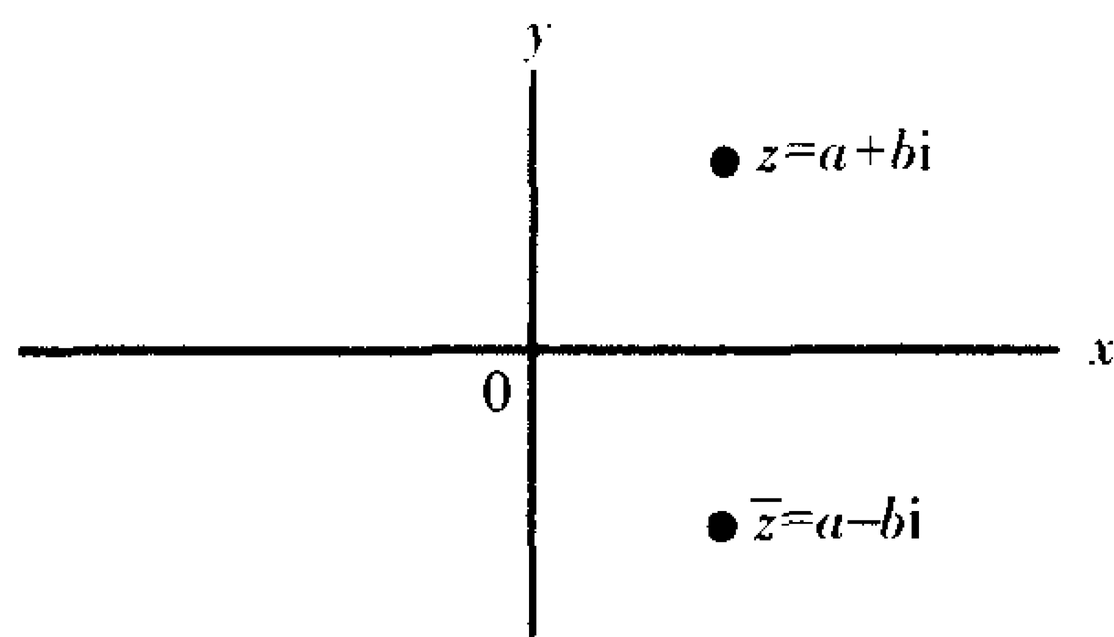


图 1-4　复共轭

由定义 4 知，$z=\bar{z}$ 当且仅当 z 是一个实数. 显然，两个复数的和(差)的共轭等于它们共轭的和(差)，即

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}.$$

10

对于复数乘法来说，类似的结论就不那么直观.

例 3　证明两个复数的乘积的共轭等于它们的共轭的乘积.

证　只需证明

$$(\overline{z_1z_2})=\overline{z_1}\,\overline{z_2}. \tag{2}$$

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$. 那么

$$\begin{aligned}(\overline{z_1z_2})&=\overline{a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}}\\&=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\,\overline{z_2}&=(a_1-b_1\mathrm{i})(a_2-b_2\mathrm{i})=a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2\mathrm{i}-a_2b_1\mathrm{i}\\&=a_1a_2-b_1b_2-(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此(2)式成立. ■

除(2)以外，还有如下一些性质

$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}}\quad(z_2\neq 0); \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2}; \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}; \tag{5}$$

性质(4)表明复数与其共轭的和是实数，而(5)式说明它们的差是(纯)虚数. 一个复数的共轭的共轭是它本身：

$$(\bar{\bar{z}})=z. \tag{6}$$

根据定义 4 显然有

$$|z| = |\bar{z}|;$$

即点 z 与点 $\bar{z}$ 到原点的距离相等. 而且，由于

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2,$$

我们有

11

$$z\bar{z} = |z|^2. \tag{7}$$

这是一个有用的事实：一个复数的模的平方等于这个复数与它的共轭的乘积.

其实，在 1.1 节除法运算的分母有理化过程中已经用到了复共轭. 例如，设 z_1，z_2 是复数，然后利用 $\overline{z_2}$ 把 z_1/z_2 写成分母为实数的比式：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2}. \tag{8}$$

特别地，

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \tag{9}$$

最后值得一提的是，可用一种或许更有启发性的方法来理解(2)式. 注意到我们表示一个复数时需要两个实数和记号 i，例如 $z=a+bi$，对它取共轭相当于改变 i 项的符号. 现在回忆一下 i 在计算中所扮演的角色，除了出现它的平方时用 -1 代替外，其余情况下 i 都不参与计算，仅是作为一个记号保留了下来. 因此，我们也可以用 j，λ，$\sqrt{-1}$ 或其他任何符号的平方去代替 -1. 实际上，由于 $-i$ 的平方也是 -1，所以用 $-i$ 代替 i 也不会影响到计算的合理性. 例如，在乘积 $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$ 中用 $-i$ 代替 i 后再做乘法，其结果的不同之处仅是 i 都换成了 $-i$. 用共轭的语言表达，正好是例 3 的结论[⊖].

练习 1.2

1. 证明：$\dfrac{z_1+z_2}{2}$ 是连接 z_1 与 z_2 的线段的中点.
2. 给定四个质量分别为 2，1，3，5 的质点，各自位于复平面上的点 $1+i$，$-3i$，$1-2i$，-6 处，求这个系统的质心.
3. 在 i，$2-i$，-3 各点中，哪个点距原点最远？
4. 令 $z=3-2i$，在复平面上画出点 z，$-z$，$\bar{z}$，$-\bar{z}$ 和 $1/z$；当 $z=2+3i$，$z=-2i$ 时，同样画出以上 5 个点.
5. 证明：点 1，$-1/2+i\sqrt{3}/2$，$-1/2-i\sqrt{3}/2$ 是一等边三角形的三个顶点.

12

6. 证明：点 $3+i$，6，$4+4i$ 是一直角三角形的三个顶点.
7. 描述复平面上满足下列各式所表示的点 z 的集合.

   (a) $\mathrm{Im}z=-2$　　(b) $|z-1+i|=3$

   (c) $|2z-i|=4$　　(d) $|z-1|=|z+i|$

   (e) $|z|=\mathrm{Re}z+2$　　(f) $|z-1|+|z+1|=7$

   (g) $|z|=3|z-1|$　　(h) $\mathrm{Re}z\geq 4$

⊖ 由于同样的原因，先用 $-\sqrt{2}$ 代替 $\sqrt{2}$ 再做乘法 $(3+2\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})$ 与先做乘法再替换得到的结果是一样的.（试一下.）

(i) $|z-i|<2$　　　(j) $|z|>6$

8. 分别用解析法和图形法证明 $|z-1|=|\bar{z}-1|$.

9. 设 r 为非负实数，证明 $|rz|=r|z|$.

10. 证明：$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

11. 证明：若 $|z|=\mathrm{Re}z$，则 z 是非负实数.

12. 证明性质(3)、(4)和(5).

13. 证明：若 $(\bar{z})^2=z^2$，则 z 是实数或纯虚数.

14. 证明：$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. [提示：利用方程(7)和(2)证明 $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$.]

15. 证明：对任意整数 k，有 $(\bar{z})^k=\overline{(z^k)}$ 成立(当 k 是负数时假定 $z\neq0$).

16. 证明：若 $|z|=1(z\neq1)$，则 $\mathrm{Re}[1/(1-z)]=\frac{1}{2}$.

17. 设 a_1，a_2，…，a_n 为实常数. 证明：若 z_0 是多项式方程 $z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的一个根，那么 $\overline{z_0}$ 也是它的一个根.

18. 利用熟知的二次多项式的求根公式，给出 17 题中 $n=2$ 时的另外一种证明方法.

19. 已知点 z 关于实轴(水平线 $y=0$)的对称点是 z 的共轭复数 $\bar{z}$. 证明：点 z 关于直线 $ax+by=c$(a，b，c 是实数)的对称点是 $\dfrac{2ic+(b-ai)\bar{z}}{b+ai}$.

20. (复矩阵)设 $\boldsymbol{B}$ 是 m 行 n 列复矩阵. 对 $\boldsymbol{B}$ 的每个元素取共轭后再作转置(行与列互换)，得到的 n 行 m 列的矩阵记为 $\boldsymbol{B}^{\dagger}$. 即，如果 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，则 $\boldsymbol{B}^{\dagger}=[\overline{b_{ji}}]$. 例如：

$$\begin{bmatrix} i & 3 \\ 4-i & -2i \end{bmatrix}^{\dagger}=\begin{bmatrix} -i & 4+i \\ 3 & 2i \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 3 \end{bmatrix}^{\dagger}=[1-i\quad 3].$$

13

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是一 n 阶复矩阵，证明：

(a) 如果对任意 n 行 1 列复向量 $\boldsymbol{u}$ 都有 $\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵(即对所有的 i，j，有 $a_{ij}=0$). [提示：为证明 $a_{ij}=0$，取 $\boldsymbol{u}$ 为第 i 个与第 j 个分量都为 1、其他分量都为 0 的列向量.]

(b) 举例说明(a)中的假设换成 $\boldsymbol{u}$ 为实向量时，结论($\boldsymbol{A}$ 为零矩阵)不真. [提示：试找一个 2 阶(即 2 行 2 列)非零实矩阵 $\boldsymbol{A}$，使它对任意 2 维(即 2 行 1 列)实列向量 $\boldsymbol{u}$ 都有 $\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=0$ 成立.]

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^{\dagger}=\boldsymbol{A}$(参考练习 20)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为埃尔米特矩阵.

(a) 证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，则对任意 n 维复列向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ 是实数.

(b) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是 m 行 n 列复矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{\dagger}\boldsymbol{B}$ 是埃尔米特矩阵.

(c) 证明：如果 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶复矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是 n 维复列向量，则 $\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{B}^{\dagger}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 必为非负实数.

1.3　向量与极式

复平面上的每一点 z 都可以用一个向量(即连接原点到点 z 的有向线段)来表示. 由于向量由它的长度和方向来决定，因此一个给定的向量经过平移后保持不变. 从而，由 $z=1+i$ 确定的向量与以点 $2+i$ 为起点、$3+2i$ 为终点的有向线段确定的向量是相同的(见图 1-5). 注意任何平行于实轴的向量表示实数，而那些平行于虚轴的向量则表示纯虚数. 因此，向量 z 的长度是 $|z|$.

14

设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是分别由点 z_1 和 z_2 确定的向量. 图 1-6 说明向量的和 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 满足平行四边形法则. 如果 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则图 1-6 中的向量 $\boldsymbol{v}$ 的终点具有坐标(x_1+x_2，y_1+y_2)，即它对应于点 z_1+z_2. 由此可知，**复数的加法与平面向量的加法运算法则是一致的.**

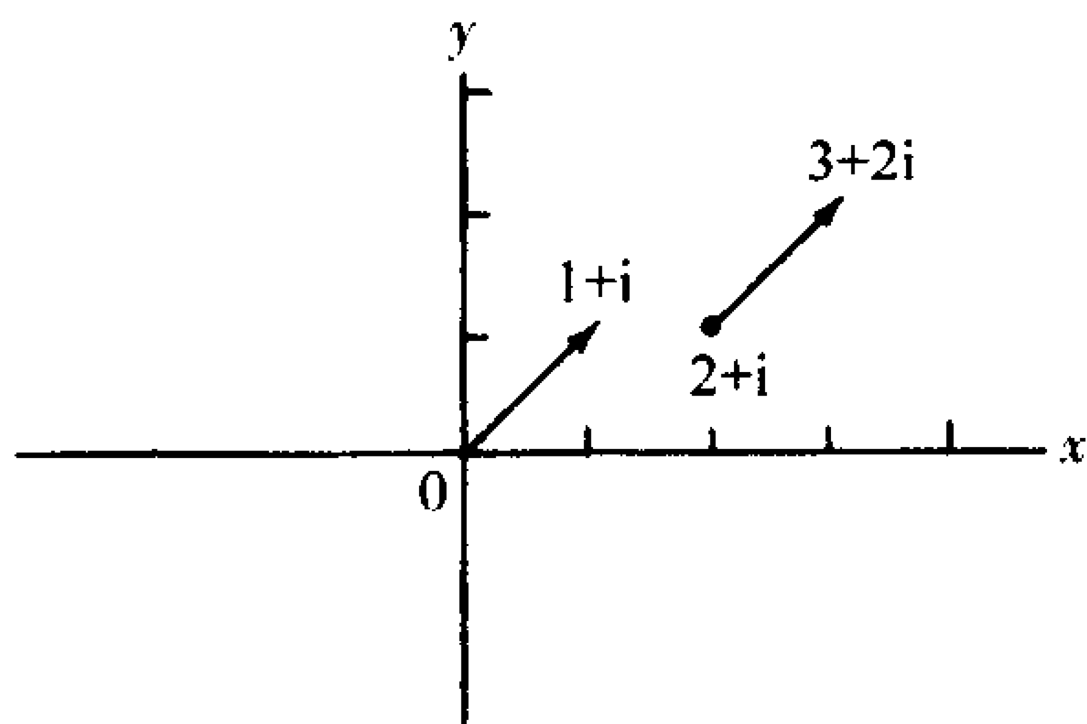


图 1-5 用向量表示的复数

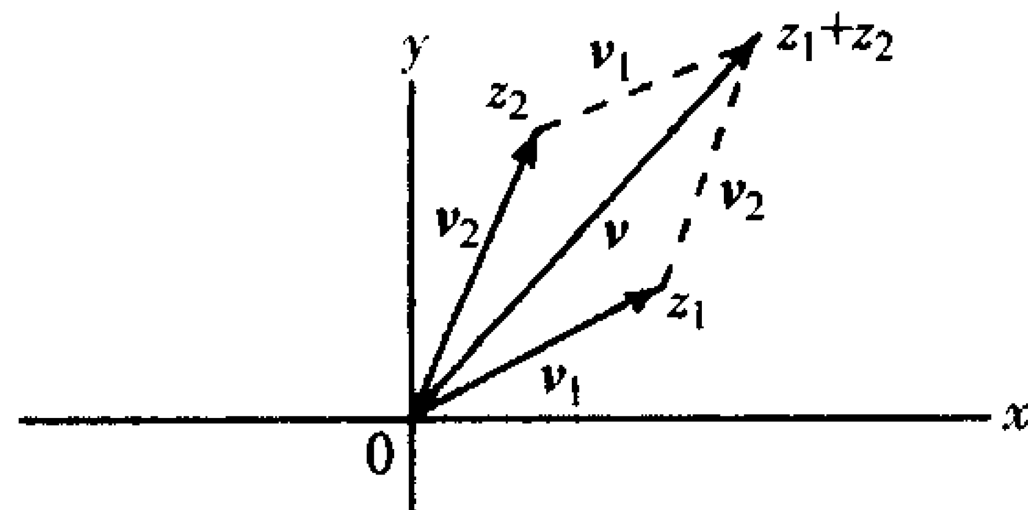


图 1-6 向量的加法

今后，由点 z 确定的向量简称为向量 z.

在几何上，我们知道三角形中任何一边的边长不超过另外两边边长之和. 如果把这个定理运用到图 1-6 中以 0，z_1，z_1+z_2 为顶点的三角形，可得到以下重要关系式，即复数与其和的模之间的关系：

三角不等式 对于任何两个复数 z_1 和 z_2，有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1}$$

三角不等式很容易推广到两个复数以上的情形，参见习题 22.

对于向量 z_2-z_1，当加上向量 z_1 后，显然得到向量 z_2. 因此 z_2-z_1 可用由 z_1 到 z_2 的有向线段来表示(见图 1-7). 对于图 1-7 中的三角形应用几何定理，可推出三角不等式的另外形式：

$$|z_2| \leqslant |z_1| + |z_2-z_1|$$

或

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2-z_1|. \tag{2}$$

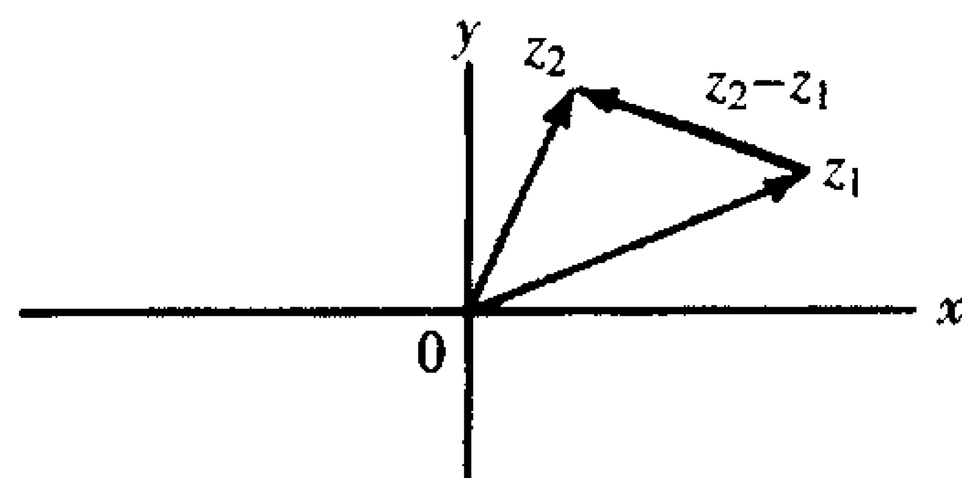


图 1-7 向量的减法

不等式(2)说明，三角形中任意两边长度之差不超过第三边的长度.

例 1 证明：三个互异的点 z_1、z_2 和 z_3 共线的充分必要条件是，对于某个实数 c，有 $z_3-z_2=c(z_2-z_1)$.

15

证 我们知道，两个向量平行的充分必要条件是其中一个向量是另一个的一个(实数)标量倍. 换成复数的语言，即复数 z 和 w 平行的充分必要条件是 $z=cw$，其中 c 是实数. 从图 1-8 可知，点 z_1，z_2 和 z_3 共线等价于向量 z_3-z_2 与 z_2-z_1 平行. 应用向量的平行特征即得结论. ■

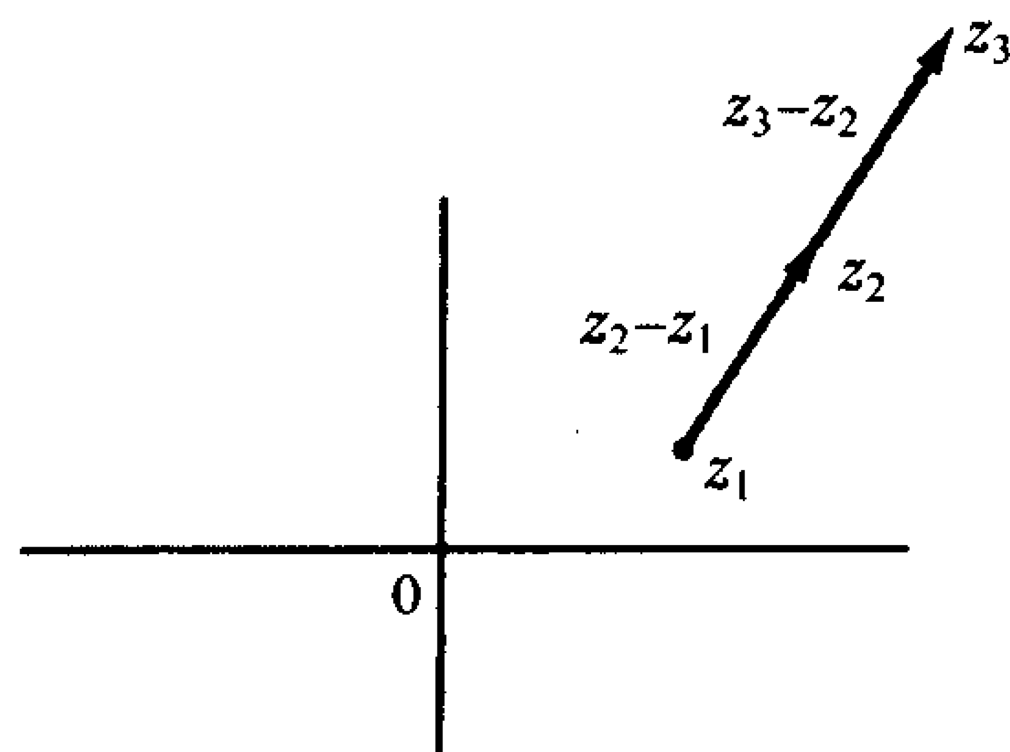


图 1-8 共线点

还有一种参变量集合的方法，也可以刻画从原点到点 z 的向量(即不采用 z 的实部和虚部的方法)，这是一种通过向量的长度和方向对其进行表示的方法，这就是点 z 的极坐标 r 和 θ. 坐标 r 是原点到 z 的距离，θ 是向量 z 的倾角. 从

正实轴开始，按逆时针方向转到向量 z 时，得到的正实轴和向量 z 的夹角为正(同理，按顺时针方向转到向量 z 时，得到的夹角为负)(见图 1-9). 在本书中，我们约定角度的单位是弧度；有时，使用角度表示能使表达更加清楚，但在涉及微积分的学科内，它会呈现出相当的不确定性. 注意到 r 是 z 的模，或是 z 的绝对值，因此 $r=|z|$ 是非负数.

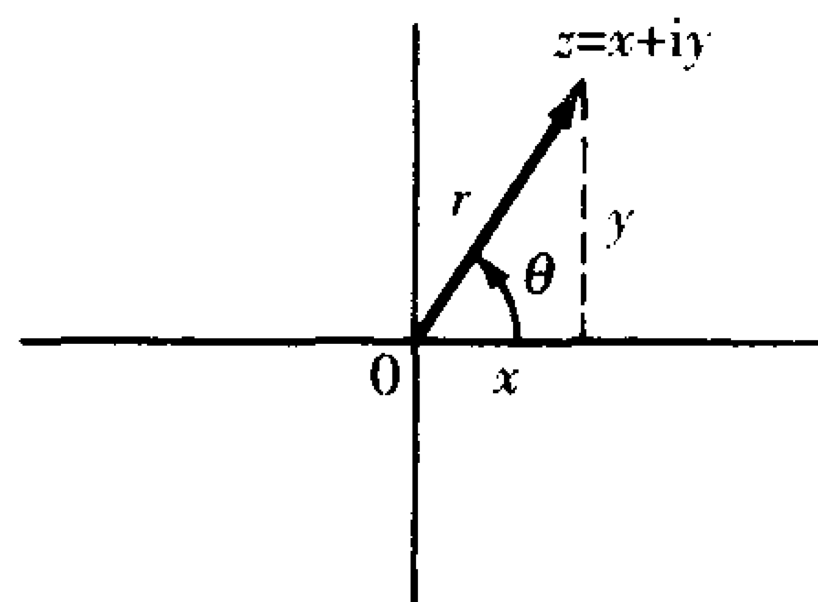


图 1-9 极坐标

由图 1-9，容易推导出用极坐标 (r,θ) 表示直角(或笛卡儿)坐标 (x,y) 的关系式：

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta. \tag{3}$$

16

另一方面，由 (x,y) 来表示极坐标 (r,θ) 的表达式就要稍微复杂一些. 实际上，坐标 r 可由

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=|z| \tag{4}$$

给出. 然而，我们注意到，虽然由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 可以得出

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),$$

但上式对于第二和第三象限的 z 是不成立的(因为通常反正切函数的取值范围是第一和第四象限). 因为当一个角度通过它的正弦和余弦函数给出时，θ 由如下一对方程

$$\cos\theta=\frac{x}{|z|},\qquad \sin\theta=\frac{y}{|z|} \tag{5}$$

唯一确定，但在实际上我们通常计算 $\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 时，对于 z 在不同象限的情况则通过适当地增加或减少 π(弧度)来解决(见习题 14).

然而，θ 令人讨厌的方面并不仅有这些. 即便由方程(5)也能看出，当一个角度 θ 确定后，在 θ 上再加上 2π 的一个整数倍也是成立的. 为此，我们引进复数辐角的概念，称这些角度的任一值为 z 的辐角或相位，记作

$$\arg z.$$

从而，如果取定 $\arg z$ 的一个值 θ_0，那么

$$\theta_0\pm2\pi,\quad \theta_0\pm4\pi,\quad \theta_0\pm6\pi,\quad \cdots$$

也是 $\arg z$ 的值，并且 $\arg z$ 的任一值必须是这些值中的一个[1]. 特别地，$\arg i$ 的值是

$$\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\pm2\pi,\frac{\pi}{2}\pm4\pi,\cdots,$$

17

记作

$$\arg i=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

---

[1] 另一个表示 $\arg z$ 的方法是把它写成一个集合：

$$\arg z=\{\theta_0+2k\pi:\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}.$$

为了方便起见，对于某些 $\arg z$ 的有限值我们用一个记号来表示. 注意到，长度为 2π 的任何一个半开区间含有且只含有辐角的一个值. 通过指定这样的一种区间，我们可以说已经选择了 $\arg z$ 的一个特别分支. 图 1-10 说明了三个可能分支的选取情况. 第一个图(图 1-10a)描述的是在区间 $(-\pi, \pi]$ 中选取的 $\arg z$ 的值的分支；通常称它为**辐角的主值**，记为 $\operatorname{Arg} z$(用大写字母 A). 主值通常用于复数的算术计算机编码；它自然是不连续的，当 z 越过负实轴时，辐角增加 2π. 这条不连续线称作**支割线**.

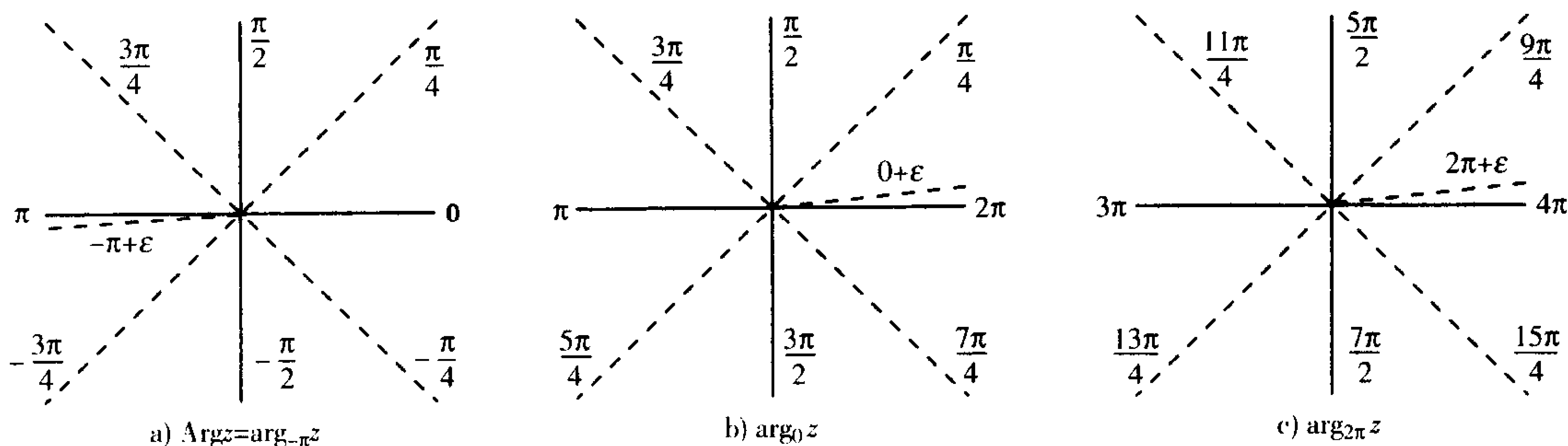


图 1-10 $\arg z$ 的分支

当然，$\arg z$ 的任何分支在某个地方必定有一个跃度为 2π 的跳跃. 图 1-10b 表示的从区间 $(0, 2\pi]$ 中取值的分支在正实轴是不连续的. 图 1-10c 表示的分支虽然也以正实轴为支割线，但它是从区间 $(2\pi, 4\pi]$ 中取值的.

把从区间 $(\tau, \tau+2\pi]$ 取值的 $\arg z$ 的分支记为 $\arg_\tau z$，则 $\arg_{-\pi} z$ 是主值支 $\operatorname{Arg} z$，而图 1-10b 和图 1-10c 表示的分支则分别是 $\arg_0 z$ 和 $\arg_{2\pi} z$. 显然，$\arg 0$ 不能被定义为任何分支.

习惯上，人们把 $z=x+\mathrm{i}y$ 的极坐标形式写为[见方程(3)]

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\operatorname{cis}\theta, \tag{6}$$

这里把“cosine + i sine”简写为 cis.

例 2 求 $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$，并把 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 写成极坐标形式.

解 由于 $r=|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$，而满足等式 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 θ 是 $\frac{\pi}{3}$，因此 $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…[特别地，$\operatorname{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\frac{\pi}{3}$]. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的极形式为 $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$. ■

在很多特定的环境中，形式 $x+\mathrm{i}y$ 或 $\operatorname{cis}\theta$ 中的某一个用起来比另一个更加方便一些. 例如，直角坐标形式在做加法或减法运算时就很方便，而用极形式就比较麻烦(见习题 21). 另一方面，极形式对于复数乘法却有非常有趣的几何解释.

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2),$$

两式相乘，有

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

所以

18
~
19

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{7}$$

方程(7)可简写为

$$z_1z_2 = (r_1\text{cis}\theta_1)(r_2\text{cis}\theta_2) = (r_1r_2)\text{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

上式说明，两个复数相乘：

乘积的模等于模的乘积：

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| (= r_1r_2); \tag{8}$$

乘积的辐角等于辐角的和：

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 (= \theta_1 + \theta_2). \tag{9}$$

(准确地说，方程(9)可以这样解释：如果取定这些项中任何一对的值，就可以找出第三项的值满足这个恒等式.)

几何意义是，向量 z_1z_2 的长度等于向量 z_1 的长度与向量 z_2 的长度之积，向量 z_1z_2 的辐角等于向量 z_1 的辐角与向量 z_2 的辐角之和(见图 1-11). 例如，向量 i 的长度为 1，辐角为 $\frac{\pi}{2}$，则向量 iz 可以通过把向量 z 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到.

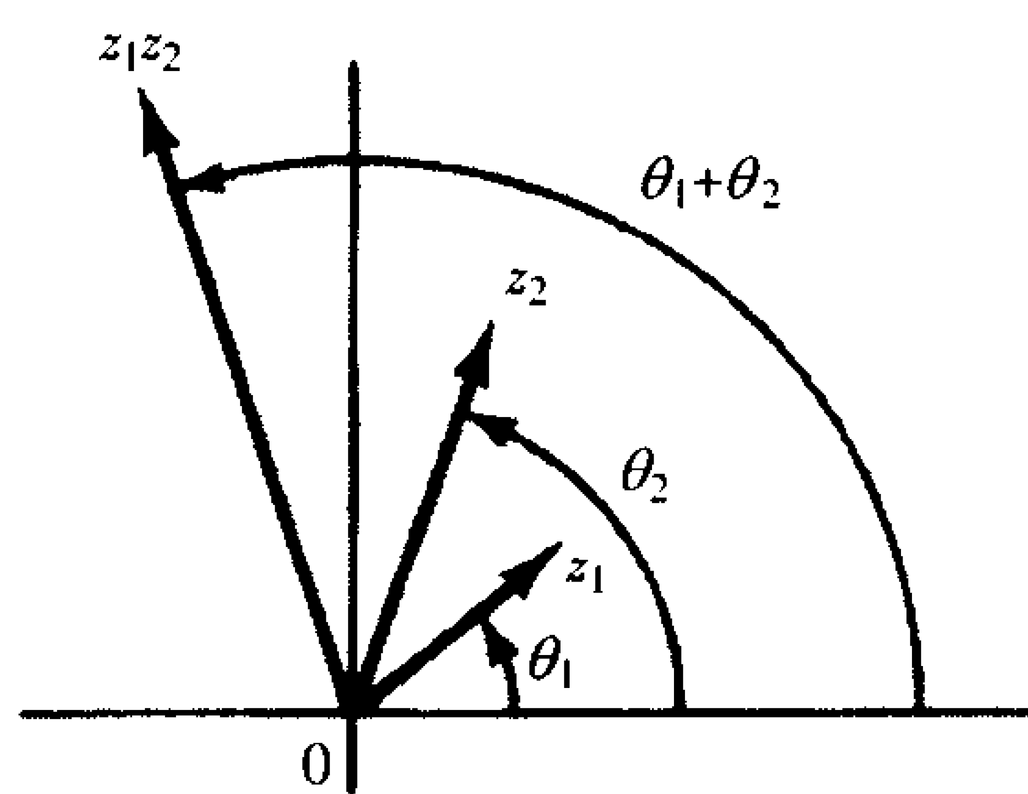


图 1-11　乘积的几何解释

显然，向量的除法是乘法的逆运算，我们有如下方程：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2), \tag{10}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{11}$$

和

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{12}$$

方程(10)可用类似于证明方程(7)的方法得到，接着方程(11)和方程(12)可以很快推导出来. 几何意义是，向量$\frac{z_1}{z_2}$的长度等于向量 z_1 的长度与向量 z_2 的长度之商，向量$\frac{z_1}{z_2}$的辐角等于向量 z_1 的辐角与向量 z_2 的辐角之差.

20

例 3　用极形式写出方程$(1+i)/(\sqrt{3}-i)$.

解　$1+i$ 和$\sqrt{3}-i$ 的极形式分别是

$$1 + i = |1 + i|\text{cis}(\arg(1 + i)) = \sqrt{2}\text{cis}(\pi/4),$$

$$\sqrt{3} - i = 2\text{cis}(-\pi/6).$$

于是由方程(10)可得

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{12}.$$ ■

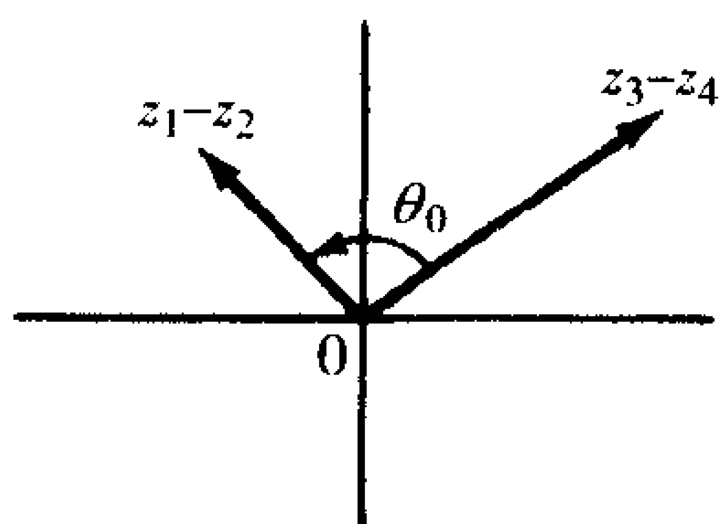
例 4 证明：经过点 z_1、z_2 的直线 l 与经过点 z_3、z_4 的直线 L 垂直的充要条件是

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\pm\frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

证 首先注意到直线 l 与直线 L 垂直的充要条件是向量 z_1-z_2 与 z_3-z_4 正交(见图 1-12). 由于

$$\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}=\arg(z_1-z_2)-\arg(z_3-z_4)$$

给出了由向量 z_3-z_4 到 z_1-z_2 的角度，当这个角度(增加 2π 的一个整数倍)等于 $\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 时，恰好向量 z_3-z_4 与 z_1-z_2 正交. 而这与(13)式的成立条件是相同的. ■



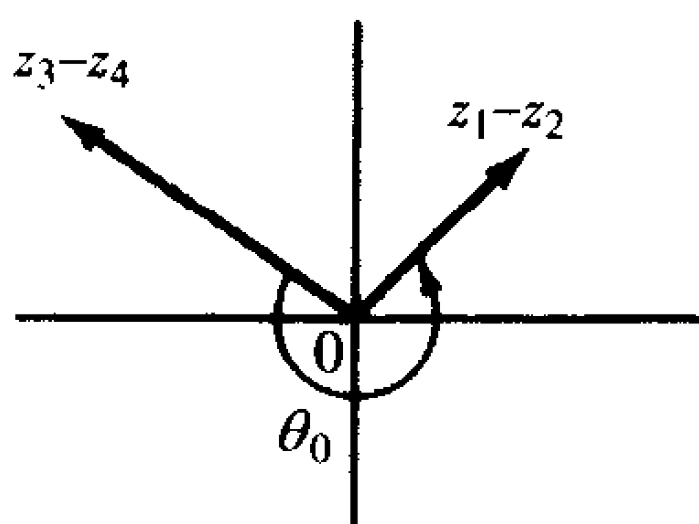


图 1-12 正交向量

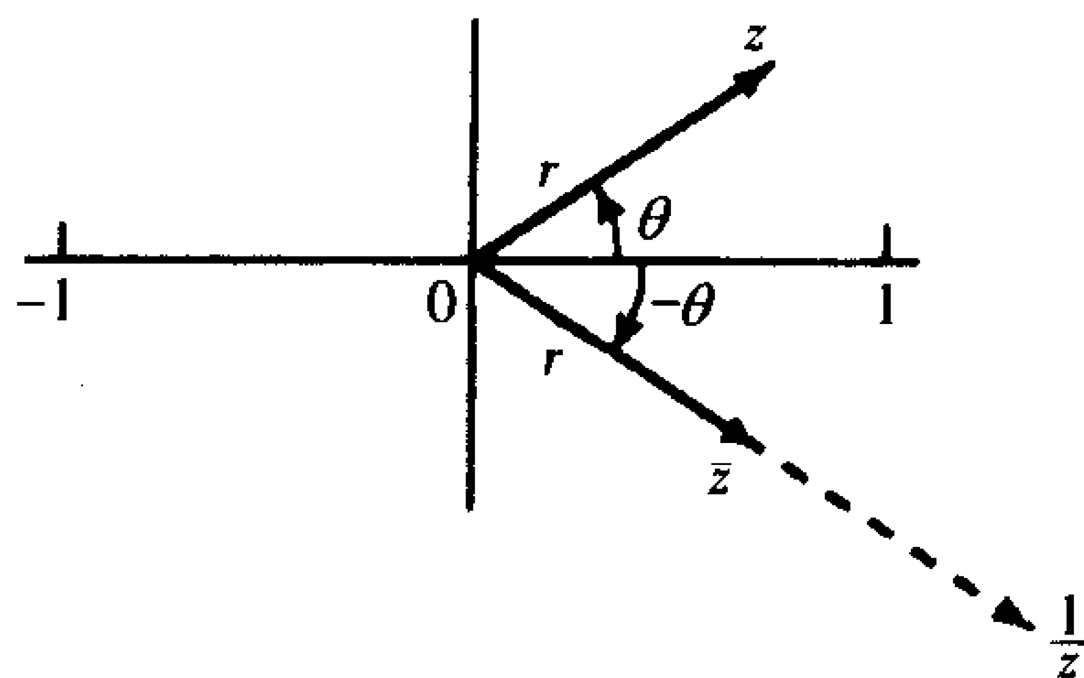


图 1-13 共轭复数和倒数的辐角

从几何上看，向量 $\bar{z}$ 是向量 z 关于实轴的对称映射(见图 1-13)，因此一个复数的共轭的辐角等于这个复数的辐角的相反数；即

$$\arg\bar{z}=-\arg z. \tag{14}$$

事实上，作为方程(11)的特例，我们有

$$\arg\frac{1}{z}=-\arg z.$$

21 从而 $\bar{z}$ 和 z^{-1} 有相同的辐角且表示平行向量(见图 1-13).

练习 1.3

1. 设 $z_1=2-\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$. 应用平行四边形法则画出下面每个向量图.

(a) z_1+z_2　　(b) z_1-z_2　　(c) $2z_1-3z_2$

2. 证明：$|z_1z_2z_3|=|z_1||z_2||z_3|$.

3. 用复数方法表示下面的定理：

平行四边形对角线长度的平方和等于它的边长长度的平方和(见图 1-6).

4. 证明：对于任何整数 k，$|z^k|=|z|^k$(当 k 是负数时假定 $z\neq0$).

5. 求下列各式的值.

(a) $\left|\dfrac{1+2i}{-2-i}\right|$　(b) $|\overline{(1+i)}(2-3i)(4i-3)|$　(c) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1-i)^2}\right|$　(d) $\left|\dfrac{(\pi+i)^{100}}{(\pi-i)^{100}}\right|$

6. 做出下列每一个向量的图形.

(a) $7\mathrm{cis}(3\pi/4)$　(b) $4\mathrm{cis}(-\pi/6)$　(c) $\mathrm{cis}(3\pi/4)$　(d) $3\mathrm{cis}(27\pi/4)$

7. 求出下列每一复数的辐角并写出它们的极形式.

(a) $-1/2$　(b) $-3+3i$　(c) $-\pi i$

(d) $-2\sqrt{3}-2i$　(e) $(1-i)(-\sqrt{3}+i)$　(f) $(\sqrt{3}-i)^2$

(g) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2+2i}$　(h) $\dfrac{-\sqrt{7}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$

8. 用几何方法证明：非零复数 z_1，z_2 满足 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ 的充分必要条件是它们有相同的辐角.

9. 已知向量 z，给出向量 $(\cos\phi+i\sin\phi)z$ 的几何解释.

22

10. 证明下式：

(a) $\arg z_1z_2z_3=\arg z_1+\arg z_2+\arg z_3$.

(b) $\arg z_1\overline{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$.

11. 应用复数乘积 $(1+i)(5-i)^4$，推导

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}(1/5)-\tan^{-1}(1/239).$$

12. 求下面各式之值.

(a) $\mathrm{Arg}(-6-6i)$　(b) $\mathrm{Arg}(-\pi)$　(c) $\mathrm{Arg}(10i)$　(d) $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-i)$

13. 判断下面各题哪些总是真的.

(a) 如果 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$，则 $\mathrm{Arg}z_1z_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$.

(b) 如果 z 不是实数，则 $\mathrm{Arg}\,\bar{z}=-\mathrm{Arg}z$.

(c) 如果 $z_1\neq0$，$z_2\neq0$，则 $\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

(d) 如果 $z\neq0$，则 $\arg z=\mathrm{Arg}z+2\pi k$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$.

14. 证明下述用来计算 $\arg(x+iy)$ 的方程

$$\arg(x+iy)=\begin{cases}\tan^{-1}(y/x)+(\pi/2)[1-\mathrm{sgn}(x)] & \text{如果 } x\neq0,\\ (\pi/2)\mathrm{sgn}(y) & \text{如果 } x=0,y\neq0,\\ \text{无定义} & \text{如果 } x=y=0\end{cases}$$

是正确的，其中“signum”函数定义为

$$\mathrm{sgn}(t):=\begin{cases}+1 & \text{如果 } t>0,\\ 0 & \text{如果 } t=0,\\ -1 & \text{如果 } t<0.\end{cases}$$

进一步证明在它的连续点，$\mathrm{sgn}(y)\cos^{-1}\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 等于 $\mathrm{Arg}(x+iy)$.

15. 证明：$|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

16. 证明：$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$.

17. 证明：向量 z_1 平行于向量 z_2 的充分必要条件是 $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0$.

18. 证明：连结不同两点 z_1，z_2 的直线上的每一点 z 具有如下形式：$z=z_1+c(z_2-z_1)$，其中 c 为一实数. 如果 z 也严格地位于 z_1 和 z_2 之间，c 如何取值?

19. 证明：$\arg z_1=\arg z_2$ 的充分必要条件是 $z_1=cz_2$，其中 c 为正实数.

20. 设 z_1，z_2，z_3 是三个不同的点，ϕ 是 $\arg[(z_3-z_1)/(z_2-z_1)]$ 中的某一值. 证明：

$$|z_3-z_2|^2=|z_3-z_1|^2+|z_2-z_1|^2-2|z_3-z_1||z_2-z_1|\cos\phi.$$

23

[提示：考虑以 z_1，z_2，z_3 为顶点的三角形.]

21. 若 $r\text{cis}\theta = r_1\text{cis}\theta_1 + r_2\text{cis}\theta_2$，由 r_1，r_2，θ_1 和 θ_2 求 r 和 θ. 应用余弦定理验证您的答案.

22. 应用数学归纳法证明一般的三角不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

23. 设 m_1，m_2，m_3 是三个正实数，z_1，z_2，z_3 是三个模都不超过 1 的复数. 用一般的三角不等式(习题 22)证明

$$\left|\frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right| \leqslant 1,$$

并给出这个不等式的物理解释.

24. 写出直角坐标和极坐标之间的转换过程(应用辐角主值).

25. 已知两个平面向量 $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1)$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2)$ 的点积(或标量积)定义为

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

证明：由复数 z_1，z_2 表示的向量的点积可写为

$$z_1 \cdot z_2 = \text{Re}(\bar{z}_1z_2).$$

26. 应用习题 25 中的点积公式证明：由(非零)复数 z_1，z_2 表示的向量正交的充分必要条件是 $z_1 \cdot z_2 = 0$. [提示：由方程(9)后面的讨论可知，对某个实数 c，恰当 $z_1 = \text{i}cz_2$ 时，复数 z_1，z_2 表示的向量正交.]

27. 在三维空间中，在 xy 平面上的向量 $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1, 0)$ 和 $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2, 0)$ 的叉积(或向量积)可定义为

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (0,0,x_1y_2 - x_2y_1).$$

证明：

(a)在 xy 平面上，由复数 z_1，z_2 表示的向量叉积的第三个分量是 $\text{Im}(\bar{z}_1z_2)$.

(b)(非零)复数 z_1，z_2 表示的向量平行的充分必要条件是 $\text{Im}(\bar{z}_1z_2) = 0$. [提示：注意，对于某个实数 c，恰当 $z_1 = cz_2$ 时，复数 z_1，z_2 表示的向量平行.]

28. 本题说明复数方法怎样简化平面机械装置的动力分析.

如图 1-14 所示为一曲柄活塞连接装置. 当活塞臂 c 作水平运动时，曲柄臂 a 绕定点 O 转动.（如果是一个汽油发动机，燃烧力将推动活塞，使连接臂 b 将能量转化成机轴的旋转.）对于工程分析来说，建立曲柄的角坐标(位置、速度以及加速度)与对应的活塞的线性坐标的联系是重要的. 尽管这种计算可以用向量分析去做，但下面的复分析技巧更加自然.

24

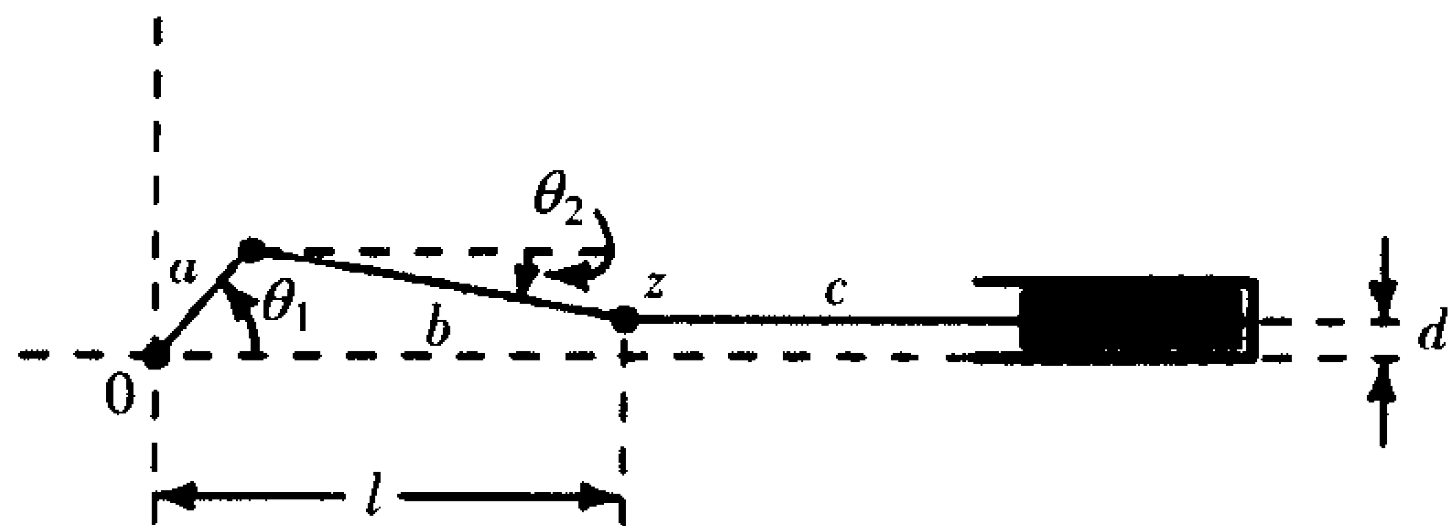


图 1-14 曲柄活塞连接装置

如图 1-14 所示，设机轴的中心位置 O 为坐标系的原点，活塞杆的最低位置用复数 z 表示，则

$$z = l + \text{i}d,$$

其中 l 是活塞的(线性)偏移，d 是一个固定的偏移量. 曲柄臂和连接臂分别由方程 $A = a(\cos\theta_1 + \text{i}\sin\theta_1)$ 和 $B = b(\cos\theta_2 + \text{i}\sin\theta_2)$ 来描述(在图 1-14 上，θ_2 是负角). 使用显然的恒等式 $A + B = z = l + \text{i}d$ 推导出涉及机轴角度的活塞位置表达式：

$$l = a\cos\theta_1 + b\cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{d - a\sin\theta_1}{b}\right)\right].$$

29. 若在习题 28 的机械装置中，有量纲

$a = 0.1\mathrm{m},\quad b = 0.2\mathrm{m},\quad d = 0.1\mathrm{m}$

且机轴以每秒 2 拉德匀速旋转．当 $\theta_1 = \pi$ 时，计算活塞的位置和速度．

30. 对于图 1-15 所示的连接图，根据臂 a 的角坐标、速度和加速度，运用复变量制定一个描述臂 c 的角坐标、速度和加速度的方案．（不必写出方程．）

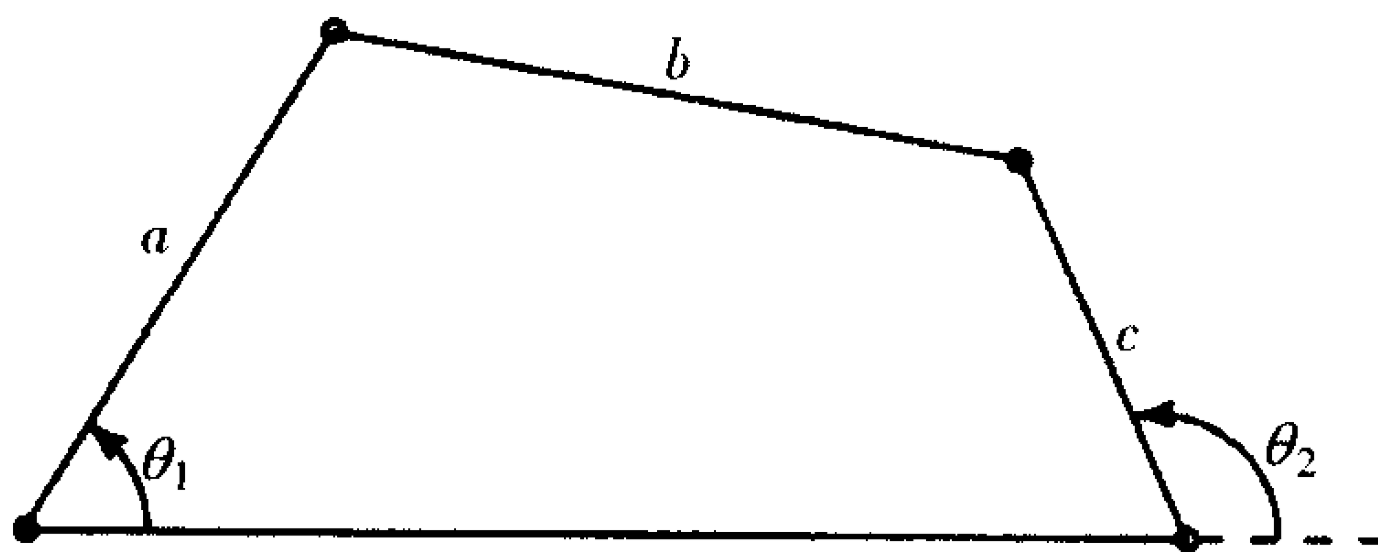


图 1-15　习题 30 的连接图

25

1.4　复指数

大家熟悉的指数函数 $f(x) = e^x$ 在复平面上有自然且特别有用的推广．实际上，复函数 e^z 对于复变量在电子电路、控制系统、波传导以及一般时滞物理系统中的应用提供了一个基本工具．

为了在 $z = x + iy$ 时给出 e^z 的合适定义，我们希望它能保持实函数 e^x 具有的一些基本性质．因此，首先要求乘法性质应该保持不变：

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{1}$$

问题相当简单，鉴于方程(1)有分解

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}, \tag{2}$$

因此，为了定义 e^z，仅需确定 e^{iy}（换句话说，只要我们弄清楚如何对纯虚数取幂，就能够对复数取幂）．

其次，假定求导法则

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \tag{3}$$

成立．关于复变量 $z = x + iy$ 求导，在现阶段是很深奥且没有掌握的运算；本书第 2 章将针对这一概念进行详细研究（本书的其余部分将致力于描述它的结论）．但是，由方程(2)的因子分解，（现在）只需要考虑方程(3)的一种特殊情形，即

$$\frac{de^{iy}}{d(iy)} = e^{iy},$$

或者，等价于（链式法则）

$$\frac{de^{iy}}{dy} = ie^{iy}. \tag{4}$$

如果再求导一次，方程(4)的结论就变得更加直观．

$$\frac{d^2e^{iy}}{dy^2} = \frac{d}{dy}(ie^{iy}) = i^2e^{iy} = -e^{iy};$$

26

换句话说，函数 $g(y) := e^{iy}$ 适合微分方程

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -g. \tag{5}$$

由此看来任何形如

$$A\cos y + B\sin y \quad (A,B\text{ 为常数})$$

的函数都满足方程(5). 事实上，由微分方程理论可知，方程(5)的任何解都必定有这种形式. 从而，我们有

$$g(y) = A\cos y + B\sin y. \tag{6}$$

下面确定 A 和 B 的值. 由条件

$$g(0) = e^{i0} = e^0 = 1 = A\cos 0 + B\sin 0$$

及

$$\frac{dg}{dy}(0) = ig(0) = i = -A\sin 0 + B\cos 0$$

可得 $A=1$，$B=i$. 于是有

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y.} \tag{7}$$

方程(7)称为欧拉(Euler)方程[⊖]. 由方程(7)和(2)，可得到下面的公式.

定义 5 如果 $z=x+iy$，则定义 e^z 为复数

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y). \tag{8}$$

由此定义不难直接验证 e^z 满足指数函数常见的代数性质，特别是乘法恒等式(1)以及与它相关的除法法则

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} \tag{9}$$

(见习题 15a). 在 2.5 节，我们将进一步确认由定义 5 定义的函数是一个“恰当的选择”，它具有特别好的解析性质. 另一个确认体现在下面给出的例子中.

27

例 1 证明欧拉方程形式上由通常的泰勒(Taylor)级数展式组成：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

证 在第 5 章里，我们将详细研究复函数的级数表示. 现在不考虑级数的收敛等问题，只是简单地把 $x=iy$ 替换进指数级数：

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i\sin y. \end{aligned}$$

■

由欧拉方程(7)，复数的极形式(1.3 节)可写为

⊖ 欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783).

$$z = r\text{cis}\theta = r(\cos\theta + \text{i}\sin\theta) = re^{\text{i}\theta}.$$

从而可以抛弃笨拙的"cis"技巧而使用通常的极表示，

$$z = re^{\text{i}\theta} = |z| e^{\text{i}\arg z}. \tag{10}$$

特别地，注意到下面的恒等式

$$e^{\text{i}0} = e^{2\pi\text{i}} = e^{-2\pi\text{i}} = e^{4\pi\text{i}} = e^{-4\pi\text{i}} = \cdots = 1,$$

$$e^{(\pi/2)\text{i}} = \text{i}, \quad e^{(-\pi/2)\text{i}} = -\text{i}, \quad e^{\pi\text{i}} = -1.$$

(数学系的学生(包括欧拉本人)常对最后的恒等式感到惊奇. 常数 e 来自于微积分学，π 来自于几何学，i 来自于代数学——由此结合起来的 $e^{\pi\text{i}}$ 给出 -1，从而得到从计数或基数产生的算术系统的基本单位！)

显然，由 $|e^{\text{i}\arg z}| = 1$ 和欧拉方程可得下面通常的三角函数表示式：

$$\cos\theta = \text{Re}\, e^{\text{i}\theta} = \frac{e^{\text{i}\theta} + e^{-\text{i}\theta}}{2}, \tag{11}$$

$$\sin\theta = \text{Im}\, e^{\text{i}\theta} = \frac{e^{\text{i}\theta} - e^{-\text{i}\theta}}{2\text{i}}. \tag{12}$$

28

这样，由 1.3 节中导出的复数乘法和除法的法则，在极形式下可以找到非常简单的表示：

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{\text{i}\theta_1})(r_2 e^{\text{i}\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{\text{i}(\theta_1 + \theta_2)}, \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{\text{i}\theta_1}}{r_2 e^{\text{i}\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{\text{i}(\theta_1 - \theta_2)}, \tag{14}$$

并且，复数 $z = re^{\text{i}\theta}$ 的共轭可通过改变指数 i 的符号表示为

$$\bar{z} = re^{-\text{i}\theta}. \tag{15}$$

例 2　计算(a) $(1+\text{i})/(\sqrt{3}-\text{i})$ 和(b) $(1+\text{i})^{24}$.

解　(a)这个商曾在 1.3 节的例 1.11 中应用 cis 算子得到计算结果；下面应用指数形式把结果写出来. 由于

$$1 + \text{i} = \sqrt{2}\text{cis}(\pi/4) = \sqrt{2}e^{\text{i}\pi/4}, \quad \sqrt{3} - \text{i} = 2\text{cis}(-\pi/6) = 2e^{-\text{i}\pi/6},$$

从而

$$\frac{1+\text{i}}{\sqrt{3}-\text{i}} = \frac{\sqrt{2}e^{\text{i}\pi/4}}{2e^{-\text{i}\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\text{i}5\pi/12}.$$

(b)指数形式为

$$(1+\text{i})^{24} = (\sqrt{2}e^{\text{i}\pi/4})^{24} = (\sqrt{2})^{24} e^{\text{i}24\pi/4} = 2^{12} e^{\text{i}6\pi} = 2^{12}. \qquad \blacksquare$$

在例 2(b)的解中，我们略去了恒等式 $(e^{\text{i}\pi/4})^{24} = e^{\text{i}24\pi/4}$ 成立的理由. 实际上，通过认真仔细的考察，我们有下面例子中描述的一个涉及三角函数的非常有用的公式.

例 3　证明棣莫弗(De Moivre)公式[㊀]：

$$\boxed{(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \text{i}\sin n\theta, \quad n = 1,2,3,\cdots.} \tag{16}$$

㊀ 棣莫弗(Abraham De Moivre)于 1707 年发表.

证　由乘法性质及方程(1)，

$$(e^{i\theta})^n = \underbrace{e^{i\theta}e^{i\theta}\cdots e^{i\theta}}_{n次} = e^{i\theta+i\theta+\cdots+i\theta} = e^{in\theta}.$$

把欧拉方程(7)代入这个等式的最左端和最右端，即可得到(16)式. ■

棣莫弗公式对于推导倍角三角恒等式是一个方便的工具，下面的例子将说明这一点.（也可见习题 12 和 20.）

29

例 4　把 $\cos 3\theta$ 用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 来表示.

解　由方程(16)（这里 $n=3$）有

$$\cos 3\theta = \mathrm{Re}(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \mathrm{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^3. \tag{17}$$

依照二项式公式，

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

从而，在(17)式中取 $a=\cos\theta$，$b=i\sin\theta$，有

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \mathrm{Re}[\cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(-\sin^2\theta) - i\sin^3\theta] \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{18}$$

■

例 5　应用表示式(11)和二项式公式（见练习 1.1 习题 27），计算积分

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta.$$

解　把被积函数表示为

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4,$$

由二项式公式展开

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \frac{1}{2^4}(e^{4i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{2^4}(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}) \\ &= \frac{1}{2^4}(6 + 8\cos 2\theta + 2\cos 4\theta).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2^4}(6+8\cos 2\theta + 2\cos 4\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2^4}\left[6\theta + 4\sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{6}{2^4}2\pi = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

■

30

练习 1.4

在习题 1 和习题 2 中，把给出的每个复数写成 $a+bi$ 的形式.

1. (a) $e^{-i\pi/4}$　　(b) $\dfrac{e^{1+i3\pi}}{e^{-1+i\pi/2}}$　　(c) e^{e^i}

2. (a) $\dfrac{e^{3i}-e^{-3i}}{2i}$　　(b) $2e^{3+i\pi/6}$　　(c) e^z，其中 $z=4e^{i\pi/3}$

在习题 3 和习题 4 中，把给出的每个复数写成极形式 $re^{i\theta}$.

3. (a) $\dfrac{1-i}{3}$ (b) $-8\pi(1+\sqrt{3}i)$ (c) $(1+i)^6$

4. (a) $\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^3$ (b) $\dfrac{2+2i}{-\sqrt{3}+i}$ (c) $\dfrac{2i}{3e^{4+i}}$

5. 证明：$|e^{x+iy}|=e^x$ 及 $\arg e^{x+iy}=y+2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

6. 对于实数 θ，证明：

(a) $\tan\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$ (b) $\csc\theta=\dfrac{2}{e^{i(\theta-\pi/2)}-e^{-i(\theta+\pi/2)}}$

7. 证明：对于所有的 z，有 $e^z=e^{z+2\pi i}$.（指数函数是以 $2\pi i$ 为周期的函数.）

8. 对于所有的 z，证明：

(a) $e^{z+\pi i}=-e^z$ (b) $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$

9. 对于任意整数 n，证明：$(e^z)^n=e^{nz}$.

10. 如果 $\mathrm{Re}z\leqslant0$，证明：$|e^z|\leqslant1$.

11. 确定下面哪些实指数函数的性质对于复指数函数仍然成立(即在下面各题中哪些用 z 来替换 x 后仍成立).

(a) e^x 永不为零. (b) e^x 是一一的函数.

(c) e^x 对所有的 x 有定义. (d) $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$.

12. 应用棣莫弗公式和二项式公式推导下列恒等式：

(a) $\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

(b) $\sin4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

13. 应用公式(11)和(12)验证下列三角恒等式.

(a) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(b) $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

31

14. 棣莫弗公式对于负整数 n 成立吗?

15. (a) 由定义 5 推导乘法法则(1).

(b) 由定义 5 推导除法法则(9).

16. 设 $z=re^{i\theta}(z\neq0)$. 证明 $\exp(\ln r+i\theta)=z$. ○

17. 说明函数 $z(t)=e^{it}$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$，(当 t 从 0 增到 2π 时)按逆时针方向画出单位圆 $|z|=1$. 画出下列函数所表示的曲线.

(a) $z(t)=3e^{it}$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$ (b) $z(t)=2e^{it}+i$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$

(c) $z(t)=2e^{i2\pi t}$，$0\leqslant t\leqslant1/2$ (d) $z(t)=3e^{-it}+2-i$，$0\leqslant t\leqslant2\pi$

18. 当 $0\leqslant t\leqslant2\pi$ 时，描绘下列各函数的曲线：

(a) $z(t)=e^{(1+i)t}$ (b) $z(t)=e^{(1-i)t}$

(c) $z(t)=e^{(-1+i)t}$ (d) $z(t)=e^{(-1-i)t}$

19. 设 n 是一个大于 2 的正整数. 证明：点 $e^{2\pi ik/n}(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 为一正多边形的顶点.

20. 如果 $z\neq1$，证明

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

应用这个结果和棣莫弗公式证实下列恒等式.

(a) $1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin(\theta/2)}$.

○ 为了印刷上的方便，有时 e^z 用 $\exp(z)$ 来代替.

(b) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{\sin(n\theta/2)\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)}$，其中 $0<\theta<2\pi$.

21. 如果 n 是一个正整数，证明：

$$\left|\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|\leqslant n \quad (\theta\neq 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\cdots).$$

[提示：首先证明若 $z=e^{i\theta}$，则左边等于 $|(1-z^n)/(1-z)|$.]

22. 如果 n 是一个正整数，证明：

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)d\theta+i\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)d\theta=\begin{cases}2\pi & 如果\ n=0,\\ 0 & 如果\ n\neq 0.\end{cases}$$

23. 应用公式(11)或公式(12)与二项式公式，计算下列积分：

32

(a) $\int_0^{2\pi}\cos^8\theta d\theta$　　(b) $\int_0^{2\pi}\sin^6(2\theta)d\theta$

1.5 幂与根

在这一节将推导复数的 n 次幂和 m 次根的公式.

设 $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是复数 z 的极形式. 在 1.4 节的公式(13)中取 $z_1=z_2=z$，得到

$$z^2=r^2e^{i2\theta}.$$

由于 $z^3=zz^2$，再次应用恒等式可推出

$$z^3=r^3e^{i3\theta}.$$

以这种方法继续下去，可得 z 的 n 次幂的公式：

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta). \tag{1}$$

显然，这是 1.4 节例 3 中棣莫弗公式的一个推广.

式(1)是一个计算复数正整数次幂的有趣公式. 容易看出，它对于负整数 n 也是成立的(参见习题 2). 这个问题的起因是对于 $n=1/m$ 该公式是否也是成立的，而 z 的 m 次方根 $\zeta=z^{1/m}$满足下式：

$$\zeta^m=z. \tag{2}$$

所以，如果定义

$$\zeta=\sqrt[m]{r}e^{i\theta/m} \tag{3}$$

(这里$\sqrt[m]{r}$定义为通常的、正的 m 次根)，则求一个复数 ζ 满足公式(2)(应用公式(1)即可得). 但是这个方法比直接应用公式(2)更加复杂. 例如，数 1 有两个平方根：1 和 -1. 1 和 -1 中的每一个各有两个平方根，这样，产生了 1 的四次方根：1，-1，i，$-$i.

为了弄清楚这些根哪些是合适的，应用 $\zeta^4=1$ 的幂对 1，-1，i，$-$i 中的每一个数进行计算，得到

$$\begin{aligned}1^4&=(1e^{i0})^4=1^4e^{i0}=1,\\ i^4&=(1e^{i\pi/2})^4=1^4e^{i2\pi}=1,\\ (-1)^4&=(1e^{i\pi})^4=1^4e^{i4\pi}=1,\\ (-i)^4&=(1e^{i3\pi/2})^4=1^4e^{i6\pi}=1.\end{aligned}$$

这对于在阿干特图(两垂直轴，一为实数轴，一为虚数轴)中弄清楚这些根的连续次幂是很有用的. 图 1-16 说明，i，i^2，i^3 和 i^4 在到达 1 之前都要完成一个旋转；(-1)，$(-1)^2$，$(-1)^3$

和$(-1)^4$转二周；$(-i)$的幂逆时针转 3 周，当然 1，1^2，1^3 和 1^4 不动. [33]

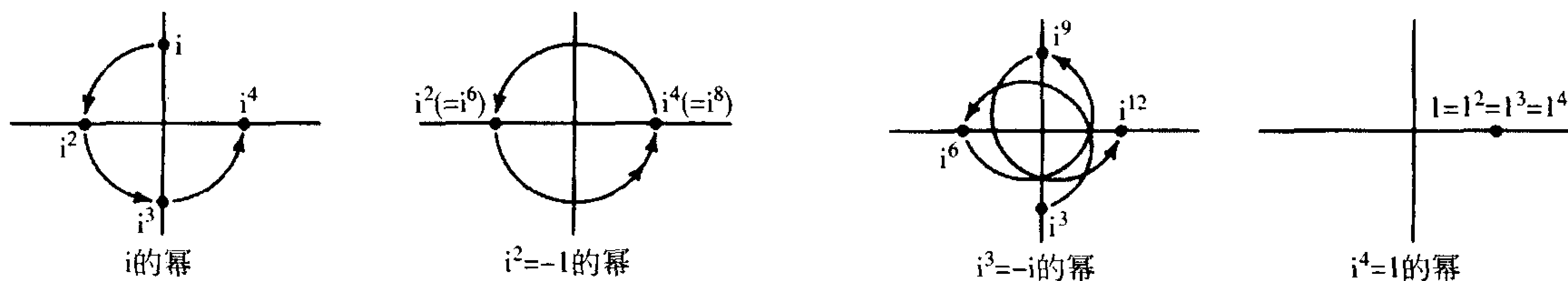


图 1-16　四次单位根的连续幂

显然，根的重数以极形式(如 e^{i0}，$e^{i2\pi}$，$e^{i4\pi}$等)来描述 1 时是不确定的. 这样，为了计算数 z 的所有 m 次根，必须把公式(3)应用到 z 的任何极表示. 例如，对于单位立方根，可以通过像查表那样算出来. 因为只要 $m_1-m_2=3$，就有 $e^{i2\pi m_1/3}=e^{i2\pi m_2/3}$，显然，这些根出现在三个集合内.

单位立方根

1 的极表示	(3)的应用
⋮	⋮
$1=e^{-i6\pi}$	$1^{1/3}=e^{-i6\pi/3}=1$
$1=e^{-i4\pi}$	$1^{1/3}=e^{-i4\pi/3}=-(1/2)+i(\sqrt{3}/2)$
$1=e^{-i2\pi}$	$1^{1/3}=e^{-i2\pi/3}=-(1/2)-i(\sqrt{3}/2)$
$1=e^{i0}$	$1^{1/3}=e^{i0/3}=1$
$1=e^{i2\pi}$	$1^{1/3}=e^{i2\pi/3}=-(1/2)+i(\sqrt{3}/2)$
$1=e^{i4\pi}$	$1^{1/3}=e^{i4\pi/3}=-(1/2)-i(\sqrt{3}/2)$
$1=e^{i6\pi}$	$1^{1/3}=e^{i6\pi/3}=1$
⋮	⋮

一般来讲，1 正好有 m 个不同的 m 次单位根，记为 $1^{1/m}$，它们由下式给出：

$$\boxed{1^{1/m}=e^{i2k\pi/m}=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\quad(k=0,1,2,\cdots,m-1).}\tag{4}$$

这些根的辐角相差 $2\pi/m$ 弧度，它们自身是一个正多边形的顶点(见图 1-17).

在公式(4)中取 $k=1$，得到根[⊖]

$$\omega_m:=e^{i2\pi/m}=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},$$

显然，这些根的全部集合为

$$1,\omega_m,\omega_m^2,\cdots,\omega_m^{m-1}.$$

[34]

例 1　证明：

$$1+\omega_m+\omega_m^2+\cdots+\omega_m^{m-1}=0.\tag{5}$$

⊖ 如果 $\omega^m=1$ 而 $\omega^k\neq1(k=1,2,\cdots,m-1)$，则数 ω 称为 m 次单位原根. 显然，ω_m 是一个原根.

证 从物理学的观点来看，结论是显然的. 因为由对称性，位于 m 次单位根的 m 单位质点系统的质点中心 $(1+\omega_m+\omega_m^2+\cdots+\omega_m^{m-1})/m$ 必在原点(见图 1-17).

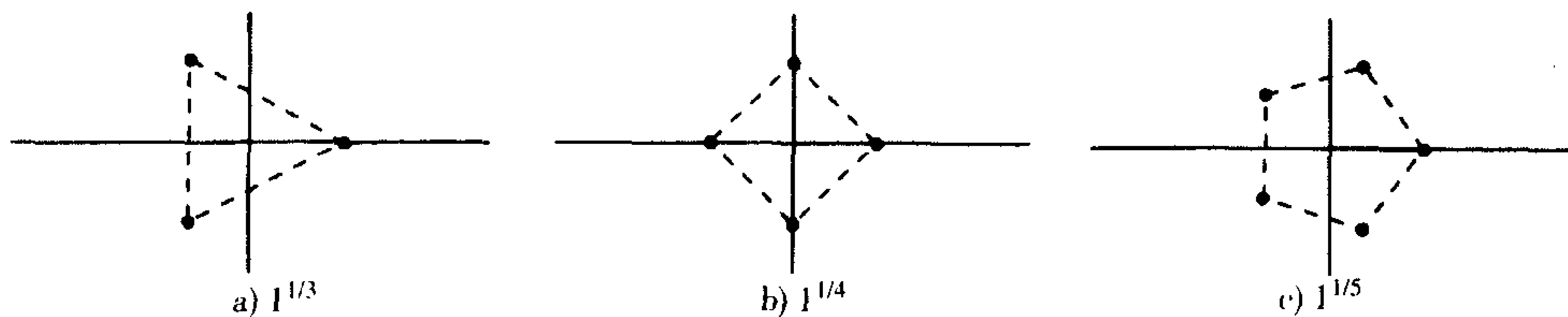


图 1-17 单位根为顶点的正多边形

下面用代数的方法证明它. 注意到

$$(\omega_m-1)(1+\omega_m+\omega_m^2+\cdots+\omega_m^{m-1})=\omega_m^m-1=0.$$

因 $\omega_m\neq 1$，式(5)获证. ■

对于任意的(非零)复数 $z=re^{i\theta}$，应用类似于推导公式(4)的方法，可得 z 的 m 个互异的 m 次根如下：

$$z^{1/m}=\sqrt[m]{|z|}e^{i(\theta+2k\pi)/m}\quad(k=0,1,2,\cdots,m-1).\tag{6}$$

同样，从这些根中任取一个，譬如像式(3)给出的那样，然后和 m 次单位根逐个相乘，也能得到这些根.

例 2 求出 $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ 的所有立方根.

解 $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ 的极形式为

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2e^{i\pi/4}.$$

把 $|z|=2$，$\theta=\pi/4$ 以及 $m=3$ 代入公式(6)，得到

$$(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{1/3}=\sqrt[3]{2}e^{i(\pi/12+2k\pi/3)}\quad(k=0,1,2).$$

因此，$\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ 的三个立方根是 $\sqrt[3]{2}(\cos\pi/12+i\sin\pi/12)$，$\sqrt[3]{2}(\cos3\pi/4+i\sin3\pi/4)$ 和 $\sqrt[3]{2}(\cos17\pi/12+i\sin17\pi/12)$. ■

例 3 设 a，b 和 c 是复常数，且 $a\neq0$. 证明：方程

$$az^2+bz+c=0\tag{7}$$

的解由(通常的)二次公式

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\tag{8}$$

35 ~ 36

给出，其中 $\sqrt{b^2-4ac}$ 表示 $(b^2-4ac)^{1/2}$ 的值之一.

解 用 $4a$ 去乘式(7)的两端后，可以把它变形为

$$4a^2z^2+4abz+b^2=b^2-4ac.$$

上式的左端为 $(2az+b)^2$，所以

$$2az+b=(b^2-4ac)^{1/2}=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

解出 z，即为(8)式. ■

练习 1.5

1. 应用归纳法证明恒等式(1).
2. 证明公式(1)对于负整数 n 也成立.
3. 设 n 是一个正整数. 对于 $z\neq 0$, 证明:
$$\arg z^n = n\operatorname{Arg} z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$
4. 应用恒等式(1)证明下列等式.
(a) $(\sqrt{3}-i)^7 = -64\sqrt{3} + i64$　　(b) $(1+i)^{95} = 2^{47}(1-i)$
5. 求出下面各式的全部值.
(a) $(-16)^{1/4}$　　(b) $1^{1/5}$　　(c) $i^{1/4}$
(d) $(1-\sqrt{3}i)^{1/3}$　　(e) $(i-1)^{1/2}$　　(f) $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^{1/6}$
6. 描述如何画出下列 z_0 的 5 次根的几何图形.
(a) $z_0 = -1$　　(b) $z_0 = i$　　(c) $z_0 = 1+i$
7. 解下列方程.
(a) $2z^2 + z + 3 = 0$
(b) $z^2 - (3-2i)z + 1 - 3i = 0$
(c) $z^2 - 2z + i = 0$
8. 设 a, b 和 c 是实数, 并且 $a\neq 0$. 证明: 方程 $az^2 + bz + c = 0$ 有如下结论:
(a) 如果 $b^2 - 4ac > 0$, 有两个实数解.
(b) 如果 $b^2 - 4ac < 0$, 有两个非实数共轭解.
9. 解方程 $z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0$.
10. 求出方程 $z^4 + 1 = 0$ 的所有 4 次根, 然后应用它们导出因子分解 $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$.
11. 解方程 $(z+1)^5 = z^5$.　　37
12. 证明: n 个点 $z_0^{1/n}$ 构成以原点为心、$\sqrt[n]{|z_0|}$ 为半径的圆内接正 n 边形的顶点.
13. 证明: $\omega_3 = (-1+\sqrt{3}i)/2$ 和 $\omega_4 = i$. 应用这些值验证恒等式(5)在 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形.
14. 设 m 和 n 是两个互质的正整数. 证明: 数集 $(z^{1/n})^m$ 与 $(z^m)^{1/n}$ 相同. 用 $z^{m/n}$ 表示由 $(z^{1/n})^m$ 与 $(z^m)^{1/n}$ 的共同元素组成的集合, 对于 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$, 证明:
$$z^{m/n} = \sqrt[n]{|z|^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right]. \tag{9}$$
15. 用习题 14 的结论求 $(1-i)^{3/2}$ 的所有值.
16. 证明: 方程 $(z+1)^{100} = (z-1)^{100}$ 的任何解的实部必是零.
17. 设 m 是一个固定的正整数, l 是一个不能被 m 整除的整数. 证明: 公式(5)可一般化为
$$1 + \omega_m^l + \omega_m^{2l} + \cdots + \omega_m^{(m-1)l} = 0.$$
18. 证明: 如果 α 与 β 分别是 n 次和 m 次单位根, 那么对于某个整数 k, $\alpha\beta$ 是一个 k 次单位根.
19. (电场)一个在 z_0 点垂直于 z 平面的无穷长均匀带电棒在平面上任一点形成一个电场. 场强的变化与从 z_0 到这点的距离成反比, 其方向为从 z_0 到这点的直线的方向.
(a) 证明: 在点 z 的(向量)场以合适的单位由函数 $F(z) = 1/(\bar{z} - \overline{z_0})$ 给出. (见 1.3 节, 图 1-13.)
(b) 如果有这样的三个棒分别位于点 $1+i$, $-1+i$ 和 0, 求出平衡点(即在这个点上, 场向量和为 0).
20. 写出解二次方程
$$az^2 + bz + c = 0, \quad a\neq 0$$
的计算机程序. 输入 a, b, c 的实部和虚部, 以直角坐标和极坐标形式打印出方程的解.

21. 某些复整数平方根可以通过多项式因子分解得到. 例如，如果 $3+4i$ 等于 $(a+bi)^2$，那么 $4=2ab$，$3=a^2-b^2$. 通过试验得到答案 $a=2$，$b=1$；$-2-i$ 是另一个方根. 应用这一方法求下列各数的平方根.

(a) $8+6i$　　(b) $5+12i$　　(c) $24+10i$

38

(d) $3-4i$　　(e) $-8+6i$　　(f) $8-6i$

1.6 平面集

在一元实函数微积分中，主要定理中涉及的函数一般都定义在一个(开的或闭的)区间上. 对于单复变函数来说，它的基本结果由定义在2维“区域”或“闭区域”上的函数来表达. 在本节中，我们将给出这些点集的准确定义，为此，先从复平面上“邻域”的概念开始.

设 ρ 是一个正实数，由不等式

$$|z-z_0|<\rho$$

确定的点的集合称为*开圆盘*或 z_0 的*圆邻域*. 这个集合由以 z_0 为心，ρ 为半径的圆内的点组成. 特别地，下面的不等式

$$|z-2|<3,\quad |z+i|<\frac{1}{2},\quad |z|<8$$

分别表示点 2，$-i$ 和 0 的圆邻域. $|z|<1$ 是一个经常提到的邻域，称为*开单位圆盘*.

设 z_0 是集合 S 的一个点，如果存在 z_0 的某个圆邻域完全包含于 S，则称 z_0 为 S 的*内点*. 例如，设 S 是右半平面 $\operatorname{Re}z>0$，$z_0=0.01$，由于 S 包含邻域 $|z-z_0|<0.01$(见图1-18)，因此 z_0 是 S 的一个内点.

如果集合 S 的任一点都是 S 的内点，我们称 S 是一个*开集*. 任何开圆盘都是一个开集(习题1). 如图1-19所示，由不等式(a) $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$，(b) $|z-3|>2$，(c) $\operatorname{Im}z>0$ 和(d) $1<\operatorname{Re}z<2$ 表示的集合都是开集.

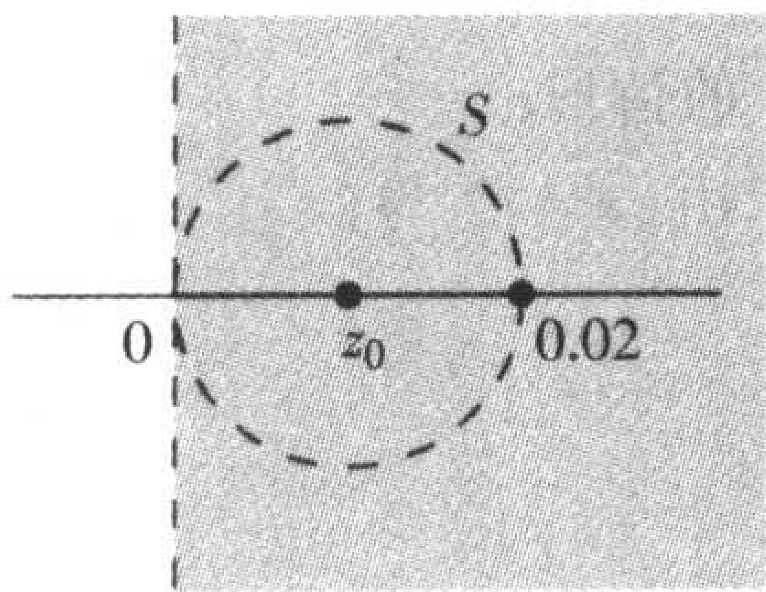


图 1-18　内点

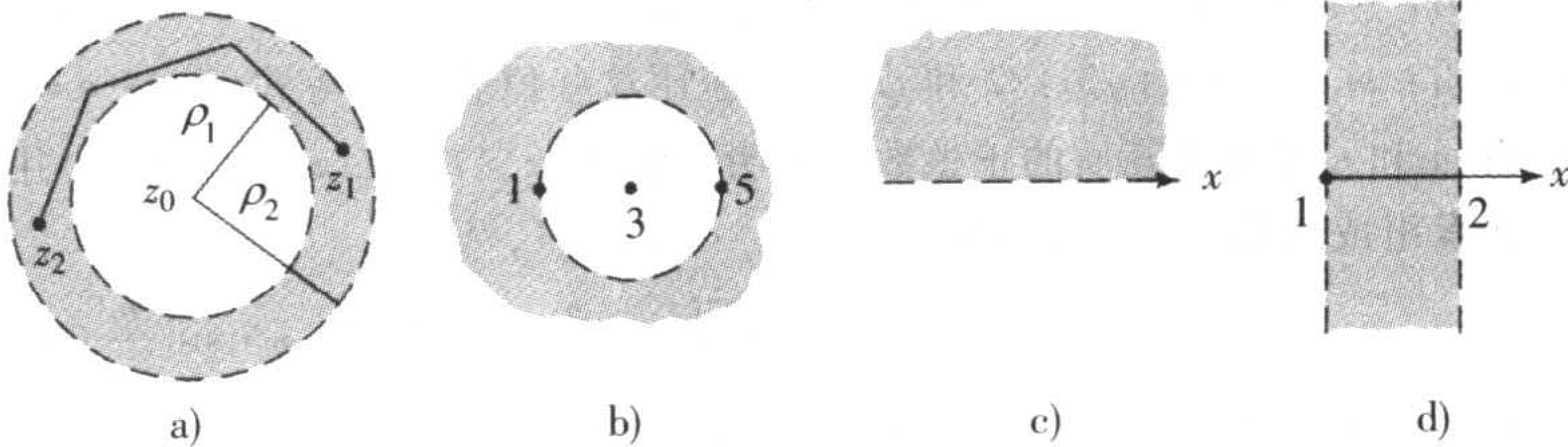


图 1-19　开集

注意，由于圆周 $|z-3|=2$ 上的点都不是由不等式 $|z-3|\geq 2$ 表示的集合 T 的内点，所以，T 不是开集；由于实轴上的开区间不含开圆盘，所以它也不是开集.

设 $w_1, w_2, \cdots, w_{n+1}$ 是平面上的 $n+1$ 个点. 把连结 w_k 和 w_{k+1} $(k=1,2,\cdots,n)$ 的线段记为 l_k，那么线段 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 组成了一条连续链，即连结 w_1 到 w_{n+1} 的*折线*.

39

如果开集 S 内的任意一对点 z_1，z_2 都能被含于 S 内的折线连接起来，则称 S 是*连通的*[见图1-19a]. 粗略地说，S 是由一张“单片”组成. 图1-19中表示的每个集合都是连通的. 开集不一定是连通的. 例如，平面上除去圆周 $|z|=1$ 后的点集是开集但不是连通的. 这是由于如果 z_1 是圆内的点，z_2 是圆外的点，那么，任何一条连接 z_1 和 z_2 的折线必与这个圆相交.

我们把连通的开集称为区域. 因此，图 1-19 中的所有集合都是区域.

在一元实函数微积分中，一个大家有用而熟悉的结论是：在一个区间内，导数都是零的函数恒等于常数. 现在把这个结果推广到两个实变量函数的情形，由下面的定理可以看出区域概念的重要性.

定理 1　设 $u(x, y)$ 是定义在区域 D 内的一个实值函数，如果对于 D 内的任意点，u 的一阶偏导数满足：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1}$$

则在 D 内 $u\equiv$ 常数.

证　由条件 $\partial u/\partial x=0$ 知，u 在区域 D 内的任何水平线段上都是一个常数；在这条水平线段上，u 是一个导数为零的单变量(也就是 x)的函数. 类似地，由条件 $\partial u/\partial y=0$ 知，u 在区域 D 内的任何垂直线段上也是一个常数. 由此，u 在区域 D 内任何平行于坐标轴的线段组成的折线上保持不变. 由 D 的连通性，D 内的任何两个点都能用完全含于 D 内的折线连接起来. 这条折线中可能存在一些线段既不是水平的又不是垂直的. 但是，从拓扑上考虑(见习题 22)，任何这样的线段都能由含于区域 D 内的一个小的水平和垂直线段链去代替(见图 1-20). 这样，定理 1 成立. ■

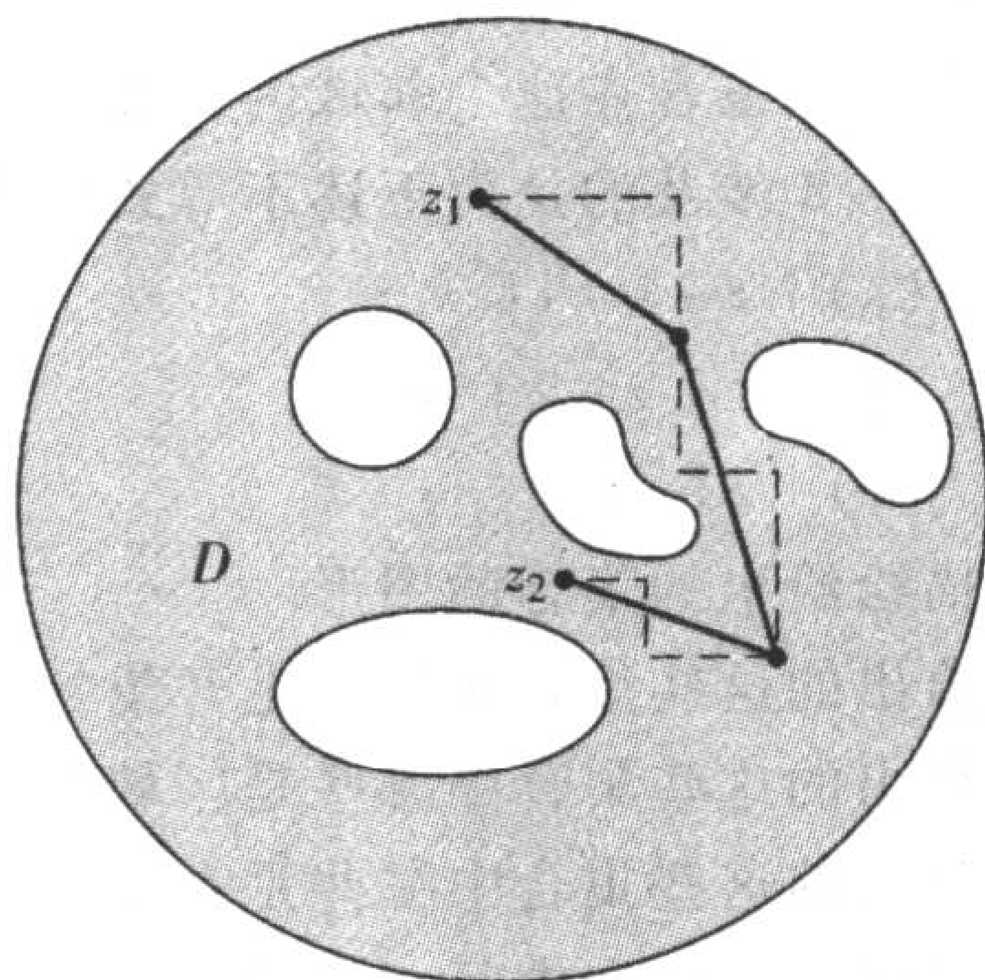


图 1-20　由垂直和水平线段组成的折线

40

对于定理 1 的证明，不喜欢用这种拓扑的观点讨论的读者可通过链式法则给出该定理的另一证法(见习题 24).

对于定理 1 来说，起决定作用的是区域的连通性. 事实上，如果仅仅假定区域 D 是一个开集，则定理不再成立. 例如，“分段常值”函数满足定理中的假设(见习题 19).

例 1　实值函数 $u(x, y)$ 在开单位圆盘 $D=\{z: |z|<1\}$ 内的每一点满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3 \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=6, \tag{2}$$

证明 $u(x, y)=3x+6y+c$，其中 c 为某一常数.

证　取 $v(x, y)=3x+6y$，考虑函数 $w(x, y):=u(x, y)-v(x, y)$. 由(2)和 $v(x, y)$ 的定义，对于 D 内任一点，有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=3-3=0 \quad 和 \quad \frac{\partial w}{\partial y}=6-6=0.$$

由于 D 是区域，由定理 1，$w(x, y)$ 在 D 内为常数，比如 $w(x, y)=c$. 从而，$u(x, y)=v(x, y)+w(x, y)=v(x, y)+c$，这就是所求的 u 的表达式. ■

41

下面继续平面点集的讨论. 如果在点 z_0 的任意邻域内至少含有集合 S 内的一个点和 S 外的一个点，则称 z_0 为 S 的边界点. S 的边界点的全体称为 S 的边界或边境. 图 1-19 中集合的边界为：(a)两个圆周 $|z-z_0|=\rho_1$ 和 $|z-z_0|=\rho_2$，(b)圆周 $|z-3|=2$，(c)实轴，(d)两直线 $\mathrm{Re}z=1$ 和 $\mathrm{Re}z=2$. 因为区域 D 的每一点都是它的内点，所以区域不包含它的边界点.

设 S 是一个平面点集. 如果 S 包含它的全部边界点，则称 S 为闭集. (由习题13，读者可证明 S 是闭集等价于它的补集 $\mathbf{C}\setminus S$ 是开集.) 由于不等式 $0<|z|\leq 1$ 表示的集合不含零点，所以它不是闭集. 由不等式

$$|z-z_0|\leq\rho \quad (\rho>0)$$

表示的 z 的点集中，因为包含它的边界 $|z-z_0|=\rho$，所以它是一个闭集. 因此称这个集合为闭圆盘.

如果存在一个正实数 R，对于 S 中的任一点 z，使得 $|z|<R$，则称 S 为有界集. 换句话说，如果 S 含在原点的某个邻域内，则 S 为有界的. 不是有界的集称为无界集. 在图 1-19 中，只有(a)是有界的. 一个闭的且有界的集称为紧集.

一个区域自身，或者加上它的部分或全部边界点形成的点集称为域. 特别地，任何区域都是域.

练习 1.6

1. 证明：邻域 $|z-z_0|<\rho$ 是开集. [提示：证明如果 z_1 是这个邻域内的点，那么满足不等式 $|z-z_1|<R$ 的所有点也含在这个邻域内，其中 $R=\rho-|z_1-z_0|$.]

习题2～8 涉及的是由下述不等式描述的集合.

(a) $|z-1+i|\leq 3$ (b) $|\text{Arg}z|<\pi/4$

(c) $0<|z-2|<3$ (d) $-1<\text{Im}z\leq 1$

(e) $|z|\geq 2$ (f) $(\text{Re}z)^2>1$

2. 描绘给出的集合的图形.

3. 给出的这些集合中哪些是开集?

4. 给出的这些集合中哪些是区域?

5. 给出的这些集合中哪些是有界的?

6. 画出这些集合中每一个的边界.

42

7. 给出的这些集合中哪些是域?

8. 给出的这些集合中哪些是闭域?

9. 证明有限多个点组成的任一集合是有界的.

10. 证明闭圆盘 $|z-z_0|\leq\rho$ 是有界的.

11. 设点集 S 由点 1，1/2，1/3，…组成，S 的边界是什么?

12. 设 z_0 是点集 S 的一个点. 证明：如果 z_0 不是 S 的一个内点，那么 z_0 必是 S 的一个边界点.

13. 设 S 是 $\mathbf{C}$ 的一个子集. 证明：S 是闭集的充分必要条件是它的补集 $\mathbf{C}\setminus S$ 是开集.

14. 如果 z_0 的任何邻域内都含有点集 S 的无穷多个点，则称 z_0 为 S 的聚点. 证明：闭域含有它的所有聚点.

习题 15～18 中，涉及如下定义：

设 S 和 T 是两个集合. 由 S 和 T 的所有点组成的集合称为 S 和 T 的并集，记为 $S\cup T$. 由属于 S 又同时属于 T 的所有点组成的点集称为 S 和 T 的交集，记为 $S\cap T$.

15. 设 S 和 T 是分别由 $|z+1|<2$ 和 $|z-i|<1$ 表示的集合. 画出集合 $S\cup T$ 与 $S\cap T$ 的图形.

16. 如果 S 和 T 是开集，证明 $S\cup T$ 也是开集.

17. 如果 S 和 T 是区域，$S\cap T$ 必然是区域吗?

18. 证明：如果 S 和 T 是至少有一个公共点的区域，那么 $S\cup T$ 也是一个区域.

19. 设

$$u(x,y):=\begin{cases}1 & 如果 \ |z|<1,\\ 0 & 如果 \ |z|>2.\end{cases}$$

证明：在开集 $D:=\{z: |z|<1\}\cup\{z: |z|>2\}$内，虽然$\partial u/\partial x=\partial u/\partial y=0$，但 u 在 D 内不是常数．为何这与定理 1 不矛盾？

20. 设 $u(x, y)$是定义在区域 D 内的一个实值函数．如果对 D 内的所有点，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,$$

证明：$u(x, y)=xy+c$，其中 c 为某一常数．

21. 设实值函数 $u(x, y)$对于环域 $A=\{z: 1<|z|<3\}$内的任一点满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2} \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

试确定 $u(x, y)$．

43

22. 设 D 是一个区域，l 是一条含于 D 内的闭线段．在基本拓扑学中可以证明，l 可以被有限个中心在 l 上的完全含于 D 内的开圆盘所覆盖．应用这个结论证明，区域 D 内的任意两个点可以被含于 D 内的所有平行于坐标轴的线段组成的折线连接．

23. “连通”的概念也可应用到闭集．我们说一个闭集 $S\subset \mathbf{C}$ 是*连通的*，是指它不能被写成两个非空的不相交闭集的并集．一个闭的连通集称为*闭联集*．确定下列哪些集合是闭联集：

(a) $\{z: |z-3|=4\}$

(b) $\{z: |z|=1\}\cup\{z: |z|=3\}$

(c) $\{1, -1, \mathrm{i}\}$

(d) $\{z: |z-1|\geqslant 2\}$

24. 应用下列步骤证明定理 1：

(a) 证明任何线段都能由参数方程

$$x=at+b, \quad y=ct+d$$

表示，其中 a，b，c 和 d 是实常数，$t\in[0 \quad 1]$．因此，u 沿着 D 内线段的值为

$$U(t):=u(at+b, ct+d), \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

(b) 应用定理 1 的假设(1)和链式法则证明：对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，有 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t=0$；从而在 D 内任何线段上，u 是一个常数．

(c) 由连通的定义，对于 D 内任何两个点，证明 u 必有同样的值．

1.7　黎曼球面与球极射影

数百年来，地图绘图员一直努力解决如何把像球一样的地球表面绘制在一张纸上的问题，为此产生了一系列有用的射影方法．在这一节，我们将介绍一种把球面上的点用复平面上的点来描述的方法，即所谓的*球极射影*．这种射影不仅可以用于地图册的绘制，它在复变理论上也是相当重要的．

为了对球极射影进行刻画，我们考虑三维空间(x_1, x_2, x_3)中的单位球面，它的方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.$$

这个球面和它的赤道平面的图形由图 1-21 所示．

44

我们的目的是建立赤道平面上的每一点 z 与球面上的一个唯一点 Z 的联系．为此，通过球面的北极$N=(0, 0, 1)$与 x_1x_2 平面上给定的点 z 做一条直线，如图 1-21 所示．该直线穿过球面时，恰好与球面上的一个点 Z 相交，这时球面上的点 Z 称为赤道平面上点 z 的球极射影．

如果把赤道平面看作复平面(或 z 平面)，则称单位球面是黎曼球面[1].

下面进一步进行黎曼球面的地理学解释. 我们注意到，在球极射影下，单位圆周 $|z|=1$ (在 z 平面上)上的点保持不变(即 $z=Z$)，它们构成了赤道. 把单位圆周外部的点(即满足 $|z|>1$的点)映射到北半球，而单位圆周内部的点(即满足 $|z|<1$ 的点)映射到南半球. 特别地，把 z 平面的原点映射到黎曼球面的南极.

图 1-22 显示了球极射影的另外一些特征. 球面上的纬线(平行于赤道)是 z 平面上以原点为心的圆周在黎曼球面上的射影；北极圈和北回归线是半径大于 1 的圆周的射影，南极圈和南回归线是半径小于 1 的圆周的射影. 球面上的温带是 z 平面上中心在原点的环(垫圈)的射影. 在 z 平面上通过原点的直线映射到黎曼球面上的经线(即经过两极的大圆). (如果我们设想正 y 轴的射影为通过英国格林威治的本初子午线，那么负 y 轴映射为国际日期变更线，它刚好围绕地球一半.)[2]

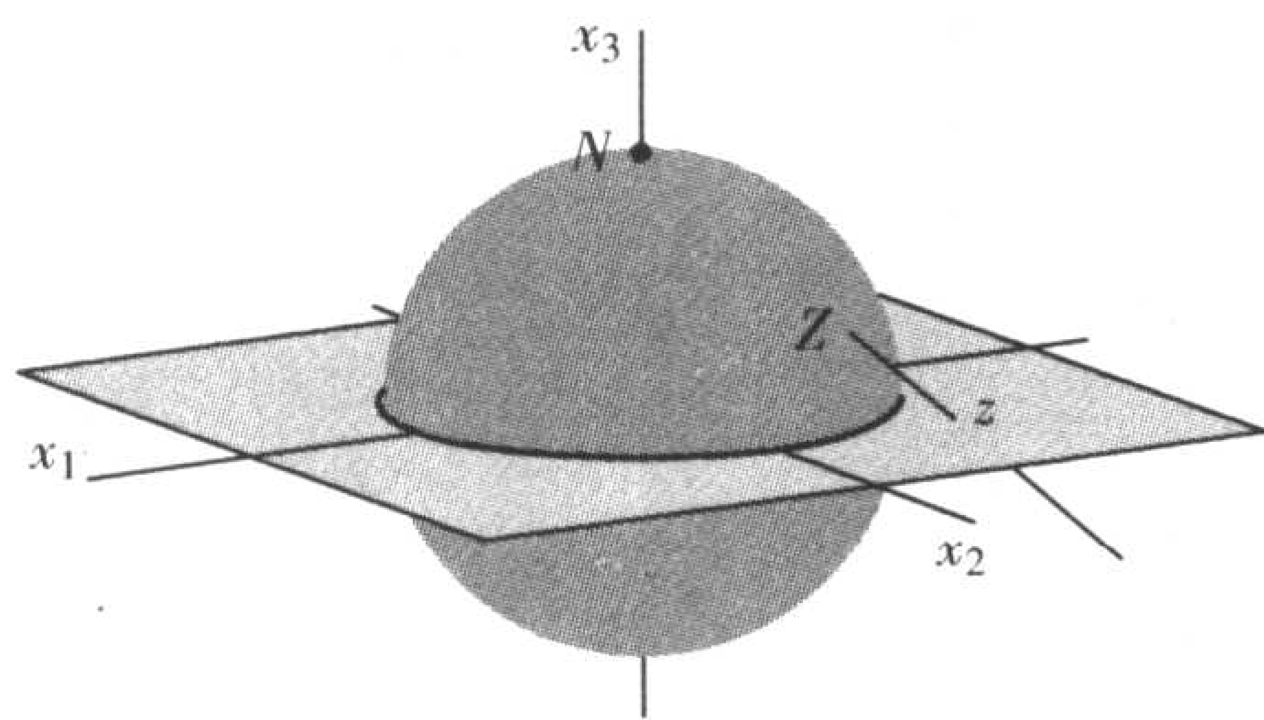


图 1-21　黎曼球面

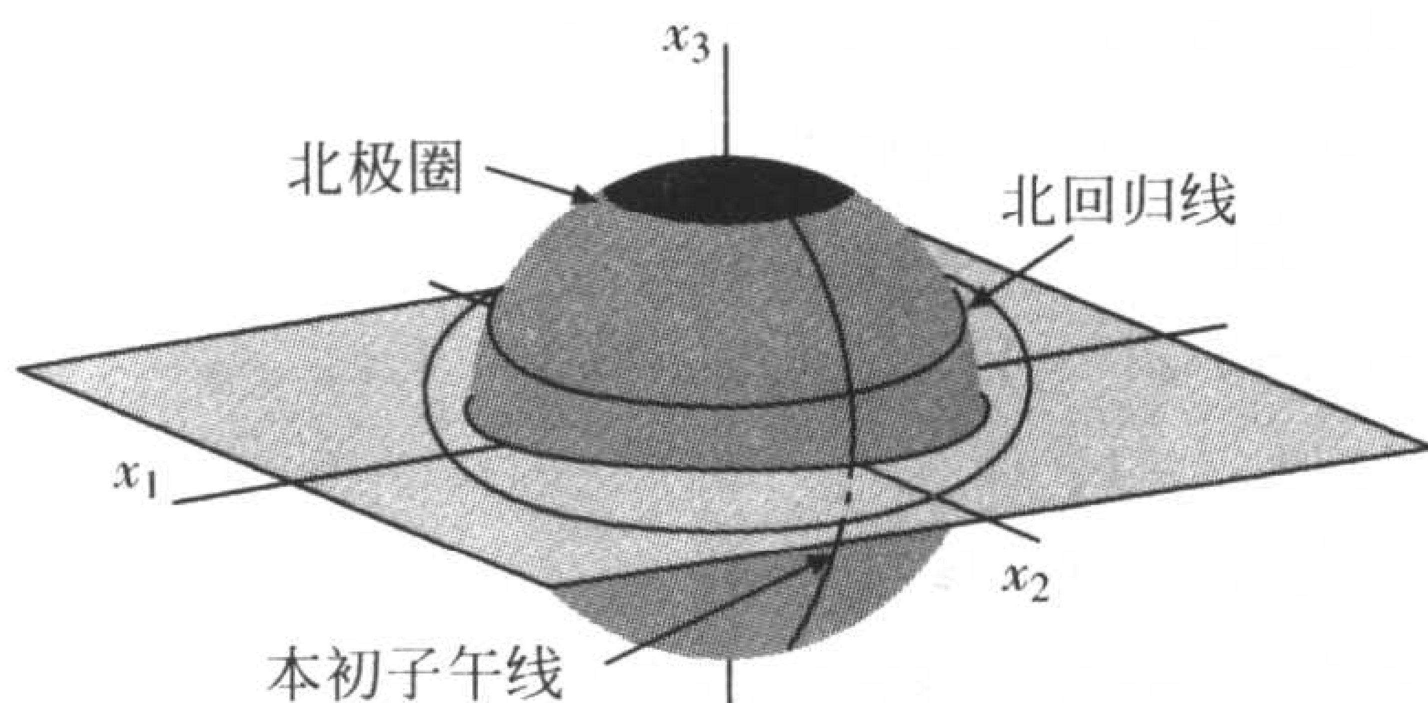


图 1-22　黎曼地圈

球极射影保持曲线交叉处的角度不变：在 z 平面上，以原点为心的圆周与经过原点的直线正交，则在球面上经线与纬线正交. 这不仅仅是一种巧合，而是球极射影的一个很好的性质，即保角性——这对于分析映像非常有用.

为了使 z 平面上的点与黎曼球面上的点之间的对应更加明确，需要对于球极射影建立一个公式.

例 1　如果 $Z=(x_1, x_2, x_3)$是复平面上点 $z=x+\mathrm{i}y$ 在黎曼球面上的射影，证明：

$$\boxed{x_1=\frac{2\mathrm{Re}z}{|z|^2+1},\quad x_2=\frac{2\mathrm{Im}z}{|z|^2+1},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.}\tag{1}$$

证　通过北极 $N=(0, 0, 1)$和点$(x, y, 0)$的直线的参数方程为

$$x_1=tx, x_2=ty, x_3=1-t, -\infty<t<\infty.\tag{2}$$

当 t 满足

$$1=x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2$$

或

[1] 黎曼(Bernhard Riemann, 1826—1866).

[2] 很多大学生洗衣服时会进行类似“球极射影”的动作. 他们把脏衣服扔到床单上，然后提起床单的四角并打结，形成一个要洗衣服的袋子. 床单相当于 z 平面，“袋子”相当于黎曼球面.

$$1 = t^2(x^2 + y^2 + 1) + 1 - 2t$$

时，这条直线正好穿过黎曼球面，此时根 t 应满足 $t=0$(北极)和

$$t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}. \tag{3}$$

45～46

把 t 的这个值代入(2)式即得公式(1). ■

例如，点 $z=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 与黎曼球面上的点 $Z=(2/5,\ 2\sqrt{3}/5,\ 3/5)$ 相对应.

反之，如果已知黎曼球面上的点(x_1, x_2, x_3)，由(2)式可得它在 z 平面上的对应点 $x+\mathrm{i}y$，这里

$$x = x_1/t, \quad y = x_2/t, \quad t = 1 - x_3.$$

消去 t 得到

$$\boxed{x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.} \tag{4}$$

我们看到 z 平面上以原点为心的圆周和通过圆心的直线通过球极射影可映射成黎曼球面上的纬度圆周或经度圆周. 但由公式(4)，我们可得到更加一般的结论.

例 2　证明：在球极射影下，z 平面上的所有直线和圆周对应于黎曼球面上的圆周(见图 1-23).

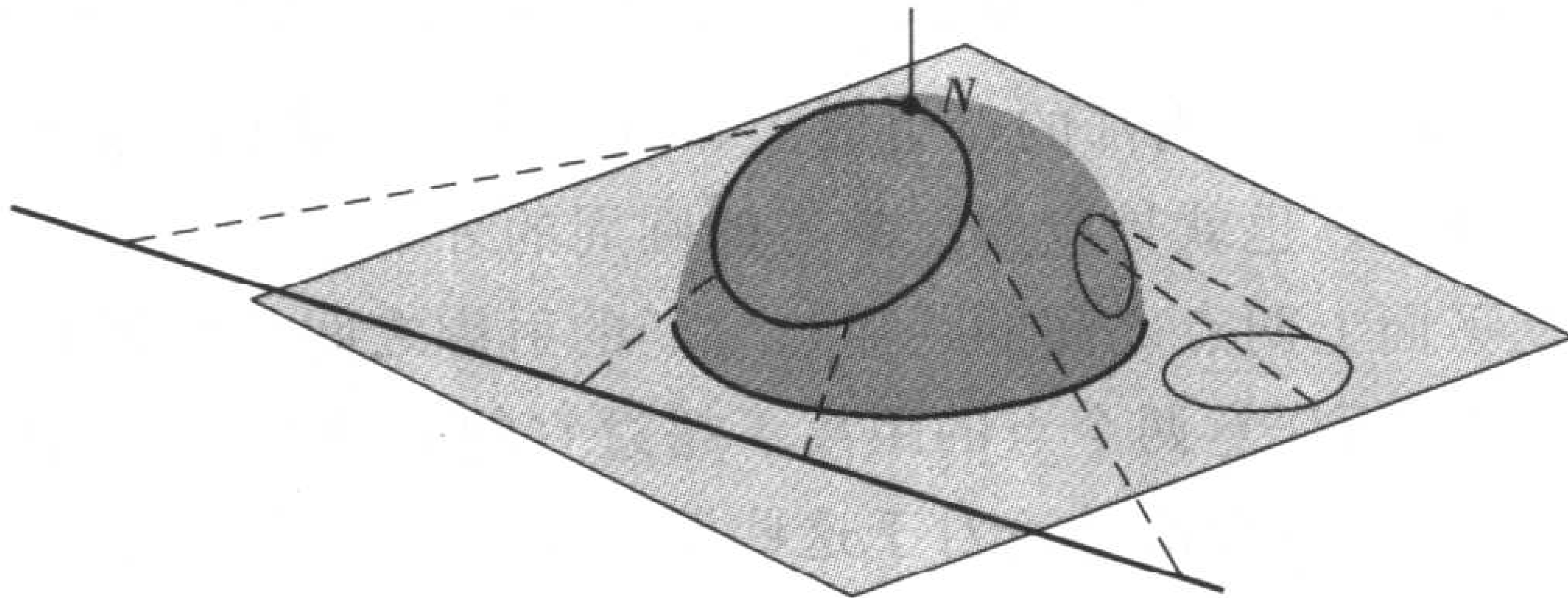


图 1-23　黎曼球面上的圆周

证　在 $z=x+\mathrm{i}y$ 平面上，圆周或直线的一般方程为

$$A(x^2 + y^2) + Cx + Dy + E = 0. \tag{5}$$

把(4)式代入(5)式，得

$$A\left[\left(\frac{x_1}{1 - x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1 - x_3}\right)^2\right] + \frac{Cx_1}{1 - x_3} + \frac{Dx_2}{1 - x_3} + E = 0,$$

化简后得

$$A(x_1^2 + x_2^2) + Cx_1(1 - x_3) + Dx_2(1 - x_3) + E(1 - x_3)^2 = 0.$$

注意到 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$，由上面的方程得

$$A(1 - x_3^2) + Cx_1(1 - x_3) + Dx_2(1 - x_3) + E(1 - x_3)^2 = 0,$$

47

上式两端同除于$(1 - x_3)$，得到

$$A(1 + x_3) + Cx_1 + Dx_2 + E(1 - x_3) = 0$$

或

$$Cx_1 + Dx_2 + (A - E)x_3 + A + E = 0. \tag{6}$$

而(6)式正好是三维空间中的一个平面方程．由此证明了 z 平面上直线或圆周的射影一定既在(6)式表示的平面上又在黎曼球面上．因此，平面和球面的交集是一个圆周． ■

反之，黎曼球面上的每一圆周是 z 平面上不是直线就是圆周的射影(见习题 10)．

在黎曼球面上，北极 $N=(0, 0, 1)$ 起什么作用呢？很显然，N 不可能是复平面上任何点的射影，这相当于在(4)式中排除了 $x_3=1$．但是，如果考虑复平面上模非常大(即离原点很远)的点的话，就可以使这个例外点变得有意义．那些模非常大的点在球面上的射影都在北极附近，且当 $|z| \to +\infty$ 时，它们的射影趋向这个极．在本书中，我们把球面上的 N 同 z 平面上的扩充复数"∞"对应起来，称

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

为扩充复平面[⊖]．

扩充复平面上"在 ∞ 的点"的性质与通常对一维实直线上无穷大的解释有很大差别．在后一种情况中，我们通过考虑"$+\infty$"和"$-\infty$"，来区分在实直线上由于趋于正无穷或负无穷而变为无界的那些点．然而，在本书中，尽管复平面上的点能从许多不同方向(沿着实轴、沿着虚轴以及沿着扩充螺旋线等)变为无界，但它们都是"趋于无穷"．

下面对 ∞ 作进一步的讨论．我们注意到，由北极圈内的点构成的球冠形成了北极 N 的一个邻域(见图 1-22)，小纬度圆周内部的点组成小邻域．因此，我们把扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上 ∞ 点的邻域看作是这些球冠的原像点，也就是以原点为心的圆周的外部．

更有意思的是，复平面上两点之间的距离与它们的射影之间的距离有相当大的差别．事实上，球面是有界的(在它上面任意两个点的距离不超过它的直径)，而平面是无界的(在它上面两个点的距离可以任意大)．下面的结论对于这些距离给出了一个比较公式；在本书后面将会用到．

48

例 3 设复平面上点 z，w 的球面射影为 Z，W．证明：两点 Z，W 之间(在 3 维空间)的距离是

$$\operatorname{dist}(Z,W) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} = \frac{2\operatorname{dist}(z,w)}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}. \tag{7}$$

证 这个公式可用几何方法来证明，习题 6 和习题 7 给出了推导思想．这里我们用简单的代数方法．设 (x_1, x_2, x_3) 和 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ 分别是 Z 和 W 的坐标，令 $d:=\operatorname{dist}(Z, W)$．则

$$d^2 = (x_1-\hat{x}_1)^2 + (x_2-\hat{x}_2)^2 + (x_3-\hat{x}_3)^2.$$

由于 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 和 $\hat{x}_1^2+\hat{x}_2^2+\hat{x}_3^2=1$，把关于 d^2 的表示式展开，变为

$$d^2 = 2[1-(x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3)]. \tag{8}$$

⊖ 在拓扑上，人们把 $\hat{\mathbf{C}}$ 看作平面的一个紧致点．

对于 $z=x+iy$ 和 $w=u+iv$ 应用公式(1)，有

$$\begin{aligned}&1-(x_1\hat{x}_1+x_2\hat{x}_2+x_3\hat{x}_3)\\&=1-\frac{4xu}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}-\frac{4yv}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}-\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\left(\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right)\\&=\frac{2|z|^2+2|w|^2-4xu-4yv}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\\&=\frac{2(x^2+y^2)+2(u^2+v^2)-4xu-4yu}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\\&=2\frac{(x-u)^2+(y-v)^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}.\end{aligned}\tag{9}$$

把这个式子代入(8)，两端开方即得(7). ■

我们刚刚推导的射影 Z 和 W 之间的欧几里得距离称为(原始)复数 z 和 w 之间的弦距离，用希腊字母 χ 来定义，即

$$\chi[z,w]:=\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}.\tag{10}$$

像通常平面上两点间的欧几里得距离一样，χ 是一个度量，它对平面上的任意点满足三角不等式

$$\chi[z_1,z_2]\leqslant\chi[z_1,w]+\chi[w,z_2]\tag{11}$$

49

和熟知的恒等式

$$\chi[z,z]=0,\quad \chi[z,w]=\chi[w,z],$$

χ 度量对于扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}$ 也是有意义的；我们可以通过巧妙地使用公式(10)计算从 z 到 ∞ 的弦距离. 由

$$\chi[z,\infty]=\lim_{|w|\to\infty}\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}=\lim_{|w|\to\infty}\frac{2|z/w-1|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1/|w|^2+1}},$$

得到

$$\chi[z,\infty]=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.\tag{12}$$

这样就对前面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上 ∞ 点邻域的像点进行了量化. 由 $\mathrm{dist}(Z,N)\equiv\chi[z,\infty]<\rho$ 刻画的球冠是扩充复平面上在圆周 $|z|=\sqrt{(4/\rho^2)-1}$ 的外部所有点的射影，这里 ρ 小于2(球面的直径).

练习 1.7

1. 对于下列复平面 $\mathbf{C}$ 内的点，求它在黎曼球面上的球极射影.

(a) i　　(b) $6-8i$　　(c) $-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}i$

2. (a)证明：点 z 和 $\frac{1}{\bar{z}}$ 的球极射影关于黎曼球面的赤道平面互为对称.

(b)证明：点 z 和 $-\frac{1}{\bar{z}}$ 的球极射影是黎曼球面上完全相反的点.

3. 若 Z 和 W 是黎曼球面上两个互异点，则经过这两点和原点的平面以“大圆周”切开球面，大圆周指平面和球面相交而产生的直径最大的圆周(对单位球面而言，直径为 2). 证明：大圆周所对应于平面上的唯一圆周(或直线)经过点 z，w 和 $-\frac{1}{\bar{z}}$，其中 Z，W 分别是 z，w 的射影. [提示：见习题 2.]

4. 应用球极射影证明：经过平面上三个点 z，w 和 $-\frac{1}{\bar{z}}$ 的(唯一)圆周(或直线)与经过三个点 z，w 和 $-\frac{1}{\bar{w}}$ 的圆周(或直线)相同，其中 $z\neq w$. [提示：见习题 3.]

5. 描述复平面上的下述集合在黎曼球面上的球极射影.

50

(a)右半平面$\{z: \mathrm{Re}z>0\}$ (b)圆盘$\{z: |z|<1/2\}$

(c)圆环$\{z: 1<|z|<2\}$ (d)集合$\{z: |z|>3\}$

(e)直线 $y=x$(包括∞)

6. 应用相似三角形的方法，给出点 z 和∞之间的弦距(即射影 Z 和北极之间的距离)公式

$$\chi[z,\infty]=2/\sqrt{1+|z|^2}$$

的几何证明.

[提示：画一个黎曼球面与 z 平面的横截面图，其中含有北极、点 z 和它的射影 Z.]

7. 应用几何方法推导弦距公式(10). [提示：画一个含有北极，z，Z，w 和 W 的图形. 确定所有长度已知的线段；见习题 6. 应用余弦定理写出 $|z-w|$ 和 $|Z-W|$ 的表达式，并注意到这两个式子具有同样的角度.]

8. 对于χ度量，由公式(10)验证对于任何两个点 z，$w\in\hat{\mathbf{C}}$，有

$$\chi[1/z,1/w]=\chi[z,w].$$

(我们约定 $1/0=\infty$ 和 $1/\infty=0$.)给出关于这两个弦距应该相等(基于黎曼球面)的几何证明.

9. 不进行任何运算，解释三角不等式(11)成立的原因.

10. 通过逆例 2 的步骤证明：黎曼球面上的任意圆周不是 z 平面上的一个圆周就是 z 平面上的一条直线的射影，其中把∞看作属于任一条直线上的点.

小结

复数系是实数系的扩充，由所有形如 $a+b\mathrm{i}$ 的表示式组成，其中 a 和 b 是实数，$\mathrm{i}^2=-1$. 前面介绍的关于复数的加法、减法、乘法和除法的运算类似于“符号计算”的方法. 从几何上看，复数可用平面上的点或向量表示. 因此，有几何背景的某些定理，诸如三角不等式等，都能转换成复数语言. 与复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 相联系的，有它的绝对值 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 和它的共轭复数 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 前者是从点 z 到原点的距离，而后者则是点 z 关于 x 轴的对称点. 数 z，$\bar{z}$ 和 $|z|$ 之间的关系是 $z\bar{z}=|z|^2$.

51

每一个非零复数 z 都能被写成极形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 $r=|z|$，θ 是向量 z 的倾角. θ 的任何等价角 $\theta+2k\pi$，$k=0$，±1，±2，…称为 z 的辐角($\arg z$). 在 z 的有限幂和根中，极形式非常有用.

对于 $z=x+\mathrm{i}y$，定义复指数 e^z 为 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$. 特别地，如果 θ 是实数，有欧拉方程 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 此外，复数的极形式能简单地写成 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$.

在描述平面点集时，用到一些专用术语. 区域 D 是一个重要概念. 这个集合通过两条性质刻画它的特征：(i)D 内的每一点 z 是一个完全含于 D 内的开圆盘的中心；(ii)D 内每一对点 z_1，z_2 都可由完全含于 D 内的折线连接起来. 一个区域自身，或者加上它的部分或全部边界点形成的点集称为域.

通过球极射影，复数能形象地用 3 维空间中的单位球面(黎曼球面)上的点表示，即通过连接赤道平面上的点 z 和北极的直线与球面相交，其交点就是平面上的点 z 在球面上的对应点. 扩充复数∞与北极相对应，称 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$为扩充复平面.

参考文献

初级读物

[1] Boas, R.P. *Invitation to Complex Analysis*. Random House/Birkhäuser Math Series, New York, 1987.

高级读物

[2] Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.

[3] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vol. I, 2nd ed., Chelsea, New York, 1973.

[4] Nehari, Z. *Conformal Mapping*. Dover Publishing, New York, 1975.

数域的扩充

[5] Fraleigh, John B. *A First Course in Abstract Algebra*, 4th ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1989.

机械论

[6] Martin, George H. *Kinematics and Dynamics of Machines*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.

52

⊖ 本书的中文版、影印版已由机械工业出版社引进出版，中文书名为《复分析》。——编辑注

第2章 解析函数

2.1 复变函数

在第1章中我们为了解某些代数方程引入了复数z的概念. 本章中我们将研究以复数为变量的函数$f(z)$. 目的是模仿微积分中的概念、定理和数学结构，对$f(z)$进行微分与积分运算. 由于复变量的二维性，在变量为复数的情况下，函数导数的概念要复杂得多，对此本章将予以反复说明. 当然，这样做会带来很大好处. 本书后面部分将致力于数学推理，并说明它们在物理问题上的应用.

首先回顾一些基本概念. 若对集合A中每个元素，按照某一确定的对应法则f，在集合B中有唯一的一个确定的元素与之相对应，则称f是一个*函数*. 如果对于A中的元素a，f对应值b，记为

$$b = f(a),$$

则称b为a在f作用下的像. A称为f的*定义域*(甚至A可以不是第1章中定义的区域)，由所有的像点$f(a)$构成的集合称为f的*值域*. 有时把f称为A到B的一个*映射*.

在这里，我们感兴趣的是单复变量的复值函数，其定义域与值域都是复数集的子集合. 例如，若f由

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

来表示，除非另有说明，则其定义域为使该表达式中有意义的所有复数z组成的集合. (因此，f的定义域为除去$\pm \mathrm{i}$的所有z组成的集合.)

53

如果函数f在点z的值定义为w，则记$w = f(z)$. 类似于将z表示为由其实部与虚部组成的式子$z = x + \mathrm{i}y$那样，w的实部和虚部都是z，或者x与y的(实值)函数，通常我们写为

$$w = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

其中u和v分别定义为w的实部与虚部. 因此，一个复变量的复值函数本质上是一对两个实变量的实值函数.

例1 把函数$w = f(z) = z^2 + 2z$写成$w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$的形式.

解 取$z = x + \mathrm{i}y$，则

$$w = f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy + 2x + \mathrm{i}2y.$$

从而$w = (x^2 - y^2 + 2x) + \mathrm{i}(2xy + 2y)$即为所求. ■

由于一个复变函数$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$由两个二元实值函数组成，描述它的图像需要四维空间，因此，一般来讲，在同一个平面或空间上画出它的图像是不可能的. 然而，可以通过把$w = f(z)$的定义域和值域分别表示在z平面和w平面上来研究该函数的一些性质，如图2-1所示.

例2 求函数$f(z) = x^2 + 2\mathrm{i}$在闭单位圆盘$|z| \leqslant 1$上的值域.

解 我们知$u(x, y) = x^2$，$v(x, y) = 2$. 当z在闭单位圆盘$|z| \leqslant 1$上变化时，u在0和1

之间变化，v 为常数 2，因此，所求值域为 $w=2i$ 到 $w=1+2i$ 之间的线段. ■ [54]

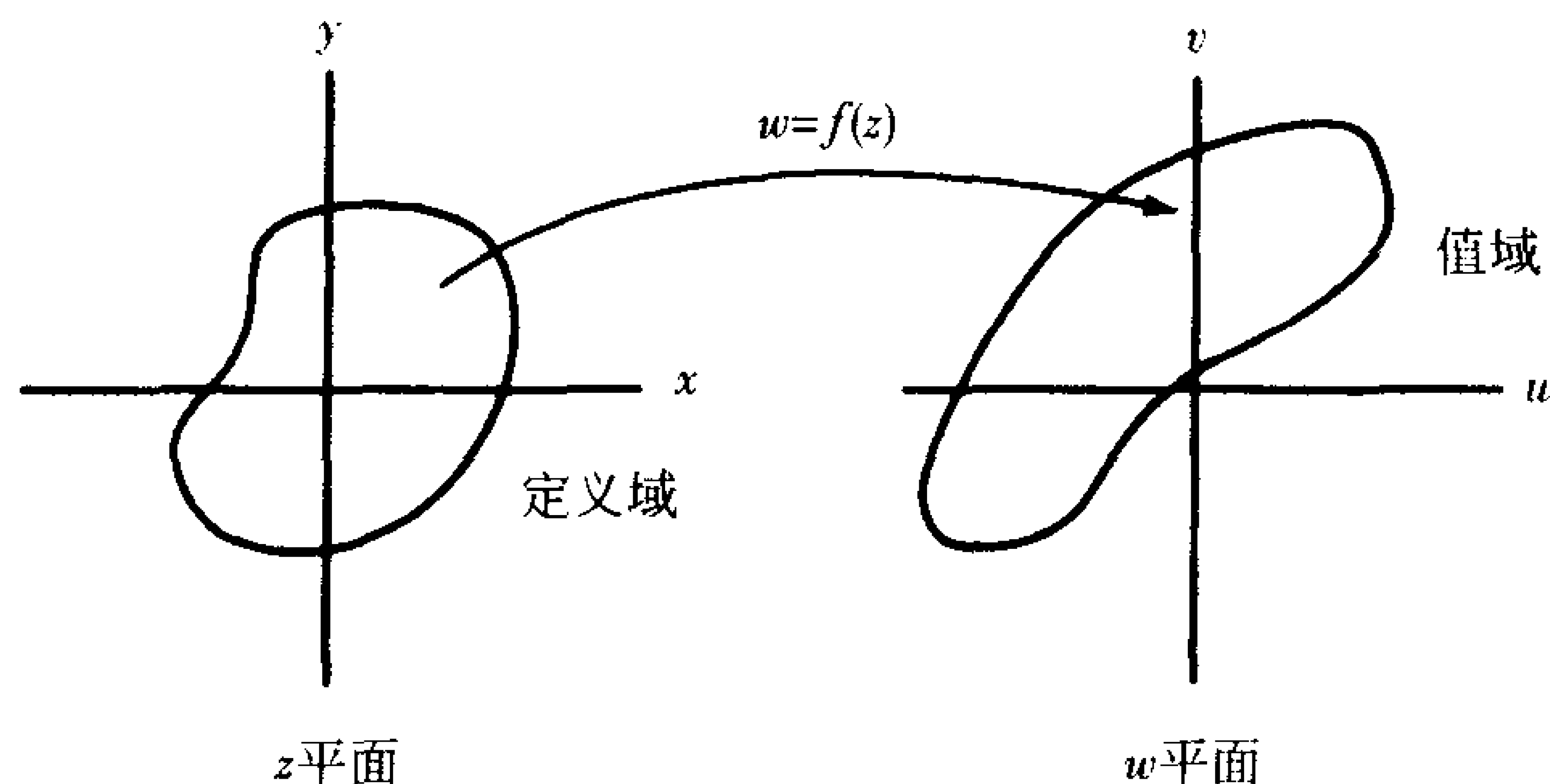


图 2-1 一个复变函数的表示

例 3 求函数 $f(z)=z^3$ 在上半圆盘 $|z|\leqslant 2$，$\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$ 上的值域(如图 2-2a 所示).

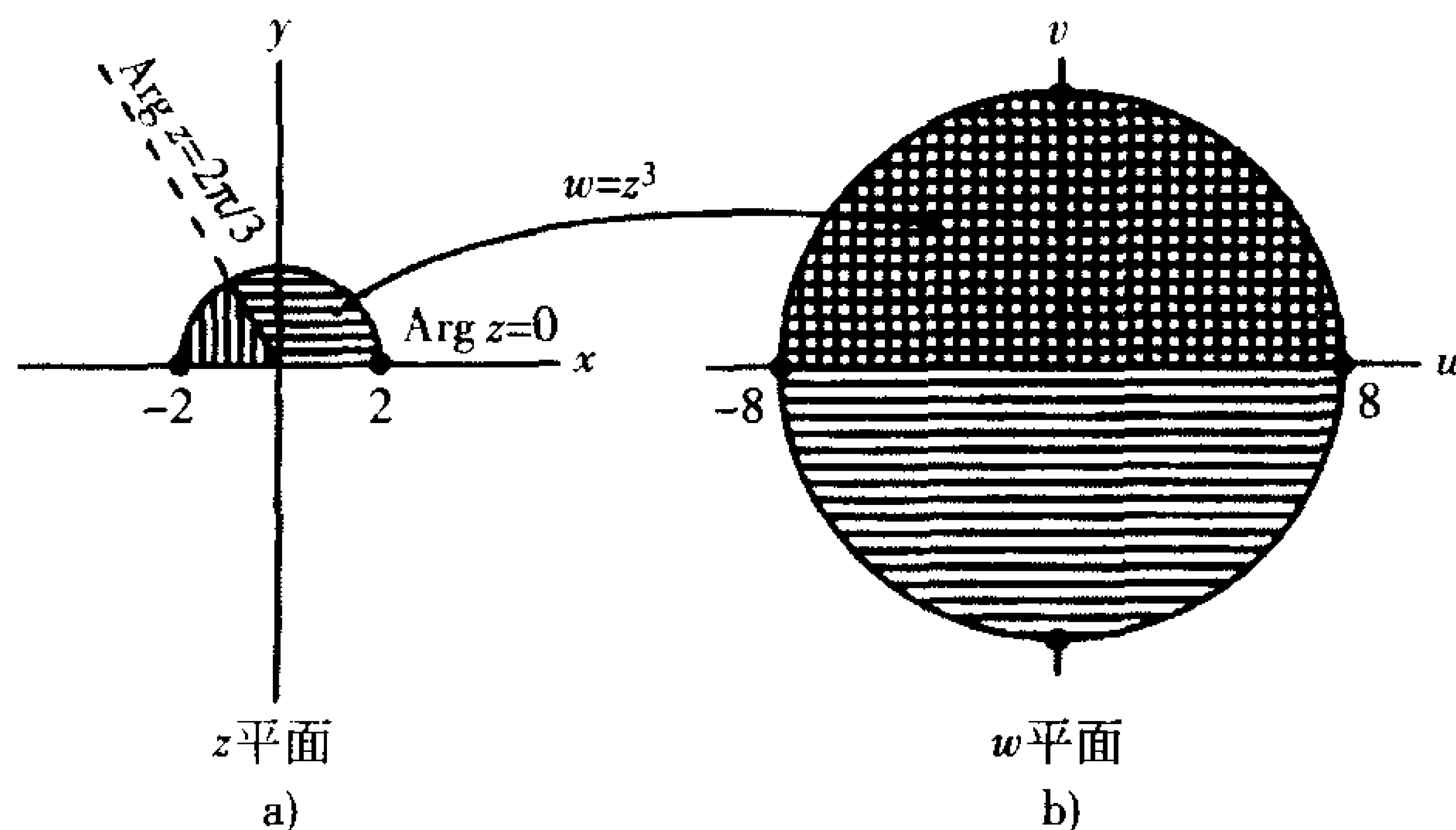


图 2-2 一个半圆盘在 $f(z)=z^3$ 下的映射

解 由 1.5 节知道，在上半圆盘中，对辐角 $\mathrm{Arg} z=0$ 到 $\mathrm{Arg}\,z=2\pi/3$ 的扇形域内的点 z 求立方后，其像点覆盖了整个圆盘 $|w|\leqslant 8$. 而定义域中剩下的 z 点的像也在这个闭圆盘内，它覆盖了该圆盘的上半圆盘(如图 2-2b 所示). ■

函数 $f(z)=1/z$ 称为反演映射[○]，它是一个一一映射，它把不同的点映射为不同的点，即若 $z_1\neq z_2$，则 $f(z_1)\neq f(z_2)$.

例 4 证明反演映射 $w=1/z$ 相当于黎曼球面关于 x_1 轴旋转180°(见图 1-21).

证 设复平面上点 z 的球极射影为 $Z=(x_1, x_2, x_3)$，$1/z$ 的球极射影为 $W=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$，我们只需证明将 Z 绕 x_1 轴旋转180°得到 W 即可.

由 1.7 节公式(1)得

$$x_1=\frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1},x_2=\frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1},x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1};$$

○ 严格说来，该函数在 $z=0$ 没有定义，但是根据 1.7 节对 ∞ 的讨论，很自然地可以定义 $f(0)=\infty$；进一步可以定义 $f(\infty)=0$ 使得函数 f 成为扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 上的函数.

55

$$\hat{x}_1 = \frac{2\mathrm{Re}(1/z)}{|1/z|^2+1}, \hat{x}_2 = \frac{2\mathrm{Im}(1/z)}{|1/z|^2+1}, \hat{x}_3 = \frac{|1/z|^2-1}{|1/z|^2+1}.$$

因为 $\mathrm{Re}\ (1/z) = (\mathrm{Re}\ z)/|z|^2$，$\mathrm{Im}\ (1/z) = -(\mathrm{Im}\ z)/|z|^2$，对上述公式化简得

$$\hat{x}_1 = \frac{2\mathrm{Re}\ z}{1+|z|^2} = x_1, \hat{x}_2 = \frac{-2\mathrm{Im}\ z}{1+|z|^2} = -x_2, \hat{x}_3 = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} = -x_3.$$

所以 Z 关于 x_1 轴旋转180°后，x_1 不变，而 x_2 变为 $-x_2$，x_3 变为 $-x_3$；因此 W 确实是所述 Z 的旋转. ■

这个例子的一个漂亮结论是圆周与直线经反演映射后仍为圆周或直线(见习题 17).

练习 2.1

1. 把下列函数表示为 $w = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 的形式.

(a) $f(z) = 3z^2 + 5z + \mathrm{i} + 1$　　(b) $g(z) = 1/z$　　(c) $h(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z^2+1}$

(d) $q(z) = \dfrac{2z^2+3}{|z-1|}$　　(e) $F(z) = e^{3z}$　　(f) $G(z) = e^z + e^{-z}$

2. 求出习题 1 中每个函数的定义域.

3. 确定下列函数的值域.

(a) $f(z) = z + 5$，其中 $\mathrm{Re}\ z > 0$.

(b) $g(z) = z^2$，其中 z 在第一象限，$\mathrm{Re}\ z \geqslant 0$，$\mathrm{Im}\ z \geqslant 0$.

(c) $h(z) = 1/z$，其中 $0 < |z| \leqslant 1$.

(d) $p(z) = -2z^3$，其中 z 为去心 $\dfrac{1}{4}$ 单位圆盘：$|z| < 1$，$0 < \mathrm{Arg}z < \dfrac{\pi}{2}$.

4. 画出下列在反演映射 $w = f(z) = 1/z$ 下的图像.

(a) 将圆周 $|z| = r$ 映射到圆周 $|w| = 1/r$.

(b) 将射线 $\mathrm{Arg}z = \theta_0$，$-\pi < \theta_0 < \pi$ 映射到射线 $\mathrm{Arg}w = -\theta_0$.

(c) 将圆周 $|z-1| = 1$ 映射到直线 $x = 1/2$.

5. 对于在 1.4 节中定义的复指数函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$：

(a) 求其定义域与值域.

(b) 证明 $f(-z) = 1/f(z)$.

(c) 确定垂直直线 $\mathrm{Re}\ z = 1$ 的像.

(d) 确定水平线 $\mathrm{Im}\ z = \pi/4$ 的像.

56

(e) 确定无限长带形 $0 \leqslant \mathrm{Im}\ z \leqslant \pi/4$ 的像.

6. 儒可夫斯基(Joukowski)映射定义如下：

$$\omega = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

证明

(a) $J(z) = J(1/z)$.

(b) J 将单位圆周 $|z| = 1$ 映射到实区间 $[-1, 1]$.

(c) J 将圆周 $|z| = r\ (r > 0,\ r \neq 1)$ 映射到以 ± 1 为焦点的椭圆

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1.$$

7. 形如 $F(z) = z + c$ 的函数(其中 c 为复常数)通常称为平移映射. 当 c 取下述数值时，画出在映射 F 下，半圆

盘 $|z|\leqslant 2$，$\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 的图像[参考图 2-2a]：(a)$c=3$；(b)$c=2\mathrm{i}$；(c)$c=-1-\mathrm{i}$.

8. 形如 $G(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z$ 的函数(其中 ϕ 为实常数)通常称为*旋转映射*. 当 ϕ 取下述数值时，画出在映射 G 下，半圆盘 $|z|\leqslant 2$，$\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 的图像[参考图 2-2a]：(a)$\phi=\pi/4$；(b)$\phi=-\pi/4$；(c)$\phi=3\pi/4$.

9. 形如 $H(z)=\rho z$ 的函数(其中 ρ 为正实常数)通常称为*相似映射*，当 $\rho>1$ 时称为*伸长映射*，当 $\rho<1$ 时称为*收缩映射*. 当 ρ 取下述数值时，画出在映射 H 下，半圆盘 $|z|\leqslant 2$，$\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 的图像[参考图 2-2a]：(a)$\rho=3$；(b)$\rho=1/2$.

10. 设 $F(z)=z+\mathrm{i}$，$G(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}z$，$H(z)=z/2$. 画出在下述每个复合映射下，半圆盘 $|z|\leqslant 2$，$\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$ 的图像[参考图 2-2a]：

(a)$G(F(z))$　　(b)$G(H(z))$

(c)$H(F(z))$　　(d)$F(G(H(z)))$

11. 设 $F(z)=z-3$，$G(z)=-\mathrm{i}z$，$H(z)=2z$. 画出在下述每个复合映射下，圆周 $|z|=1$ 的图像[参考图 2-2a]：

(a)$G(F(z))$　　(b)$G(H(z))$

(c)$H(F(z))$　　(d)$F(G(H(z)))$

12. 形如 $f(z)=az+b$ 的函数(其中 a，b 为复数)称为*线性变换*. 证明任何线性变换都能表示为相似映射(见习题 9)、旋转映射(见习题 8)和平移映射(见习题 7)的复合. 因此，线性变换将直线映射为直线，将圆周映射为圆周. [*提示*：将 a 写成极形式.]

57

13. 证明函数 $w=z^2$ 将图形

(a)直线 $x=1$　　(b)双曲线 $xy=1$　　(c)圆周 $|z-1|=1$

分别映射为 w 平面上的*抛物线*、*直线*与*心形线*.

14. (*黎曼球面的旋转*)参考 1.7 节关于球极射影的图 1.21 及公式(1)，证明下列问题：

(a)映射 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z$ 相当于把黎曼球面绕 x_3 轴旋转 ϕ 度.

(b)映射 $w=-1/z$ 相当于把黎曼球面绕 x_2 轴(虚轴)旋转 180°.

15. 证明映射 $w=(1+z)/(1-z)$ 相当于把黎曼球面绕 x_2 轴(虚轴)逆时针旋转 90°.

16. 通过一个适当的黎曼球面旋转刻画映射 $w=(1-\mathrm{i}z)/(z-\mathrm{i})$.

17. 利用例 4 的结果与球极射影的性质，证明反演映射 $w=1/z$ 将 z 平面上的任何圆周映射为 w 平面上的圆周或直线，这一结论对 z 平面上的任何直线的映射也同样成立.(把∞看作每条直线上的一个点.)

2.2 极限与连续性

由上一章可知，复数的绝对值可以用来描述两个复数之间的距离. 有了距离的概念，我们就可以引入极限与连续性的定义.

关于复数序列的极限，大致是说，设有一个无穷复数序列 z_1，z_2，z_3，…，如果(对于充分大的 n)z_n 可以任意地接近一个复数 z_0，我们就说这个序列以 z_0 为极限. 精确定义叙述如下：

定义 1　*设复数序列* $\{z_n\}_1^{\infty}$ *及复数* z_0. *若对于任意的* $\varepsilon>0$，*都存在一个正整数* N，*使得当* $n>N$ *时，有* $|z_n-z_0|<\varepsilon$，*则称该序列有***极限** z_0，*或称该序列***收敛**到 z_0，*记作*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

或

$$z_n\to z_0\,(n\to\infty).$$

58

从几何上来看，这意味着当 $n>N$ 时，z_n 都位于以 z_0 为心，ε 为半径的开圆盘内(如图 2-3 所示).

例 1 求下列复数序列的极限(如果它存在的话).

(a)$z_n=\left(\frac{i}{3}\right)^n$; (b)$z_n=\frac{2+in}{1+3n}$; (c)$z_n=i^n$.

解 我们应用熟悉的初等微分法，由定义 1 给出严格的证明.

(a)由于 $|(i/3)^n|=1/3^n\to 0$(见习题 5)，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n=0.$$

(b)分子分母分别除以 n，得

$$\frac{2+in}{1+3n}=\frac{(2/n)+i}{(1/n)+3}\to\frac{0+i}{0+3}=\frac{i}{3}\quad(n\to\infty).$$

(c)序列 i^n 重复取值 i，-1，-i，1 无穷多次，所以它没有极限. ■

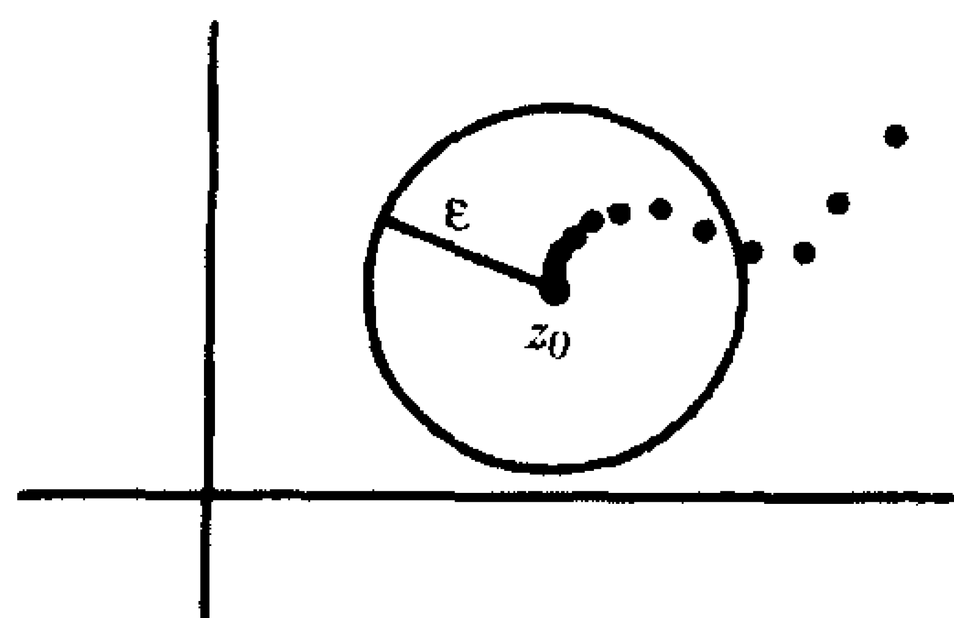


图 2-3 一个收敛序列

与序列极限相关的是复值函数 $f(z)$ 的极限的概念. 粗略地说，如果当 z 充分靠近点 z_0 时，函数 $f(z)$ 任意地接近一个复数 w_0，我们就说当 z 趋于 z_0 时，函数 $f(z)$ 以 w_0 为极限. 下面给出它的精确定义.

定义 2 设函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内有定义，z_0 可能除外，w_0 为一个复数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 δ，只要 $0<|z-z_0|<\delta$，就有 $|f(z)-w_0|<\varepsilon$，则称 **z 趋于 z_0 时，函数 $f(z)$ 以复数 w_0 为极限**. 记为

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$$

或

$$f(z)\to w_0\quad(z\to z_0).$$

59

该定义的几何意义是说，对于 w_0 的任意邻域，都相应地存在 z_0 的某个邻域，$f(z)$ 在这个 z_0 邻域内的所有值都落在 w_0 的那个邻域内，可能除去值 $f(z_0)$，见图 2-4.

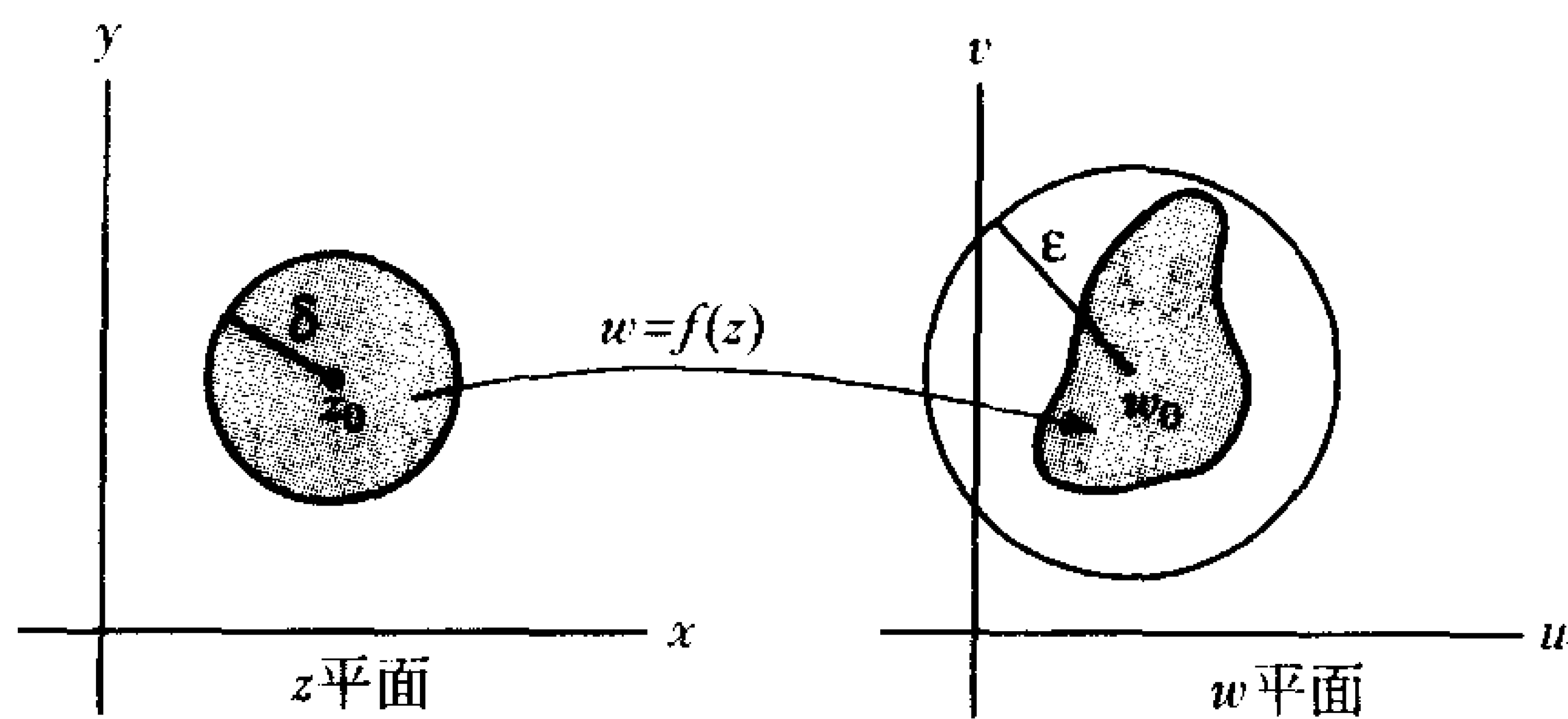


图 2-4 当 $z\to z_0$ 时，函数以 w_0 为极限的映射性质

例 2 用定义证明：$\lim_{z\to i}z^2=-1$.

证 只需证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 δ，只要 $0<|z-i|<\delta$，就有 $|z^2-(-1)|<\varepsilon$ 即可. 因此需要将 $|z^2-(-1)|$ 通过 $|z-i|$ 来表示：

$$z^2-(-1)=z^2+1=(z-i)(z+i)=(z-i)(z-i+2i).$$

由 1.3 节复数模的性质(特别是三角不等式)得

$$|z^2-(-1)|=|z-i||z-i+2i|\leqslant|z-i|(|z-i|+2).\qquad(1)$$

于是当 $|z-i|<\delta$ 时，(1)式的右端 $\leqslant\delta(\delta+2)$；为了使它小于 ε，我们可取 $\delta\leqslant\min\{\varepsilon/3,1\}$，这时

60

$$|z-i|(|z-i|+2)<\frac{\varepsilon}{3}(1+2)=\varepsilon.$$ ■

函数极限和序列极限之间存在着显而易见的联系，即如果$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$，则对于任何收敛于z_0的序列$\{z_n\}_1^\infty$ $(z_n\neq z_0)$，函数列$\{f(z_n)\}_1^\infty$收敛于w_0；反过来这个结论也成立，结论的证明留给读者作为练习.

下面给出函数连续的概念.

定义 3 设函数$f(z)$在z_0的某个邻域内有定义，如果$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称$f(z)$在$z_0$**连续**.

换句话说，如果f在z_0连续，它在z_0必有极限值，并且这个极限值必是$f(z_0)$.

若函数f在集合S中的每一点都连续，则称f在集合S上连续.

显然，这一节的定义是由初等微积分中的相应定义直接平移而来. 事实上，人们可以证明，函数$f(z)$有极限等价于它的实部和虚部都有极限(见习题18)；类似地，$f(z)$的实部和虚部的连续性等价于$f(z)$的连续性. 因为这种相似性，在复的情况下，关于实的序列、极限和连续的许多熟悉的定理仍然是成立的. 下面给出两个这样的结论.

定理 1 若$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$，$\lim_{z\to z_0}g(z)=B$，则

(i) $\lim_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=A\pm B$.

(ii) $\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB$.

(iii) 当$B\neq 0$时，$\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$.

定理 2 若$f(z)$与$g(z)$在z_0连续，则$f(z)\pm g(z)$与$f(z)g(z)$在z_0也连续. 当$g(z_0)\neq 0$时，$f(z)/g(z)$也在z_0连续.

(定理2是定理1的一个直接推论.)

容易证明，常数函数与函数$f(z)=z$在整个平面$\mathbf{C}$上连续. 因此，由定理2知z的多项式函数，即如下函数

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

61

(其中a_i是常数)也在整个平面上连续. z的有理函数，即由两个多项式的商定义的函数

$$\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}$$

在分母不等于零的每个点上都是连续的. 这些结论对类似于例2的问题提供了非常简单的解法，下面予以举例说明.

例 3 当$z\to 2\mathrm{i}$时，求函数$f_1(z)=z^2-2z+1$，$f_2(z)=(z+2\mathrm{i})/z$，$f_3(z)=(z^2+4)/z(z-2\mathrm{i})$的极限.

解 由于$f_1(z)$，$f_2(z)$在$z=2\mathrm{i}$连续，我们容易计算出它们的值，即

$$\lim_{z\to 2\mathrm{i}}f_1(z)=f_1(2\mathrm{i})=(2\mathrm{i})^2-2(2\mathrm{i})+1=-3-4\mathrm{i},$$

$$\lim_{z\to 2i} f_2(z) = f_2(2i) = \frac{2i+2i}{2i} = 2.$$

因为函数$f_3(z)$在$z=2i$没有定义(当$z=2i$时，分母为零)，所以它在这点不连续. 因此，当$z\neq 2i$，$z\neq 0$时，我们有

$$f_3(z) = \frac{(z+2i)(z-2i)}{z(z-2i)} = \frac{z+2i}{z} = f_2(z),$$

故

$$\lim_{z\to 2i} f_3(z) = \lim_{z\to 2i} f_2(z) = 2.$$ ■

注意上述例子中，函数$f_3(z)$在$z=2i$处不连续，但在这点给函数一个适当的定义[令$f_3(2i)=2$]，则函数在这点就连续了. 一般地讲，若一个函数可以通过在一个单点z_0补充定义或重新定义的方式使其在z_0连续，则称z_0为函数的*可去不连续点*.

我们将来会看到，极限包含无穷大对于描述某类序列和函数的特性是非常重要的. 我们说"$z_n\to\infty$"是指对于每个正数M(不论它如何大)，存在一个正整数N，使得只要$n>N$，就有$|z_n|>M$；同样地，"$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$"是指对于每个正数$M>0$(不论它如何大)，存在一个正数$\delta>0$，使得只要$0<|z-z_0|<\delta$，就有$|f(z)|>M$. 实质上，我们说复数趋于无穷大指的是其模趋向正无穷大. 所以

$$\lim_{z\to 3i}\frac{z}{z^2+9}=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{iz-2}{4z+i}=\frac{i}{4},\quad \lim_{z\to\infty}\frac{z^3+3i}{z^2+5z}=\infty.$$

[62] 实际上，像1.7节中介绍的那样，无穷远点的概念是一个精细的量化概念：见习题23～25.

最后，我们着重强调一下(一维)实的情况下的极限概念和复的情况下的极限概念之间的一个重要区别. 对于后者而言，序列$\{z_n\}_1^\infty$可以趋于一个极限z_0，是指在平面上以任何方向，甚至是沿着一条螺线等趋向于z_0. 因此，在复的情况下，一个数列趋于它的极限的方式可能非常复杂.

练习 2.2

1. 画出数列$\{(i/2)^n\}_1^\infty$($n=1, 2, 3, \cdots$)的前五项，并说明它是收敛的.

2. 画出数列$\{(2i)^n\}_1^\infty$($n=1, 2, 3, \cdots$)的前五项，并说明它是发散的.

3. 用定义1证明复数序列$z_n=x_n+iy_n$收敛于$z_0=x_0+iy_0$的充要条件是：x_n收敛于x_0，y_n收敛于y_0. [提示：$|x_n-x_0|\leqslant|z_n-z_0|$，$|y_n-y_0|\leqslant|z_n-z_0|$，$|z_n-z_0|\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|$.]

4. 证明：$\lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\overline{z_n}=\overline{z_0}$.

5. 用定义1证明：$\lim_{n\to\infty} z_n=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n|=0$.

6. 证明：当$|z_0|<1$时，$\lim_{n\to\infty} z_0^n=0$；当$|z_0|>1$时，序列$\{(z_0)^n\}_1^\infty$发散.

7. 确定下列数列是否收敛，若收敛，求出它们的极限.

(a)$z_n=\dfrac{i}{n}$ (b)$z_n=i(-1)^n$ (c)$z_n=\mathrm{Arg}\left(-1+\dfrac{i}{n}\right)$

(d)$z_n=\dfrac{n(2+i)}{n+1}$ (e)$z_n=\left(\dfrac{1-i}{4}\right)^n$ (f)$z_n=\exp\left(\dfrac{2n\pi i}{5}\right)$

8. 用定义2证明：$\lim_{z\to 1+i}(6z-4)=2+6i$.

9. 用定义 2 证明：$\lim_{z\to -i}(1/z)=i$.

10. 用定理 1 证明定理 2.

11. 求下列极限.

(a) $\lim_{z\to 2+3i}(z-5i)^2$ (b) $\lim_{z\to 2}\frac{z^2+3}{iz}$

(c) $\lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i}$ (d) $\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^4-1}$

(e) $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-z_0^2}{\Delta z}$ (f) $\lim_{z\to 1+2i}|z^2-1|$

12. 证明函数 Arg$z$ 在负实轴上每一点都不连续.

63

13. 设 $f(z)$ 定义如下：

$$f(z)=\begin{cases}2z/(z+1) & 当\ z\neq 0,\\ 1 & 当\ z=0.\end{cases}$$

指出它在哪些点有有限极限，在哪些点连续？$f(z)$ 的哪些不连续点为可去不连续点？

14. 证明函数 $g(z)=\bar{z}$ 在全平面上连续.

15. 证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则函数 $\overline{f(z)}$，Re$f(z)$，Im$f(z)$，$|f(z)|$ 都在 z_0 连续. [提示：利用 1.3 节不等式(2)，证明 $|f(z)|$ 在 z_0 连续.]

16. 设 g 是定义在 z_0 邻域内的一个函数，f 是定义在点 $g(z_0)$ 邻域内的一个函数. 证明：若函数 g，f 分别在 z_0，$g(z_0)$ 连续，则复合函数 $f(g(z))$ 在 z_0 连续.

17. 设函数 $f(z)=[x^2/(x^2+y^2)]+2i$. f 在 $z=0$ 处有极限吗？[提示：对于趋于 0 的序列 $\{z_n\}$，分别考虑 z_n 沿实轴与虚轴趋于 0 时 $\{f(z_n)\}$ 的情况.]

18. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，$w_0=u_0+iv_0$. 证明：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$$

的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

[提示：首先证明 $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}\overline{f(z)}=\overline{w_0}$，接着利用定理 1.]

19. 利用习题 18 的结论求 $\lim_{z\to 1-i}[x/(x^2+3y)]+ixy$.

20. 利用习题 18 的结论证明 $f(z)=e^z$ 在复平面上任一点连续.

21. 求下列极限：

(a) $\lim_{z\to 0}e^z$ (b) $\lim_{z\to 2\pi i}(e^z-e^{-z})$

(c) $\lim_{z\to \pi i/2}(z+1)e^z$ (d) $\lim_{z\to -\pi i}\exp\left(\frac{z^2+\pi^2}{z+\pi i}\right)$

22. 证明：若对于任意收敛于 z_0 的序列 $\{z_n\}_1^\infty$ $(z_n\neq z_0)$ 都有 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=w_0$，则 $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$. [提示：证明若结论不真，则可以构造一个序列 $\{z_n\}_1^\infty$ 与假设矛盾.]

23. 证明课文中“$z_n\to\infty$”的定义等价于：若 $\lim_{n\to\infty}\chi[z_n,\infty]=0$，其中 χ 表示弦距离，则称复数序列 $\{z_n\}_1^\infty$ 有极限 ∞.

64

24. 证明课文中“$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$”的定义等价于：若 $\lim_{z\to z_0}\chi[f(z),\infty]=0$，其中 χ 表示弦距离（如前一习题），则称当 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 趋于 ∞.

25. 求下列各题极限（包含无穷大）.

(a) $\lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{z^2+9}{2z^2+8}$ (b) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{3z^2-2z}{z^2-iz+8}$ (c) $\lim\limits_{z\to 5}\dfrac{3z}{z^2-(5-i)z-5i}$

(d) $\lim\limits_{z\to\infty}(8z^3+5z+2)$ (e) $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$

2.3 解析性

现在我们已经有了完整的复变函数的概念，接下来对本书的主题——解析函数理论展开讨论. 但在进行严格的讨论之前，先对我们要做的事情作一个简略的介绍，这对于读者加深对本节内容的理解是有益的.

迄今为止，虽然我们对单变量的复变函数$f(z)$有了一些了解，但是对诸如从xy平面到uv平面的任意映射的性质几乎一无所知. 我们已对z及f的实部和虚部分别赋予了专门的记号，即把z的实部和虚部分别记为x和y，把f的实部和虚部分别记为u和v；因此，我们有理由认为，对于任何一对给定的二元函数$u(x, y)$和$v(x, y)$，就相当于给出了一个复变函数$(u+iv)$. 但是，从下面的函数对

$$u_1(x,y) = x^2-y^2, \quad v_1(x,y) = 2xy$$

和

$$u_2(x,y) = x^2-y^2, \quad v_2(x,y) = 3xy$$

中发现其中隐含着某些特殊的东西. 对于复变函数u_1+iv_1，若把$z=x+iy$视为一个独立的“单位”，则由于$u_1+iv_1=x^2-y^2+i2xy=(x+iy)^2$，从而它服从$z=x+iy$的复结构. 然而(至少是显然的)，$u_2+iv_2$的表达式却需要用$z$的实部和虚部来表示.

在(实函数的)微积分中，我们并不研究诸如$3+4\sqrt{2}$，或者3的平方而非4的立方等这种类型的数的函数. 有趣的是，它把数当作一个单独的函数类. 而复变函数的分类则要根据复变数所具有的特点进行. 所以，我们希望分别对类似于函数

$$z = x+iy \qquad (可允许的),$$

$$z^2 = x^2-y^2+i2xy \qquad (可允许的),$$

$$z^3 = x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3) \qquad (可允许的),$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (可允许的)$$

65

和它们的基本算术复合(和、积、商、乘幂和方根)，以及函数

$$\mathrm{Re}\, z = x \qquad (不允许的),$$

$$\mathrm{Im}\, z = y \qquad (不允许的),$$

$$x^2-y^2+i3xy \qquad (不允许的)$$

进行分类，把前一类归为可允许类，后一类归为禁止类.

我们必须禁止共轭函数$\bar{z}$，因为假若把它归为允许类的话，则$x[=(z+\bar{z})/2]$和$y[=(z-\bar{z})/2i]$将属于允许类，这与x，y属于禁止类矛盾. 因此

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y \qquad \text{(不允许的)}.$$

同理，模 $|z|$ 也不属于允许类，这是因为 $\bar{z} = |z|^2/z$. 所以

$$|z| \qquad \text{(不允许的)}.$$

有人可能对 $u_2 + \mathrm{i}v_2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}3xy$ 属于“不允许类”提出疑问，因为我们并没有证明它不能被独立地写成 z 的形式. 下面的运算将打消这一疑点. 在 $u_2 + \mathrm{i}v_2$ 中，令

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2\mathrm{i}, \tag{1}$$

经过简单的代数运算后，得到

$$\begin{aligned} u_2 + \mathrm{i}v_2 &= x^2 - y^2 + \mathrm{i}3xy \\ &= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} - \frac{(z-\bar{z})^2}{(-4)} + \mathrm{i}3\,\frac{(z+\bar{z})}{2}\,\frac{(z-\bar{z})}{2\mathrm{i}} = \frac{5}{4}z^2 - \frac{1}{4}\bar{z}^2. \end{aligned}$$

由此看出，如果把 $u_2 + \mathrm{i}v_2$ 归于允许类，就必须把 $\bar{z}^2$ 和 $\bar{z}^2$ 的令人讨厌的平方根 $\bar{z}$ 也归于允许类［因为它等于 $5z^2 - 4(u_2 + \mathrm{i}v_2)$］.

例 1 将下列各函数表示为关于 z 与 $\bar{z}$ 的表示式.

$$f_1(z) = \frac{x - 1 - \mathrm{i}y}{(x-1)^2 + y^2}, \quad f_2(z) = x^2 + y^2 + 3x + 1 + \mathrm{i}3y.$$

解 由式(1)，得

$$f_1(z) = \frac{\dfrac{z+\bar{z}}{2} - 1 - \mathrm{i}\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}}{\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2} - 1\right)^2 + \left(\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)^2} = \frac{\bar{z} - 1}{z\bar{z} - z - \bar{z} + 1} = \frac{1}{z-1},$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{(z+\bar{z})^2}{4} + \frac{(z-\bar{z})^2}{4\mathrm{i}^2} + 3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + 1 + \mathrm{i}3\left(\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right) \\ &= z\bar{z} + 3z + 1. \end{aligned}$$

■ 66

显然，f_1 属于可允许类，而 f_2 的表达式中含有 $\bar{z}$，所以它属于禁止类. 然而，这种方式——表达式里含有 $\bar{z}$ 的函数属于禁止类——并不是一个合适的评判标准. 例如，函数

$$\frac{z^2\bar{z}^2 + z^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{z}z^2 - 2\bar{z} + 1}{10\bar{z} + z\bar{z}^2 - 2z\bar{z} - 5\bar{z}^2 + z - 5}$$

的分子和分母中有一个可约公因子 $(\bar{z} - 1)^2$，那么我们能认为它属于可允许类吗？

函数 e^z 甚至更加令人困惑. 按照它的定义，它可分成 z 的实部和虚部：

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y). \tag{2}$$

但是由 1.4 节例 1，这一定义显示它和 e^x 的泰勒(Taylor)展开式是一致的：

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots. \tag{3}$$

而从(3)式右端来看，似乎是 z 的复结构，我们猜想 e^z 属于可允许类. 事实上确实也是如此，

但对它的验证要等到下一节.

学过本书的前四章后，我们就清楚了要寻找的标准——从其他方面对可允许类函数的区分进行验证——能通过可微性简单地表示出来. 下面给出复变函数导数的定义，它是在实的情况下导数定义的直接推广.

定义 4 设 $f(z)$ 是定义在 z_0 的一个邻域内的复值函数，若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 可导(或可微)，这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，记为 $f'(z_0)$ 或 $\dfrac{df}{dz}(z_0)$，即

$$\frac{df}{dz}(z_0)\equiv f'(z_0):=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

这里的 Δz 是一个复数，所以它能以各种不同的方式(从右边，从下边，沿着螺旋线，等等)趋于零；但是，该差商必须趋于唯一的极限 $f'(z_0)$，并且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关. 下面的例 2 反映了把 $\bar{z}$ 归于禁止类的原因.

67

例 2 证明 $f(z)=\bar{z}$ 无处可微.

证 取函数的差商为

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\overline{(z_0+\Delta z)}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

如果通过取实值 $\Delta z\to 0$，则 $\Delta z=\Delta x$(见图 2-5)，$\overline{\Delta z}=\Delta z$，所以差商是 1. 另一方面，如果取虚数 $\Delta z\to 0$，则 $\Delta z=i\Delta y$，$\overline{\Delta z}=-\Delta z$，所以差商是 −1. 从而，在任何点，$\Delta z\to 0$ 时，$\bar{z}$ 的导数的值不存在，从而 $\bar{z}$ 不可微. ■

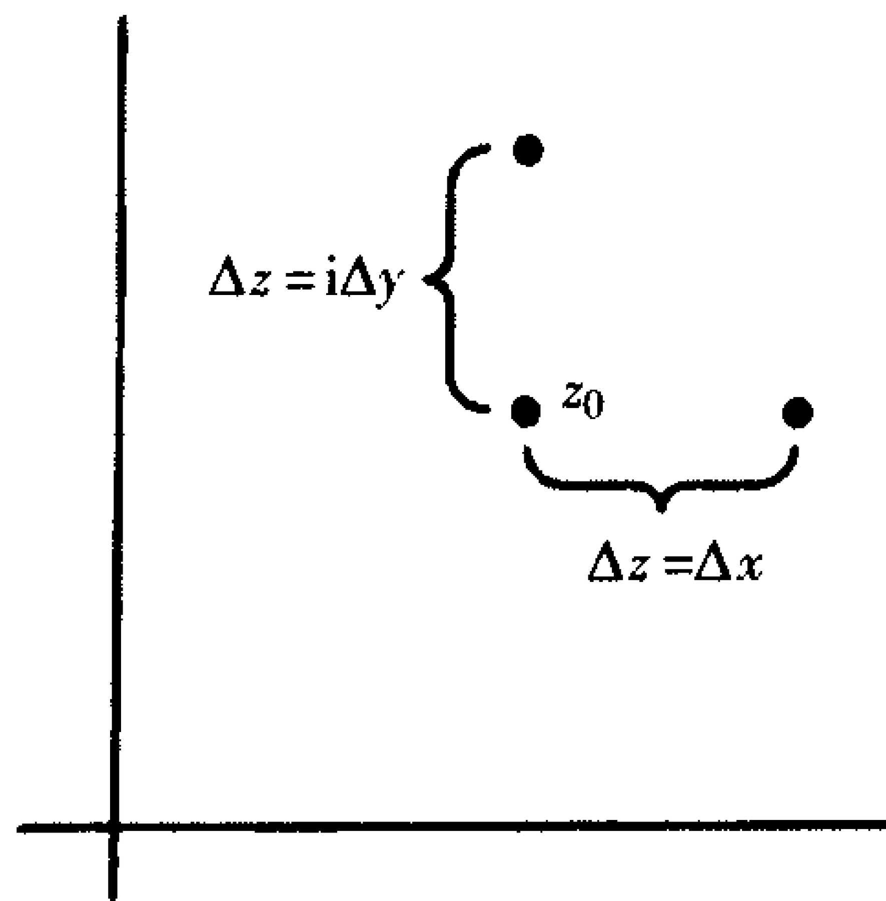


图 2-5 Δz 沿水平与垂直方向趋于 0

用类似的方法可以证明，不论是 x，y，还是 $|z|$ 都是不可微的.

初等函数(诸如 z)的幂的和、积与商都是可微的.

例 3 证明对于任意正整数 n，有

$$\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}. \tag{4}$$

证 由二项式公式(练习 1.1 中习题 27)，得

$$\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\frac{nz^{n-1}\Delta z+\dfrac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^n}{\Delta z}.$$

所以

$$\frac{d}{dz}z^n=\lim_{\Delta z\to 0}\left[nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right]=nz^{n-1}.$$ ■

我们看到，上述证明过程与实变量的情况完全相同. 事实上，模仿初等微积分中的证明方法，由定义 4 可以证明下述结论：

68

定理 3 设 f 与 g 在 z 可微，则

$$(f\pm g)'(z)=f'(z)\pm g'(z), \tag{5}$$

$$(cf)'(z)=cf'(z)\quad (c\text{ 为常数 }), \tag{6}$$

$$(fg)'(z)=f(z)g'(z)+f'(z)g(z), \tag{7}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2},\ \text{若 } g(z)\neq 0. \tag{8}$$

若 g 在 z 可微，f 在 $g(z)$ 可微，则链式法则成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(g(z))=f'(g(z))g'(z). \tag{9}$$

像实值函数的情况一样，读者可以从复值函数的可微性导出它的连续性(见习题 3).

由例 3 及求导法则(5)和(6)可知，任意 z 的多项式

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

在整个平面上是可微的，它的导数是

$$P'(z)=na_nz^{n-1}+(n-1)a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1.$$

于是，由法则(8)，任何 z 的有理函数在它定义域内的每一点都是可微的. 因此，就微分而言，可以把 z 的多项式和有理函数当作实变量一样来处理.

例 4 求下式的导数

$$f(z)=\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{100}.$$

解 除去 $z=\pm\mathrm{i}$(在这里分母为零)外，应用通常的微积分求导法则，有

$$f'(z)=100\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^{99}\frac{(z^2+1)2z-(z^2-1)2z}{(z^2+1)^2}=400z\frac{(z^2-1)^{99}}{(z^2+1)^{101}}.$$ ■

像习题 10 证明的那样，对于复变函数，在孤立点可能是独点可微. 当然，这种情况在实分析里也出现过. 这种函数往往是作为个别情况来处理的. 而通常一般的定理只用于在实直线的开区间上可微的函数. 类似地，对于复变函数，我们也分出如下的一个函数类. 69

定义 5 如果复值函数 $f(z)$ 在一个开集 G 内处处可导，则称它在 G 内**解析**[㊀].

需要指出的是，解析性是针对一个开集而言的，而可微性可能仅仅是在一点成立. 然而，我们的习惯用语"$f(z)$ 在点 z_0 解析"指的是 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内解析. 若一个点不是 $f(z)$ 的解析点，但该点是 $f(z)$ 的解析点的极限点，则称这一点为 $f(z)$ 的奇异点或奇点. 因此，一个关于 z 的有理函数在其分母不为零的每一点都是解析的，其分母的零点都是它的奇点. 如果 $f(z)$ 在全平面上是解析的，则称它为*整函数*. 例如，所有关于 z 的多项式函数都是整函数.

在后面几章中我们将看到，解析性是我们一直在寻找的标准. 对于函数来说，指的是变量 z 的复结构. 事实上，在 5.2 节将证实，所有的解析函数都可以通过 z 唯一表示(不用 x，y 或 $\bar{z}$).

当一个函数 f 由它的实部和虚部 $u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$ 给出时，用定义去证明它的解析性显

㊀ 有些书使用全纯 (holomorphic)或正则 (regular)表示解析. Marquis de Condorcet (1743—1794)首先使用解析函数 (analytic function)这个用语.

然是一件乏味的事情. 在下一节，我们将建立一个用起来非常方便的检验标准，同时，还要证明 e^z 的解析性. 此后，一般情况下就不再使用基于公式(1)的代入法了.

练习 2.3

1. 设函数 $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内有定义. 证明下式

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]/\Delta z$$

等价于

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)]/(z-z_0).$$

2. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 可微，则

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\lambda(z)(z-z_0),$$

其中，当 $z\to z_0$ 时，$\lambda(z)\to 0$.

3. 证明：若 $f(z)$ 在 z_0 处可微，则它在 z_0 处连续. [提示：利用习题 2 的结论.]

70

4. 用定义 4 证明，下列函数处处不可微.

(a) $\mathrm{Re}z$ (b) $\mathrm{Im}z$ (c) $|z|$

5. 证明定理 3 中的求导法则(5)和(7).

6. 证明对于负整数 n，公式(4)也成立.

7. 应用定理 3 中的求导法则(5)~(9)，求下列各函数的导数.

(a) $f(z)=6z^3+8z^2+iz+10$ (b) $f(z)=(z^2-3i)^{-6}$

(c) $f(z)\dfrac{z^2-9}{iz^3+2z+\pi}$ (d) $f(z)=\dfrac{(z+2)^3}{(z^2+iz+1)^4}$

(e) $f(z)=6i(z^3-1)^4(z^2+iz)^{100}$

8. (f'的几何解释)设 f 在 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$. 证明

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|$$

及

$$\lim_{z\to z_0}\{\arg[f(z)-f(z_0)]-\arg(z-z_0)\}=\arg f'(z_0).$$

令 $w=f(z)$ 和 $w_0=f(z_0)$，则对于 z_0 附近的 z，映射 f 的伸长距离由因子 $|f'(z_0)|$ 表示：

$$|w-w_0|\approx|f'(z_0)|\times|z-z_0|.$$

同样，f 旋转从 z_0 出发的向量通过角度 $\arg f'(z_0)$ 表示：

$$\arg(w-w_0)\approx\arg(z-z_0)+\arg f'(z_0).$$

换句话说，对于 z_0 附近的 z，映射 $w=f(z)$ 的作用接近于线性变换

$$w=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)=c+e^{i\phi}\rho(z-z_0).$$

(见练习 2.1 中习题 12.)

9. 找出下列函数的非解析点.

(a) $\dfrac{1}{z-2+3i}$ (b) $\dfrac{iz^3+2z}{z^2+1}$

(c) $\dfrac{3z-1}{z^2+z+4}$ (d) $z^2(2z^2-3z+1)^{-2}$

10. 用定义 4 证明：函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 可微，而在其他任何点都不可微. [提示：记

71

$$\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z}=\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.]$$

11. 讨论下列函数的解析性.

(a) $8\bar{z}+i$　　(b) $\dfrac{z}{\bar{z}+2}$　　(c) $\dfrac{z^3+2z+i}{z-5}$　　(d) x^2-y^2+2xyi

(e) $x^2+y^2+y-2+ix$　　(f) $\left(x+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

(g) $|z|^2+2z$　　(h) $\dfrac{|z|+z}{2}$

12. 设 $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$. 对 n 用归纳法证明

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\cdots+\frac{1}{z-z_n}.$$

[注：$P'(z)/P(z)$ 称为 $P(z)$ 的对数导数(logarithmic derivative).]

13. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都是整函数. 确定下列命题哪些总是对的.

(a) $f(z)^3$ 是整函数.　　(b) $f(z)g(z)$ 是整函数.

(c) $f(z)/g(z)$ 是整函数.　　(d) $5f(z)+ig(z)$ 是整函数.

(e) $f(1/z)$ 是整函数.　　(f) $g(z^2+2)$ 是整函数.

(g) $f(g(z))$ 是整函数.

14. 证明洛必达法则(L'Hôpital's rule)[⊖]：若 f 与 g 在 z_0 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，$g'(z_0)\neq 0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

[提示：记 $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Bigg/\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$.]

15. 利用洛必达法则求极限 $\lim\limits_{z\to i}(1+z^6)/(1+z^{10})$.

16. 设 $f(z)=z^3+1$，$z_1=(-1+\sqrt{3}i)/2$ 和 $z_2=(-1-\sqrt{3}i)/2$. 证明：从 z_1 到 z_2 的线段上不存在点 w 使得

$$f(z_2)-f(z_1)=f'(w)(z_2-z_1).$$

这说明微积分中的中值定理不能推广到复变函数.

17. 设 $F(z)=f(z)g(z)h(z)$，其中 f，g 和 h 都在 z_0 可微. 证明：

$$F'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)h(z_0)+f(z_0)g'(z_0)h(z_0)+f(z_0)g(z_0)h'(z_0).$$

72

2.4 柯西-黎曼方程

函数的解析性预示着它的实部与虚部之间存在着某种形式的联系. 我们很快会看到，在上节定义 4 中式子的右端，令 Δz 趋于零，很容易推导出这种联系的精确表示式. 本节的目的是研究这一联系的性质.

若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 可微，则极限

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

可以通过让 $\Delta z(=\Delta x+i\Delta y)$ 沿复平面上任意方向趋于 0 得到. 当 Δz 沿着水平方向趋于 0 时，则 $\Delta z=\Delta x$，于是

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

⊖ 洛必达(Guillaume De L'Hôpital，1661—1704)写出了第一本微分学教材.

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}\right]+\mathrm{i}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\right]$$

(参考图 2-5). 因为表示式的两个极限恰好是 u 和 v 关于 x 的一阶偏导数，于是

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{1}$$

另一方面，若 Δz 沿着垂直方向趋于 0，则 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y$，于是

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\mathrm{i}\Delta y}\right]+\mathrm{i}\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\mathrm{i}\Delta y}\right].$$

从而

$$f'(z_0)=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{2}$$

而(1)式和(2)式右端都等于同一复数 $f'(z_0)$，所以通过比较等式两端的实部与虚部，即知在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处，下列方程必然成立：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{3}$$

方程(3)称为柯西-黎曼方程[⊖]. 从而我们证明了如下定理.

定理 4 函数 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 在点 z_0 可微的必要条件是柯西-黎曼方程在 z_0 成立.

因此，如果 f 在开集 G 内解析，那么柯西-黎曼方程必然在 G 内每一点成立.

73

有一个便于记忆柯西-黎曼方程的方法. 简单地记住 f 水平方向的导数必定等于垂直方向的导数，可写为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial(\mathrm{i}y)} \quad 或$$

$$\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial(u+\mathrm{i}v)}{\partial y},$$

比较上式等号两端的实部与虚部得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

例 1 证明函数 $f(z)=(x^2+y)+\mathrm{i}(y^2-x)$ 在任一点都不解析.

证 由于 $u(x,\ y)=x^2+y$ 及 $v(x,\ y)=y^2-x$，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-1.$$

因此，柯西-黎曼方程仅在直线 $x=y$ 上同时满足，而不存在使柯西-黎曼方程同时满足的开圆盘. 由定理 4，函数 $f(z)$ 无处解析. ■

⊖ 柯西(Augustin-Louis Cauchy, 1789—1867)，黎曼(Bernhard Riemann, 1826—1866).

需要指出的是，从数学的严密性考虑，仅有柯西-黎曼方程成立并不足以保证函数的可微性；需要增加 u，v 的一阶偏导数连续性的条件假设. 由此得到下述定理.

定理 5 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在包含 z_0 的某个开集 G 内有定义. 若 u，v 的一阶偏导数在 G 内存在且在 z_0 连续[⊖]，并且在 z_0 满足柯西-黎曼方程，则 $f(z)$ 在 z_0 可微.

因此，若 u，v 在 G 内存在一阶连续偏导数，且柯西-黎曼方程在 G 内成立，则 $f(z)$ 在 G 内解析.

证 $f(z)$ 在 z_0 的差商可写为

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\frac{[u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]+\mathrm{i}[v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)]}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}, \tag{4}$$

74

其中 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，$\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y$. 若取 $|\Delta z|$ 充分小，使得以 z_0 为圆心，$|\Delta z|$ 为半径的闭圆盘完全位于 G 中，则上述表达式是合理定义的. 将下面的差值

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)$$

重写为

$$[u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0+\Delta y)]+[u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)]. \tag{5}$$

因为 u 的偏导数在 G 内存在，由中值定理，在 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 间存在数 x^* 满足

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y_0+\Delta y).$$

进而，因为偏导数在 (x_0,y_0) 连续，我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y_0+\Delta y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\varepsilon_1,$$

其中当 $x^*\to x_0$ 和 $\Delta y\to 0$ 时(特别地，当 $\Delta z\to 0$ 时)，函数 $\varepsilon_1\to 0$. 因此，(5)式的前一项可写为

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0+\Delta y)=\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\varepsilon_1\right].$$

对(5)式的后一项用类似方法处理，并引进函数 ε_2. 然后以同样的方式处理(4)式中 v 的差值，最终得到

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon_1+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\varepsilon_3\right]+\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon_2+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\varepsilon_4\right]}{\Delta x+i\Delta y},$$

其中每个偏导数在 (x_0,y_0) 的值都可以计算出来，且当 $\Delta z\to 0$ 时，$\varepsilon_i\to 0\ (i=1,2,3,4)$. 由柯西-黎曼方程把差商表示为

$$\frac{\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\mathrm{i}\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right]}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{\lambda}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}, \tag{6}$$

其中 $\lambda:=\Delta x(\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3)+\Delta y(\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4)$. 因为

⊖ 连续性假设可以去掉而不影响本定理的正确性.

$$\left|\frac{\lambda}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right| |\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3| + \left|\frac{\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right| |\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4|$$
$$\leqslant |\varepsilon_1+\mathrm{i}\varepsilon_3| + |\varepsilon_2+\mathrm{i}\varepsilon_4|,$$

则(6)式的最后一项当 $\Delta z \to 0$ 时趋于 0，故

75

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0);$$

即 $f'(z_0)$ 存在. ■

由定理 4 可知，例 1 中的函数 $f(z)$ 无处解析，但是它在直线 $x=y$ 上任一点可微.

在 1.4 节中，我们曾经指出，指数函数具有很好的解析性质，现在来证明它.

例 2 证明指数函数 $f(z)=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$ 是整函数，并求它的导数.

证 因为 $\partial u/\partial x=\mathrm{e}^x\cos y$，$\partial v/\partial y=\mathrm{e}^x\cos y$，$\partial u/\partial y=-\mathrm{e}^x\sin y$ 及 $\partial v/\partial x=\mathrm{e}^x\sin y$，从而对平面上任一点，$u$，$v$ 的所有一阶偏导数连续且满足柯西-黎曼方程. 所以 $f(z)$ 是整函数. 由公式(1)，我们得到

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x\cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y.$$

无疑，$f'(z)=f(z)$. ■

作为这些技巧的进一步应用，我们证明下面类似于实函数的一个著名定理.

定理 6 *若 $f(z)$ 在区域 D 内解析且其导数处处为 0，则 $f(z)$ 在内 D 为一常数.*

在定理证明之前，我们注意到区域的连通性是一个本质的性质. 实际上，如果 $f(z)$ 由下式定义：

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } |z|<1, \\ 1 & \text{如果 } |z|>2, \end{cases}$$

则 $f(z)$ 在它的定义域(它不是一个区域)上解析，$f'(z)=0$，但 $f(z)$ 不是一个常数.

定理 6 的证明 由于在 D 内 $f'(z)=0$，由公式(1)和公式(2)，u，v 的所有一阶偏导数在 D 内都等于零，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

因此，由 1.6 节定理 1 知，u，v 在 D 内都为常数，故 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内也为常数. ■

定理 6 的一个简单推论是：如果 f 和 g 是区域 D 内有相同导数的两个解析函数，那么在区域 D 内，$f=g+$ 常数(见习题 7).

76

应用定理 6 和柯西-黎曼方程可以进一步证明，若解析函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足下列条件之一，则 f 必为常数：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, f(z) \text{ 于 } D \text{ 内为常数;} \\ &\mathrm{Im}\, f(z) \text{ 于 } D \text{ 内为常数;} \\ &|f(z)| \text{ 于 } D \text{ 内为常数.} \end{aligned} \tag{7}$$

其证明留作练习.

练习 2.4

1. 利用柯西-黎曼方程证明下列函数无处可微.

(a) $w=\bar{z}$　　(b) $w=\mathrm{Re}z$　　(c) $w=2y-\mathrm{i}x$

2. 证明 $h(z)=x^3+3xy^2-3x+\mathrm{i}(y^3+3x^2y-3y)$ 在坐标轴上可微，但处处不解析.

3. 利用定理 5 证明 $g(z)=3x^2+2x-3y^2-1+\mathrm{i}(6xy+2y)$ 是整函数，并将它写成 z 的表达式的形式.

4. 设

$$f(z)=\begin{cases}(x^{4/3}y^{5/3}+\mathrm{i}x^{5/3}y^{4/3})/(x^2+y^2) & \text{如果 } z\neq 0,\\ 0 & \text{如果 } z=0.\end{cases}$$

证明：柯西-黎曼方程在点 $z=0$ 成立但 f 在这点不可微. [提示：当 Δz 分别沿着实轴与直线 $y=x$ 趋于零时，考虑差商 $f(\Delta z)/\Delta z$.]

5. 证明函数 $f(z)=\mathrm{e}^{x^2-y^2}[\cos(2xy)+\mathrm{i}\sin(2xy)]$ 是整函数，并求它的导数.

6. 若 u 和 v 都由极坐标 $(r,\ \theta)$ 表示，证明柯西-黎曼方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

[提示：当 z 沿着射线 $\arg z=\theta_0$ 和沿着圆周 $|z|=r_0$ 趋于 $z\to z_0=r_0e^{\mathrm{i}\theta_0}$ 时，考虑差商 $(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$.]

7. 证明：若两个解析函数 f 和 g 在区域 D 内有相同的导数，则它们只相差一个常数. [提示：考虑 $f-g$.]

8. 证明：若 f 在区域 D 内解析，$\mathrm{Re}f(z)$ 或 $\mathrm{Im}f(z)$ 在 D 内为常数，则 $f(z)$ 在区域 D 内必为常数.

9. 用反证法证明，函数 $F(z)=|z^2-z|$ 在条件(7)下无处可微.

77

10. 若 $f(z)$ 在区域 D 内解析且取实值，则 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

11. 若 $f(z)$、$\overline{f(z)}$ 在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

12. 证明：若 f 在区域 D 内解析，且 $|f(z)|$ 是区域 D 内的常数，则函数 f 在区域 D 内为常数. [提示：$|f|^2$ 为常数，所以在 D 内 $\partial|f|^2/\partial x=\partial|f|^2/\partial y=0$，$f'(z)=0$，利用这两个关系式及柯西-黎曼方程可得 $f'(z)=0$.]

13. 若 $f(z)$，$|f(z)|$ 都在区域 D 内解析，则 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

14. 证明：若解析函数 $w=f(z)$ 将区域 D 映射为直线的一部分，则 f 在区域 D 内必为常数.

15. 从 xy 平面到 uv 平面的一个映射

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

的雅可比行列式(Jacobian)由下列行列式定义：

$$J(x_0,y_0):=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix},$$

其中偏导数全都在 $(x_0,\ y_0)$ 处取值. 证明：若 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 解析，则 $J(x_0,\ y_0)=|f'(z_0)|^2$.

16. 正如上一节所讨论的，函数解析性的概念要求函数 $f(x,\ y)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 只能写成由 $x+\mathrm{i}y$ 而不是 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 表示的式子. 为了使这个概念更加明确，引进变量替换

$$\begin{cases}\xi=x+\mathrm{i}y\\ \eta=x-\mathrm{i}y\end{cases}\quad \text{或者}\quad \begin{cases}x=(\xi+\eta)/2\\ y=(\xi-\eta)/2\mathrm{i}\end{cases}$$

得到函数

$$\tilde{f}(\xi,\eta):=f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)).$$

(a) 利用链式法则证明

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

78

(b)因为 η 和 $\bar{z}$ 相同，所以说“f 与 $\bar{z}$ 无关”等价于

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{z}} = 0.$$

证明这个条件与 f 的柯西-黎曼方程相同.

2.5 调和函数

二维拉普拉斯方程[⊖]

$$\nabla^2\phi := \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

的解是数学物理中最重要的函数之一. 在二维自由场，与标量磁场强度一样，可用方程(1)的解来描述静电场的电势；相应场中任意方向的场强可由 $\phi(x, y)$ 的方向导数来表示. 在理想状态下，二维流体的流动问题也可由这类函数来描述；如果一个由金属丝制作的环足够平直的话，则 ϕ 也可被理解为穿过该环绷紧的薄膜的排水量. 下一节将把方程(1)的解作为一个模型讨论恒温分布问题.

就应用数学而言，解析函数论最重要的应用之一是，满足方程(1)的解非常之多. 为此，我们引入下面的标准术语.

定义 6 若实函数 $\phi(x, y)$ 在区域 D 内具有连续二阶偏导数并且满足拉普拉斯方程(1)，则称 $\phi(x, y)$ 是 D 内的**调和函数**.

如下面定理所述，调和函数起源于解析函数的实部与虚部.

定理 7 若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析，则函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都是 D 内的调和函数.

证 在第 4 章，我们将证明任何解析函数的实部与虚部都有任意阶连续偏导数，不妨先假定这个结论成立. 在这个条件下，由初等微积分知，u，v 具有任意阶的混合偏导数，即

79

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2}$$

对一阶偏导数应用柯西-黎曼方程，可把方程(2)变成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这个等式等价于方程(1). 因此，v 在 D 内调和，同理可证 u 也在 D 内调和. ■

反之，如果给定了(譬如说)开圆盘内的一个调和函数 $u(x, y)$，则可找到另一个调和函数 $v(x, y)$，使得 $u + iv$ 为这个圆盘内 z 的解析函数. 这个函数 v 称作 u 的一个共轭调和函数. 已知 u，可以应用柯西-黎曼方程求出 v，下面的例子将给出具体方法.

例 1 构造一个实部为 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ 的解析函数.

解 由于

⊖ 拉普拉斯(Marquis Pierre - Simon de Laplace, 1749—1827).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-6x=0,$$

所以 u 在全平面内调和. 下面来求 u 的共轭调和函数 $v(x, y)$ 使得满足柯西-黎曼方程. 从而必有

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \tag{3}$$

及

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy-1. \tag{4}$$

如果把 x 看作常量并对方程(3)关于 y 进行积分, 得

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+\text{constant},$$

其中"constant"应该是 x 的任意阶可微函数, 而与 y 无关. 因此, 可将它写为

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+\psi(x).$$

为了求出 $\psi(x)$, 把上式代入(4), 得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+\psi'(x)=6xy-1. \tag{5}$$

[80]

可得 $\psi'(x)\equiv-1$, 所以 $\psi(x)=-x+a$, 其中 a 为某个(真正的)常数. 由此得到 $u(x, y)$ 的一个共轭调和函数

$$v(x,y)=3x^2y-y^3-x+a,$$

从而得到解析函数

$$f(z)=x^3-3xy^2+y+\mathrm{i}(3x^2y-y^3-x+a),$$

它可以被写为 $z^3-\mathrm{i}(z-a)$. ■

上述方法对于求一个圆盘内调和函数 $u(x, y)$ 的共轭调和函数总是有效的, 对此可参考本节的习题 20[⊖]. 这样, 通过研究调和函数, 可以对解析函数有深入的了解.

一个解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数, 它们在 xy 平面上各自生成一个曲线族, 称为水平截线或等位线, 即

$$u(x,y)=\text{constant} \tag{6}$$

及

$$v(x,y)=\text{constant}. \tag{7}$$

若把 u 看作电磁场中的电势, 则曲线(6)就是等势线. 如果将 u 看作温度, 曲线(6)就是等温线.

对于函数 $f(z)=z^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$, 水平截线 $u(x, y)=x^2-y^2=$常数就是以直线 $y=\pm x$ 为渐近线的双曲线(如图 2-6a 所示); $v(x, y)=2xy=$常数则是以坐标轴为渐近线的双曲线(如图 2-6b 所示).

[81]

由图 2-7 可以看到, 如果把两族水平截线叠合起来, 它们之间的交角都是直角. 对于解析

⊖ 并非任意区域上的调和函数都存在调和共轭. 课后习题 21 提供了一个区域为带孔圆盘(punctured disk)时的反例.

函数 z^3(图 2-8)，$1/z$(图 2-9)和 e^z(图 2-10)的水平截线也是如此. 这并不是偶然的；解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部的水平截线除去它们在交叉点处导数 $f'(z)=0$ 外都是这样. 下面利用柯西-黎曼方程说明这一点.

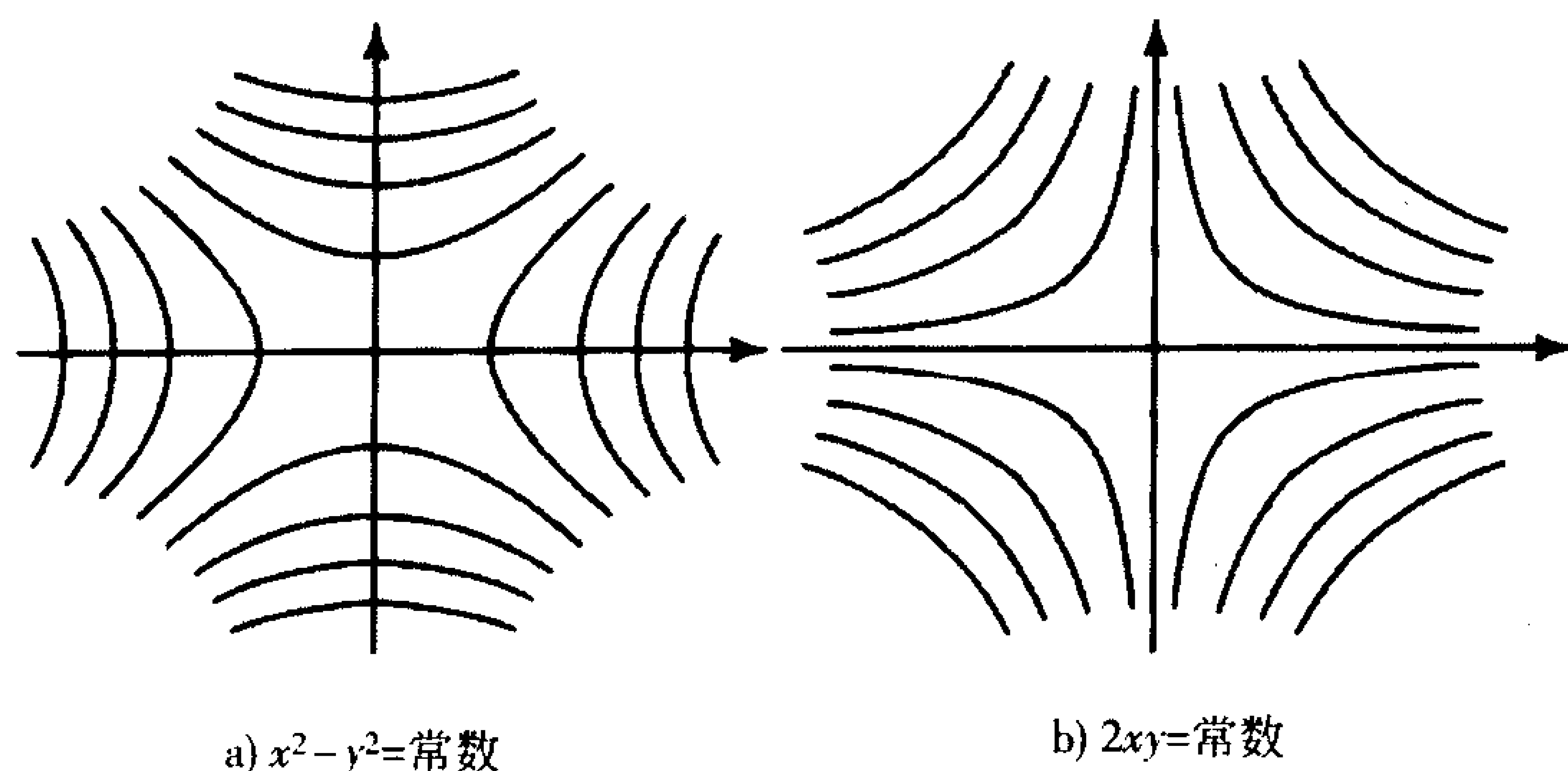


图 2-6 z^2 的实部与虚部的水平截线

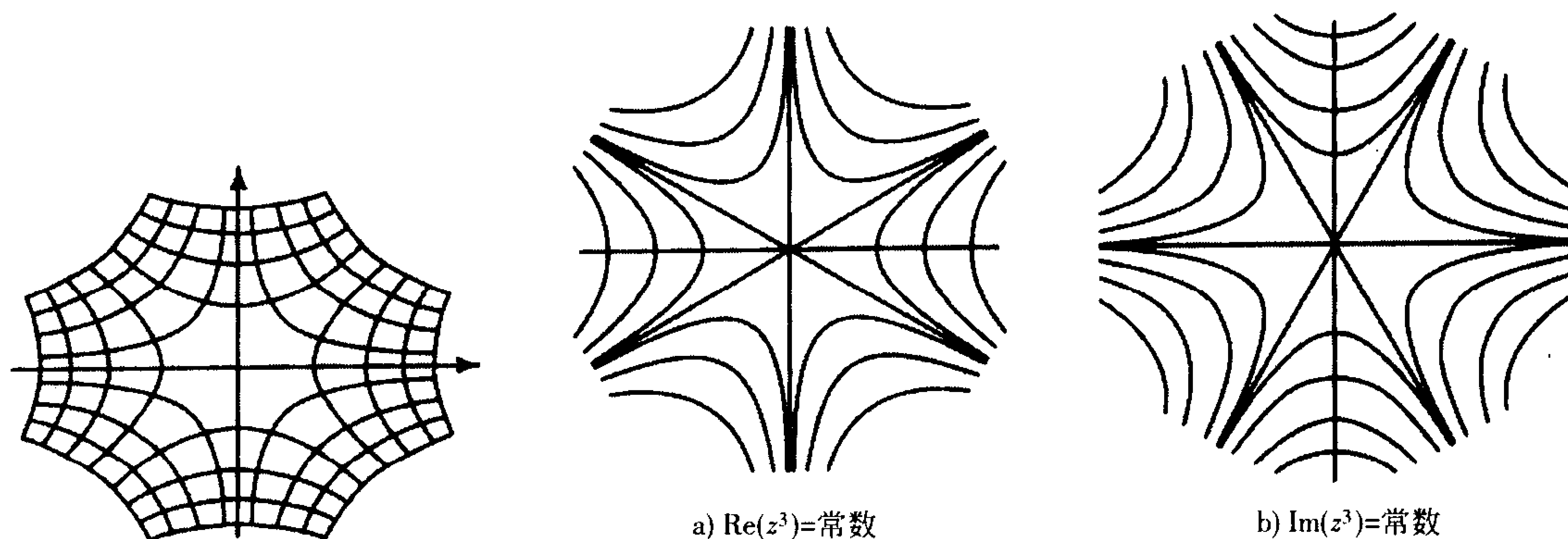


图 2-7 图 2-6 中水平截线的重叠

图 2-8 z^3 的实部与虚部的水平截线

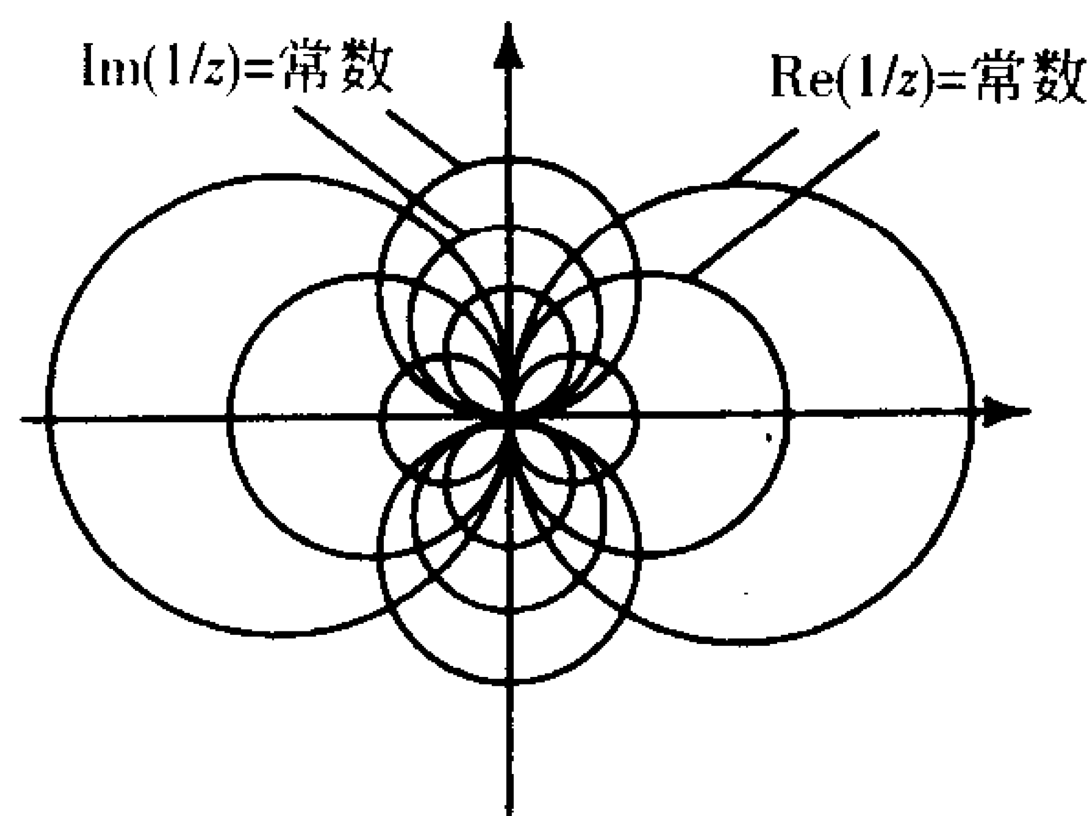


图 2-9 $1/z$ 的实部与虚部的水平截线

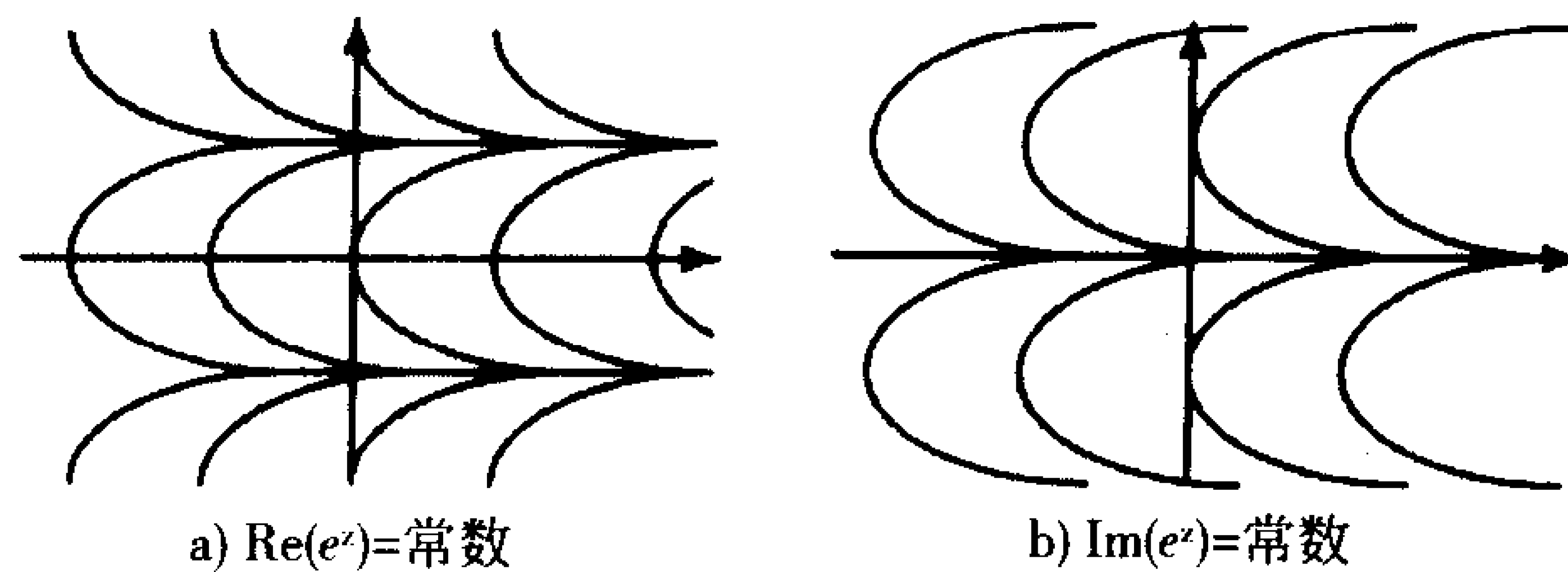


图 2-10 e^z 的实部与虚部的水平截线

我们知道，向量$[\partial u/\partial x, \partial u/\partial y]$为 u 的斜率且与 u 的水平截线正交. 同样，向量$[\partial v/\partial x, \partial v/\partial y]$为 v 的斜率且与 v 的水平截线正交. 由柯西-黎曼方程，这些斜率向量的标量(点)积为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

因此，若这些斜率向量不为0，则它们是正交的，所以水平截线也是如此. 因此调和函数与其共轭调和函数的水平截线在交点正交.

下面的例子说明如何应用解析函数理论求解以水平截线为边界区域的拉普拉斯方程.

例2 求一个函数 $\phi(x, y)$，使得它在右半平面上曲线 $x^2-y^2=2$ 与 $x^2-y^2=4$ 之间的区域内调和，并在左边边界上取值为3，右边边界上取值为7(如图2-11所示).

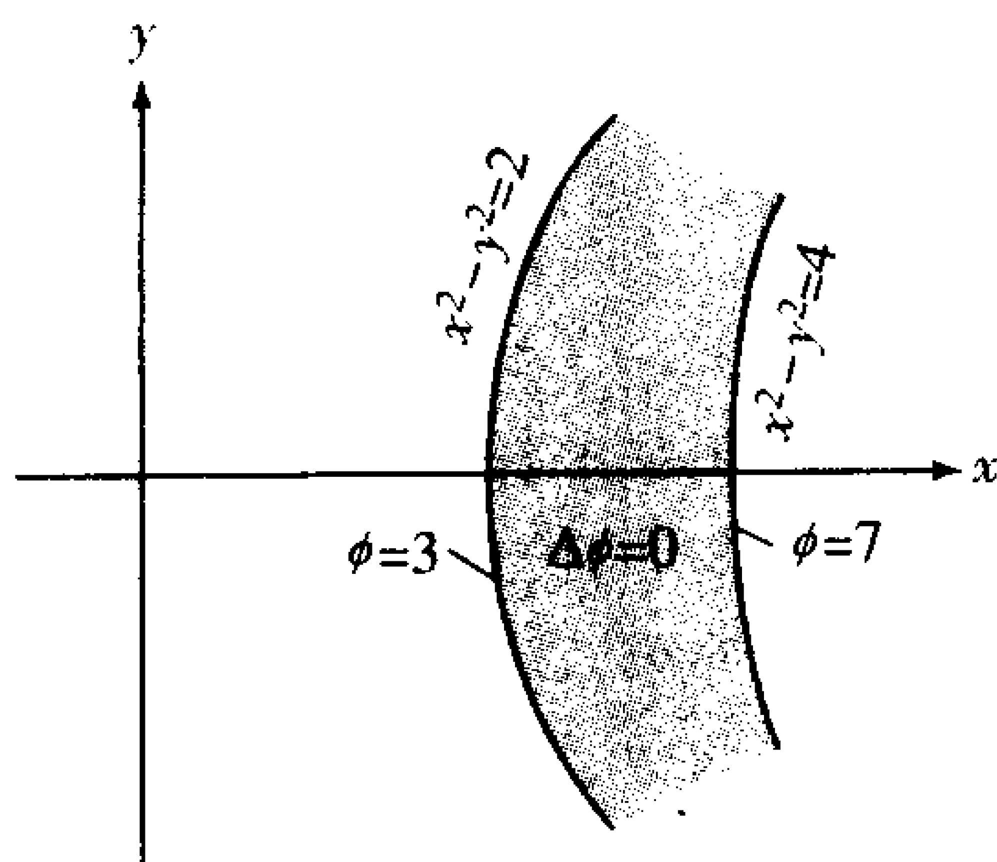


图2-11 例2区域中的拉普拉斯方程

解 将 x^2-y^2 看作解析函数 z^2 的实部，则所给边界曲线是一个已知调和函数的水平截线. 为满足题中所要求的边界条件，考虑函数

$\phi(x,y)=A(x^2-y^2)+B=\mathrm{Re}(Az^2+B)$， A 与 B 为实数，

根据题设条件，适当选取 A 和 B. 当 $x^2-y^2=2$ 时，由条件，$\phi(x, y)=3$，代入 $\phi(x, y)$ 的表达式，得

$$A(2)+B=3.$$

当 $x^2-y^2=4$ 时，由条件，$\phi(x, y)=7$，代入 $\phi(x, y)$ 的表达式，得

$$A(4)+B=7.$$

82~83

解这两个关于 A，B 的方程即可得到所求函数

$$\phi(x,y)=2(x^2-y^2)-1.$$ ■

这类例子很容易找到. 在下一章和第7章中将给出更多应用方面的例子.

练习2.5

1. 验证下列解析函数的实部与虚部满足拉普拉斯方程.

   (a) $f(z)=z^2+2z+1$　　(b) $g(z)=\dfrac{1}{z}$　　(c) $h(z)=e^z$

2. 求出形如 $ax^2+bxy+cy^2$ 的最一般的调和多项式.
3. 证明下列每个给定的函数 u(在它的定义域内)是调和的，并求 u 的一个共轭调和函数.

   (a) $u=y$.　　(b) $u=e^x\sin y$.

   (c) $u=xy-x+y$.　　(d) $u=\sin x\cosh y$.

   (e) $u=\ln|z|$，其中 $\mathrm{Re}\,z>0$.　　(f) $u=\mathrm{Im}\,e^{z^2}$.

4. 证明：若 $v(x, y)$ 为区域 D 内 $u(x, y)$ 的共轭调和函数，则区域 D 内 $u(x, y)$ 的任一共轭调和函数必为 $v(x, y)+a$ 的形式，其中 a 为实常数.
5. 证明：若 v 为 u 的共轭调和函数，那么 $-u$ 为 v 的共轭调和函数.
6. 证明：若 v 为区域 D 内 u 的共轭调和函数，那么 uv 在区域 D 内调和.

84

7. 求一个函数 $\phi(x, y)$，使得它在竖直无穷带形

   $$\{z: -1\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 3\}$$

   内调和，且在左边缘上取值为0，在右边缘上取值为4.
8. 设函数 u，v 在区域 D 内调和，问

(a) $u+v$ 是否必在区域 D 内调和?

(b) uv 是否必在区域 D 内调和?

(c) $\partial u/\partial x$ 是否在区域 D 内调和?(可以利用我们将在第 4 章证明的结论——调和函数具有任意阶连续偏导数.)

9. 求一个函数 $\phi(x, y)$,使得它在第一象限内曲线 $xy=2$ 与 $xy=4$ 之间的区域内调和,且在下边缘上取值为 1,在上边缘取值为 3. [提示:考虑 z^2.]

10. 证明拉普拉斯方程的极坐标 (r, θ) 形式为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}=0.$$

11. 设 $f(z)=z+1/z$. 证明水平截线 $\operatorname{Im} f(z)=0$ 由实轴($z=0$ 除外)与圆周 $|z|=1$ 组成. [水平截线 $\operatorname{Im} f(z)=$ 常数可用来解释流体流经柱状体时形成的流线.]

12. 证明:若 r,θ 为极坐标,则函数 $r^n\cos n\theta$ 与 $r^n\sin n\theta$ 为关于 x 与 y 的调和函数,其中 n 为整数. [提示:利用棣莫弗公式.]

13. 求一个函数,使得它在以非负 x 轴与半直线 $y=x(x\geq 0)$ 为边界的楔形域内调和,且在边界上趋于 0 但不等于 0. [提示:参考习题 12.] 在某些理想条件下,该函数的水平截线可解释为流体从一个楔形物体内部流出时的流线.

85

14. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析且不取 0 值. 证明 $\ln|f(z)|$ 在 D 内调和.

15. 求一个函数 $\phi(z)$,使得它在以 $|z|=1$ 及 $|z|=2$ 为边界的同心圆环(环形域)内调和,且在内圆周上 $\phi=0$,在外圆周上 $\phi(2e^{i\theta})=5\cos 3\theta$. [提示:考虑 z^n 和 z^{-n}.]

16. 求一个函数 $\phi(z)$,使得它在 $|z|=3$ 的外部调和,在 $|z|=3$ 上趋于 0 但不恒等于 0. [提示:参考习题 14.]

17. 求一个在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内调和,在 $\operatorname{Im} z\geq 0$ 上连续的函数 $\phi(x, y)$,使得对于所有的 x,有

(a) $\phi(x, 0)=x^2+5x+1$.

(b) $\phi(x, 0)=2x^3/(x^2+4)$.

[提示:因为 $2z^3/(z^2+4)$ 在上半平面上 $z=2i$ 处不解析,故 $\phi=\operatorname{Re}[2z^3/(z^2+4)]$ 不合适. 可考虑

$$\frac{2x^3}{x^2+4}=\frac{x^2}{x-2i}+\frac{x^2}{x+2i}=2\operatorname{Re}\frac{x^2}{x+2i},$$

求出 ϕ.]

18. 证明:若 $\phi(x, y)$ 调和,则 $\phi_x - i\phi_y$ 解析(可假定 ϕ 具有各阶连续偏导数).

19. 求一个函数 $\phi(z)$,使得它在单位圆周 $|z|=1$ 的外部调和,满足

$$\phi(e^{i\theta})=\cos^2\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

且沿着所有大的半径 r,$\phi(re^{i\theta})$ 趋于常值1/2. [提示:回忆函数 z^{-n},它在单位圆周的外部解析,沿着大的半径 r 它趋于零.]

20. 利用例 1 的方法,证明任何在圆盘内的函数 $u(x, y)$ 都存在共轭调和函数 $v(x, y)$. [提示:唯一可能出现的难点是对应于方程(5)的那一步,这时,为了求出 $\psi'(x)$,必须确信在所有情况下,变量 y 都能被消掉. 由于 u 是调和函数,因此这是必然的.]

21. 证明:尽管 $u=\ln|z|$ 在复平面上除去点 $z=0$ 的区域(即在区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$)内调和,但它没有在区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内的共轭调和函数 v. 换句话说,证明不存在函数 v 使得 $\ln|z|+iv(z)$ 在区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内解析. [提示:若 $\ln|z|+iv(z)$ 在 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内解析,则除去负实轴外,$v(z)=\operatorname{Arg} z+a$.]

22. 证明:若 $\phi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 调和,则由下式定义的函数 u 和 v 满足柯西–黎曼方程:

$$u(x,y)=\phi_x\phi_y+\psi_x\psi_y$$

及

$$v(x,y) = \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \psi_x^2 - \phi_y^2 - \psi_y^2).$$

86

*2.6 调和函数的一个实例——恒温

对于调和函数来说，借助一个熟悉的物理模型的帮助来记住它们性质是有益的. 下面将看到，温度均衡的厚平板恰好起到了这个作用.

图 2-12 是一块由导热材料做成的厚度均匀的平板，诸如一块铜板或者微电子元件的陶瓷基片等. 由于它的厚度是均匀的，所以它的上、下两个面都与 xy 平面平行. 假定板的表面是隔热的，在竖直方向没有热量流出. 这样，板的均衡温度 T 是一个关于 x，y 的函数

$$T = T(x,y).$$

因为板的温度分布由热源(或散热器)以及置于边缘的绝热材料维持，所以有如图 2-13 显示的等温线.

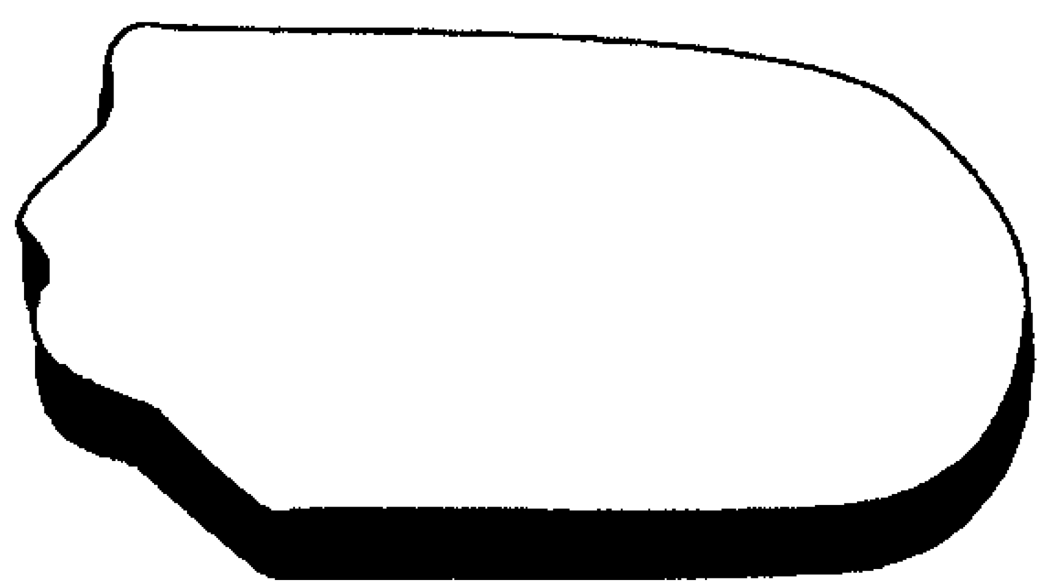


图 2-12 导热板

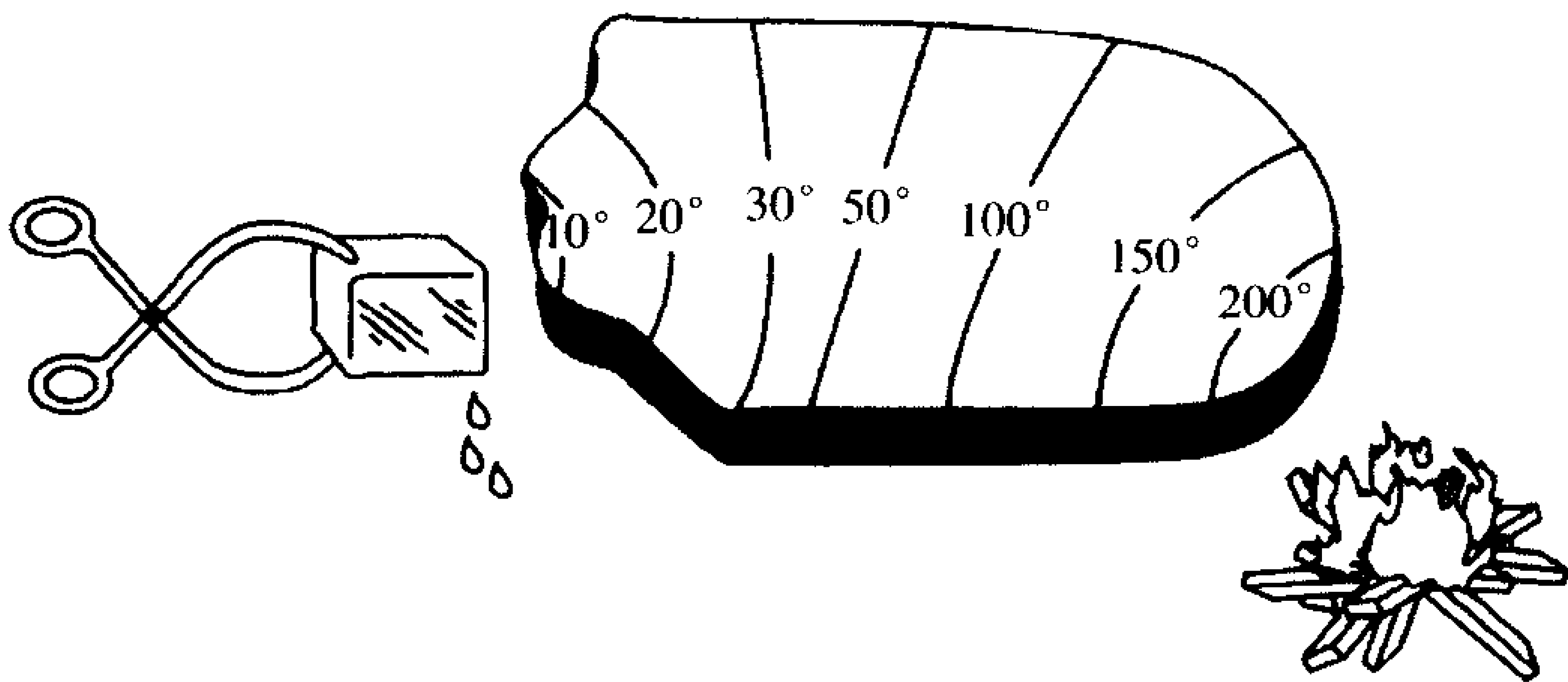


图 2-13 汇和源

板的温度一旦达到均衡状态，$T(x, y)$就是一个调和函数，即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

现在给出它在物理上的解释. 如图 2-14 所示，对于厚板内的一个(边长为 s 的)小正方形，由热传导的傅里叶法则知，通过小正方形每一边的热流的比率与在热流方向上温度变化的比率成比例. 因此通过 AB 与 CD 方向的热流与$\partial T/\partial x$ 成比例，通过 BC 与 AD 方向的热流与$\partial T/\partial y$ 成比例(实际上，因为热流是从热到冷流动的，所以与该正方形的截面积及材料有关的比例常数为负数.). 热流被描述为通过 AB 与 AD 进入正方形，通过 BC 与 CD 离开正方形. 因此，热的净流出量与

87

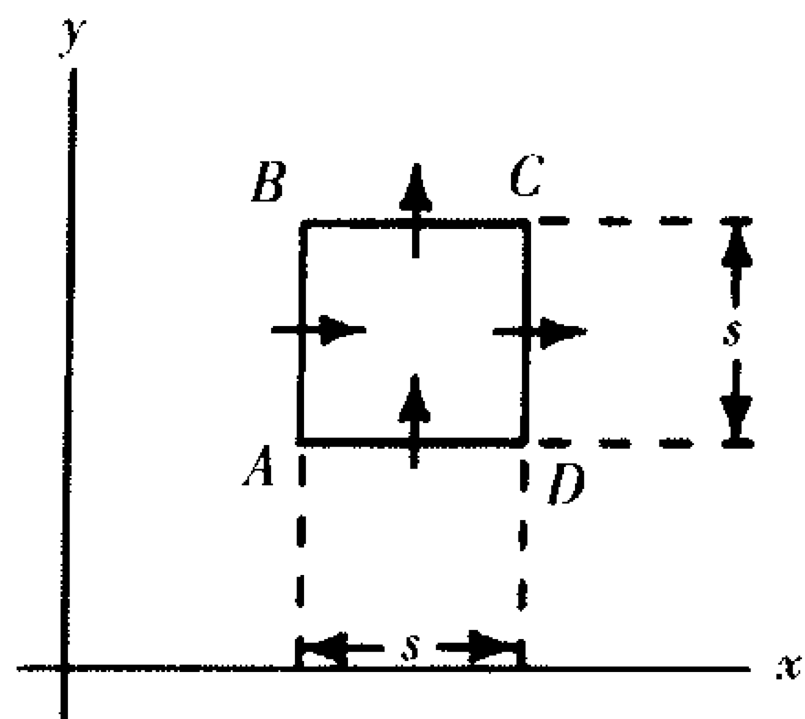


图 2-14 热流

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{CD} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{AB} + \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{BC} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{AD}$$

成比例.

对于小尺度的 s，由于一阶导数的差可由二阶导数来近似，因此热的净流量又与

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}s + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}s \tag{2}$$

成比例. 当温度达到均衡状态时，这个正方形材料不再变凉(或加热)，所以热的净流量为 0. 用 s 除表达式(2)，则 $T(x, y)$满足方程(1).

温度分布中出现调和函数这一事实使我们对它们的数学性质产生了一些猜想. 例如，观察图 2-15 的等温线，它们显示"热点"位于板的内部. 这种情况不会发生在衡温状态；因为热量总是从高向低流动，所以高温点的温度会降下来. 当然，图中的情形可以通过在板的下面放置热源来维持，而由于我们假定热源只是放置在边缘上，从而已经排除了这种可能. 可以断言，温度分布决不会出现这种内部最高. 调和函数在这种情况的严格公式表示和一般化结论在第 4 章称为最大值原理，即调和函数不可能在区域的内部达到最大值，除非它在区域内恒为常数.

另一个例子是下面的一个试验. 如图 2-16 所示，通过外部热源使板的边缘保持固定的温度. 把我们能够(通过某种温度调节炉)控制温度的某一小段边缘除外. 虽然从物理层面上讲，只要火炉的温度充分高，板上任意内点的温度都可以达到任意指定的值，但是我们不可能把整块板的内部各点的温度按照预先的设想去重复实验一遍.

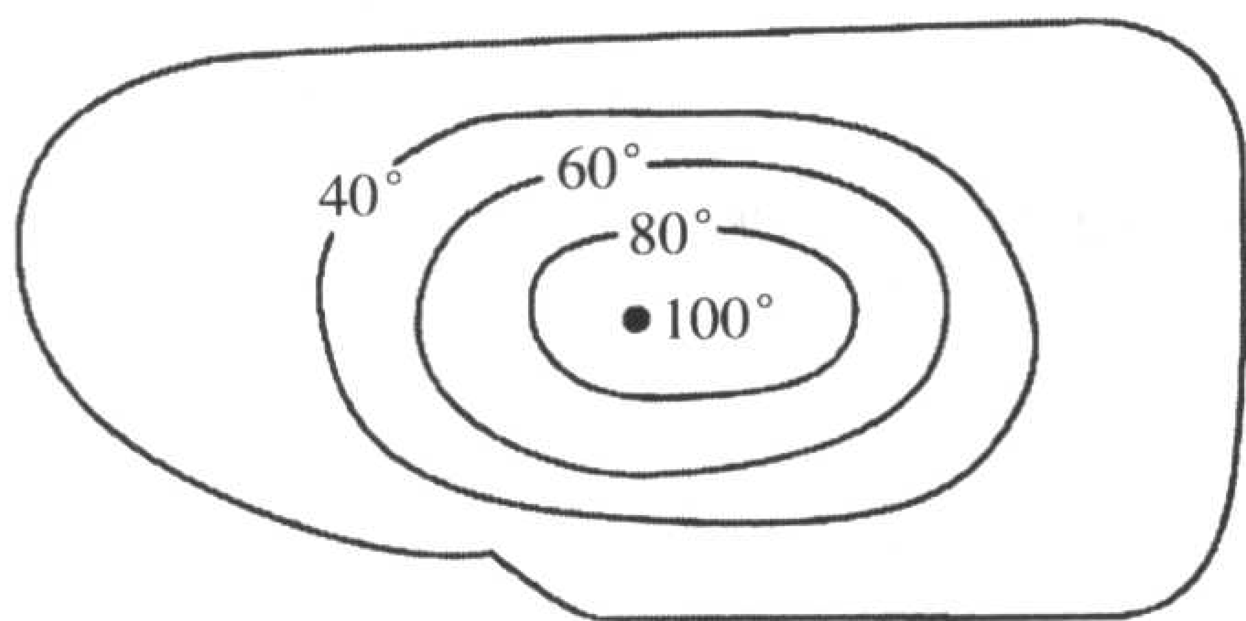


图 2-15 等温线

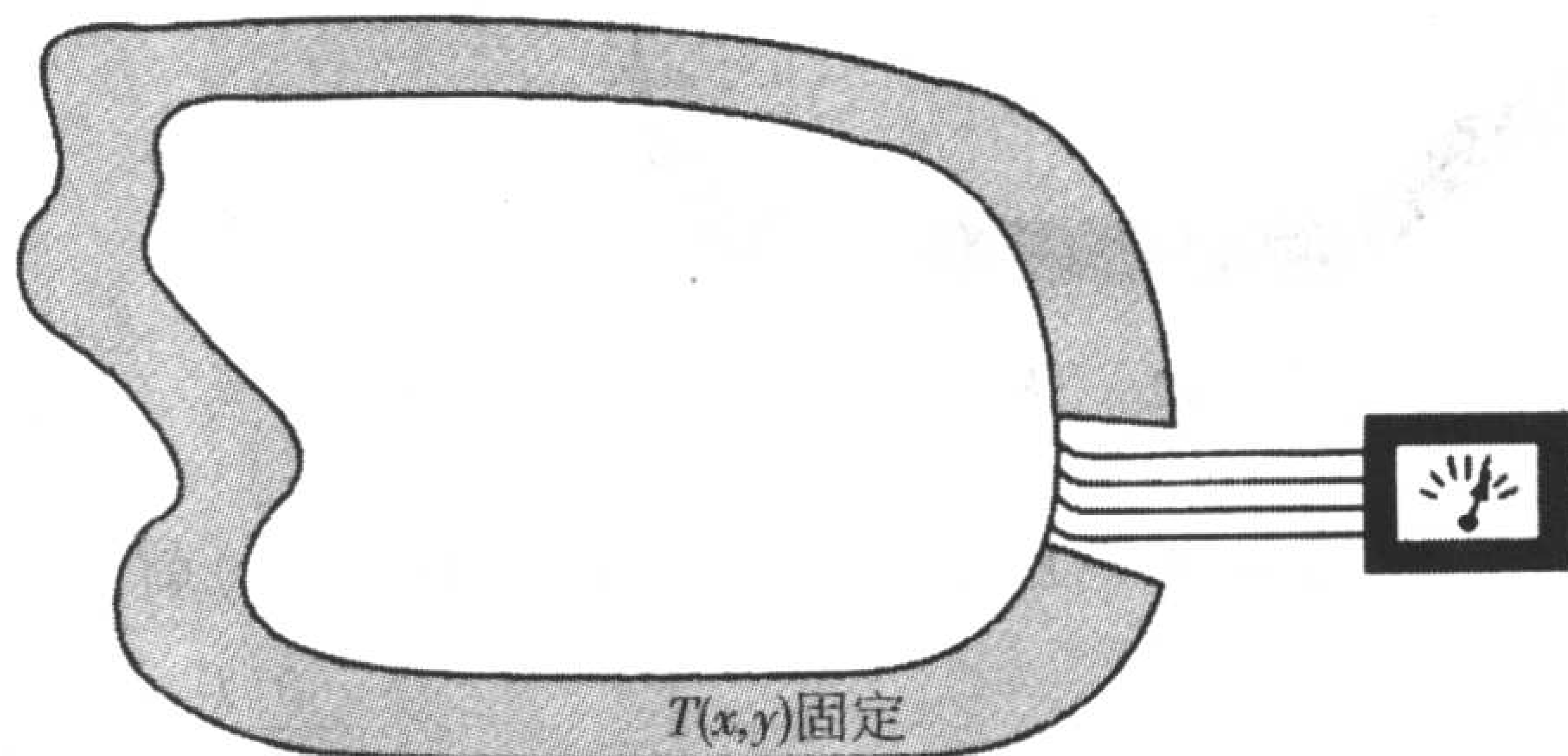


图 2-16 可调节的边缘温度

我们的期望是内部的温度完全由边缘的温度分布来控制[⊖]. 这确实是一个调和函数边值性质的一个例子，在第 4 章中将要研究的泊松(Poisson)公式，会明确表达这种函数的边值与内部值之间的关系.

88

练习 2.6

1. 利用物理直觉，在板的均衡温度状态下，绘出由图 2-17 所示的边缘温度的等温线族.

2. 绘出图 2-18 中边缘温度分布的等温线. 它的结构与最大模原理矛盾吗?

3. 绘出图 2-19 中边缘温度分布的等温线. 它的结构与最大模原理矛盾吗?

⊖ 请注意，零绝对温度的热力学事实，限制了我们冷却板内部任意点的能力.

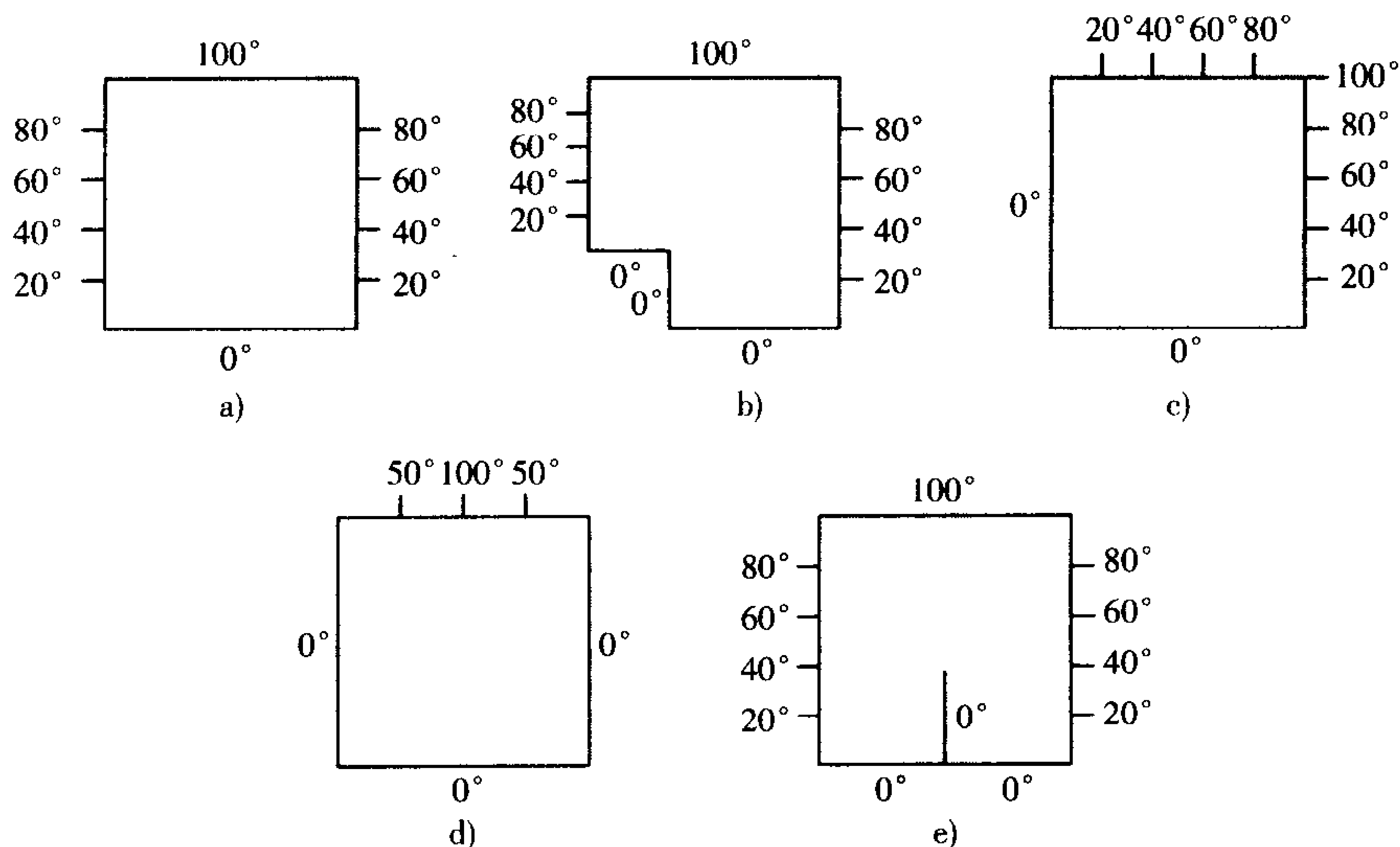


图 2-17　等温线的结构(习题 1)

89～90

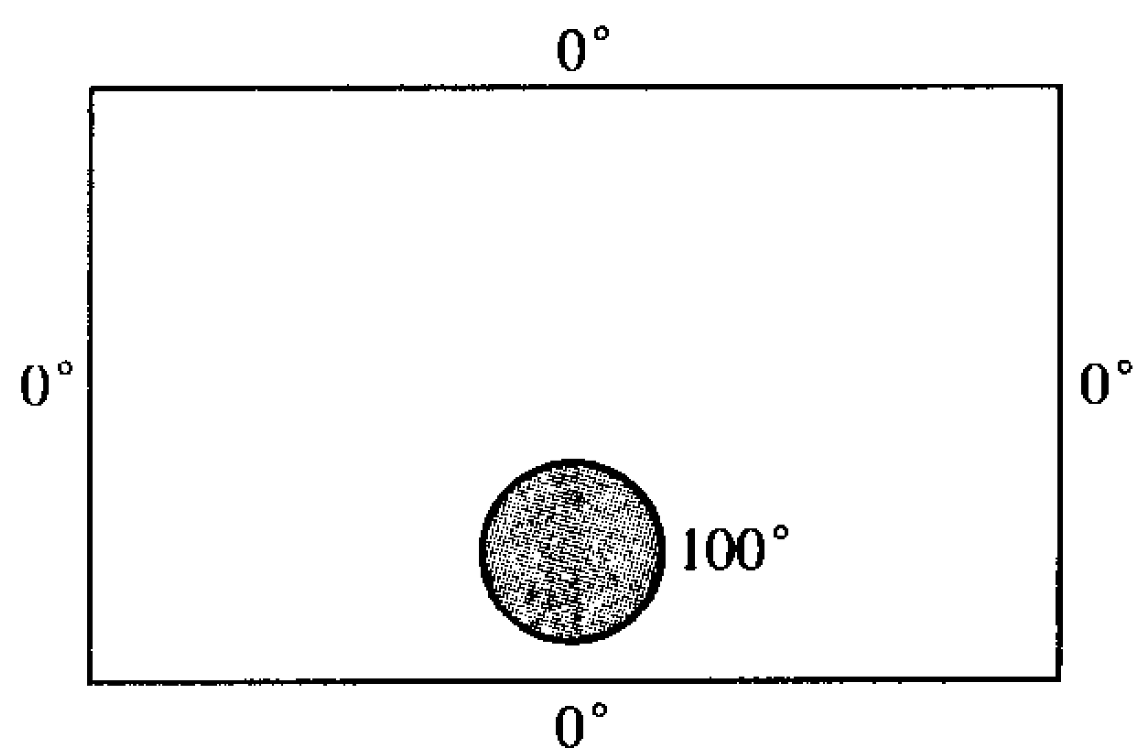


图 2-18　等温线的结构(习题 2)

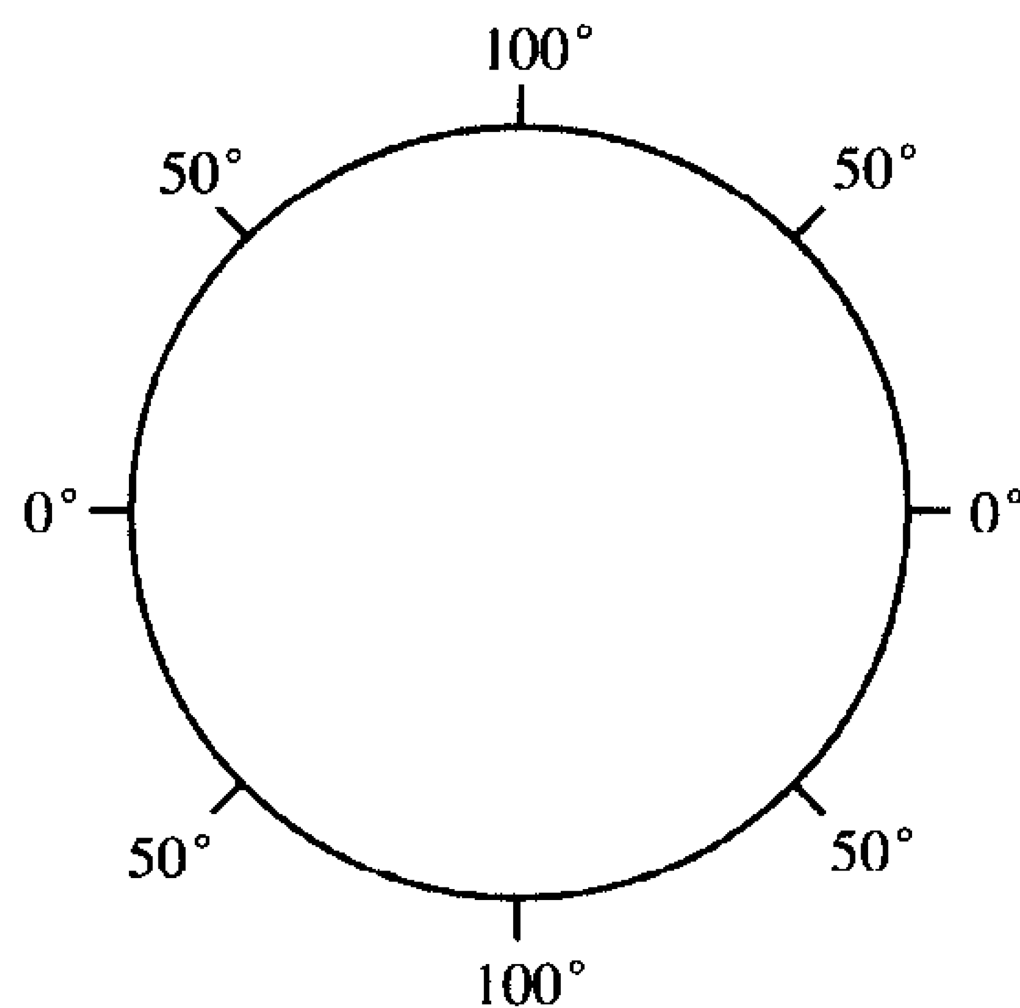


图 2-19　等温线的结构(习题 3)

*2.7　迭代映射——茹利亚集与芒德布罗集

如果把一个数输入计算器，按下函数键 x^2，然后一直不停地反复按它，会有什么情况发生呢？计算器计算了这个数的平方后，接着计算这个结果的平方，然后再对新结果计算它的平方，如此这般一直计算下去；这相当于对函数 $f(x)=x^2$ 一直作迭代运算. 当这个迭代过程用复数进行时，就会变得非常有趣；对于复数 z_0，点列 z_0，$f(z_0)$，$f(f(z_0))$，$f(f(f(z_0)))$，…称为复平面上的一个轨道.

如果迭代复变函数 $f(z)=z^2$，容易预测许多轨道. 当始点或“种子”z_0 在单位圆内时，有 $|z_0|<1$，这时轨道保持有界(因为迭代序列的模较小)且收敛到 $z=0$；当 $|z_0|>1$ 时，其迭代序列的模较大，这时轨道无界.

对于有界轨道，例 1 给出了一个容易验证的方法.

例 1 若函数 $f(z)$ 满足下列条件:

(i) $f(z)$ 在 $z=\zeta$ 的一个邻域内解析.

(ii) $f(\zeta)=\zeta$.

(iii) $|f'(\zeta)|<1$.

则存在一个以 ζ 为中心的圆盘，使得以该盘内的点为始点的所有轨道仍然位于圆盘内部且收敛于 ζ.

证 由

$$\lim_{z\to\zeta}\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right|=|f'(\zeta)|<1$$

及 $f(\zeta)=\zeta$，在 $|f'(\zeta)|$ 与 1 之间选取实数 ρ，使得对于以 ζ 为心的充分小圆盘内的所有 z，有

91

$$|f(z)-f(\zeta)|\equiv|f(z)-\zeta|\leqslant\rho|z-\zeta| \tag{1}$$

这个圆盘即为所求. 事实上，如果以该圆盘内的任意一点 z_0 作为轨道 $z_1=f(z_0)$，$z_2=f(z_1)$，$z_3=f(z_2)$，…的始点，那么由(1)式得

$$|z_n-\zeta|\leqslant\rho|z_{n-1}-\zeta|\leqslant\cdots\leqslant\rho^n|z_0-\zeta|.$$

因为 $\rho<1$，对于任意的 n，点 z_n 较 z_{n-1} 更加接近 ζ，这意味着 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\zeta$. ■

若 $f(\zeta)=\zeta$，则称 ζ 为函数 $f(z)$ 的*不动点*. 满足例 1 中条件的不动点 ζ 称为*吸引子*；由收敛到 ζ 的轨道的始点构成的集合称为 ζ 的*吸性域*. 因此，$\zeta=0$ 为 $f(z)=z^2$ 的一个吸引子(因为 $0=0^2=f(0)$ 和 $|f'(0)|=0<1$)，其吸性域为开圆盘 $|z|<1$. 例 1 表明每个吸引子有一个至少包含一个小圆盘的吸引域.

$f(z)=z^2$ 的另一个不动点 $\zeta=1$ 称为*斥性点*，它的性质见本节习题 2.

对于函数 $f(z)=z^2$，若 z_0 位于单位圆周 $|z_0|=1$ 上，则所有从 z_0 开始的轨道也位于单位圆周 $|z_0|=1$ 上. 事实上，如果 $z_0=1$，或 $z_0=-1$，则它的轨道很快趋于固定点 $z=1$. 如果 $z_0=e^{i2\pi/3}$(1.5 节中所说的一个三次单位原根)，则其产生的轨道在两个点 $z_0=e^{\pm i2\pi/3}$ 之间振荡，称为一个以 2 为周期的 *2 循环*；这等价于说，$z_0=e^{i2\pi/3}$ 为 $f(f(z))$ 的一个不动点. 由此可推出，始点 $e^{i2\pi/7}$ 产生一个 3 循环，$e^{i2\pi/15}$ 产生一个 4 循环. 那么对于一般情况呢(见本节习题 6)?

可以证明，若 α 为无理数，始点选为 $z_0=e^{i\alpha 2\pi}$，它生成的轨道中的点不重复(见本节习题 4)，事实上它们在单位圆周 $|z|=1$ 上稠密. 因此单位圆周把收敛到 0 的轨道的始点与无界轨道的始点隔离开来，并且它含有自身的各种轨道.

> **定义 7** *设 $f(z)$ 为一个多项式函数. 通过 f 的迭代得到的轨道是有界的那些始点构成的集合称为* **充满茹利亚集**[⊖]；*$f(z)$ 的充满茹利亚集的边界称为 $f(z)$ 的* **茹利亚集**.

所以 z^2 的茹利亚集是单位圆周，它的充满茹利亚集是闭单位圆盘.

函数 $f(z)=z^2-2$ 的茹利亚集是区间[−2, 2](它已经被“充满”). 事实上，如果 $-2\leqslant x\leqslant 2$，则 $0\leqslant x^2\leqslant 4$ 及 $-2\leqslant x^2-2\equiv f(x)\leqslant 2$，所以从[−2, 2]出发的轨道仍是有界的. 其余的那

⊖ 1918 年茹利亚(G. Julia)研究过这些集合.

些 z 是无界轨道的始点的值的证明则必须等到学习了儒可夫斯基变换后才能进行(见练习 7.7 的习题 8(a)).

92

基于以上原因，我们也许认为所有形如 $f(z)=z^2+c$ 的函数的茹利亚集是圆盘、线段或其他一些简单的图形. 但决不是这样！当我们对不同的复值常数 c 确定 z^2+c 的有界轨道的种子时，出现了多种多样异乎寻常的令人惊叹的图形. 图 2-20 中展示了诸如龙、兔、短耳枭以及海岸线的图形，这是对于不同的一些常数 c 已经知道的茹利亚集的图形. 这些图形中许多是分形；它们的维数既不是 1 也不是 2，而是介于两者之间. 其中大多数图形具有自相似性，如果对图形的一个小子集的局部进行仔细观察，会发现它与整体的形状相似.

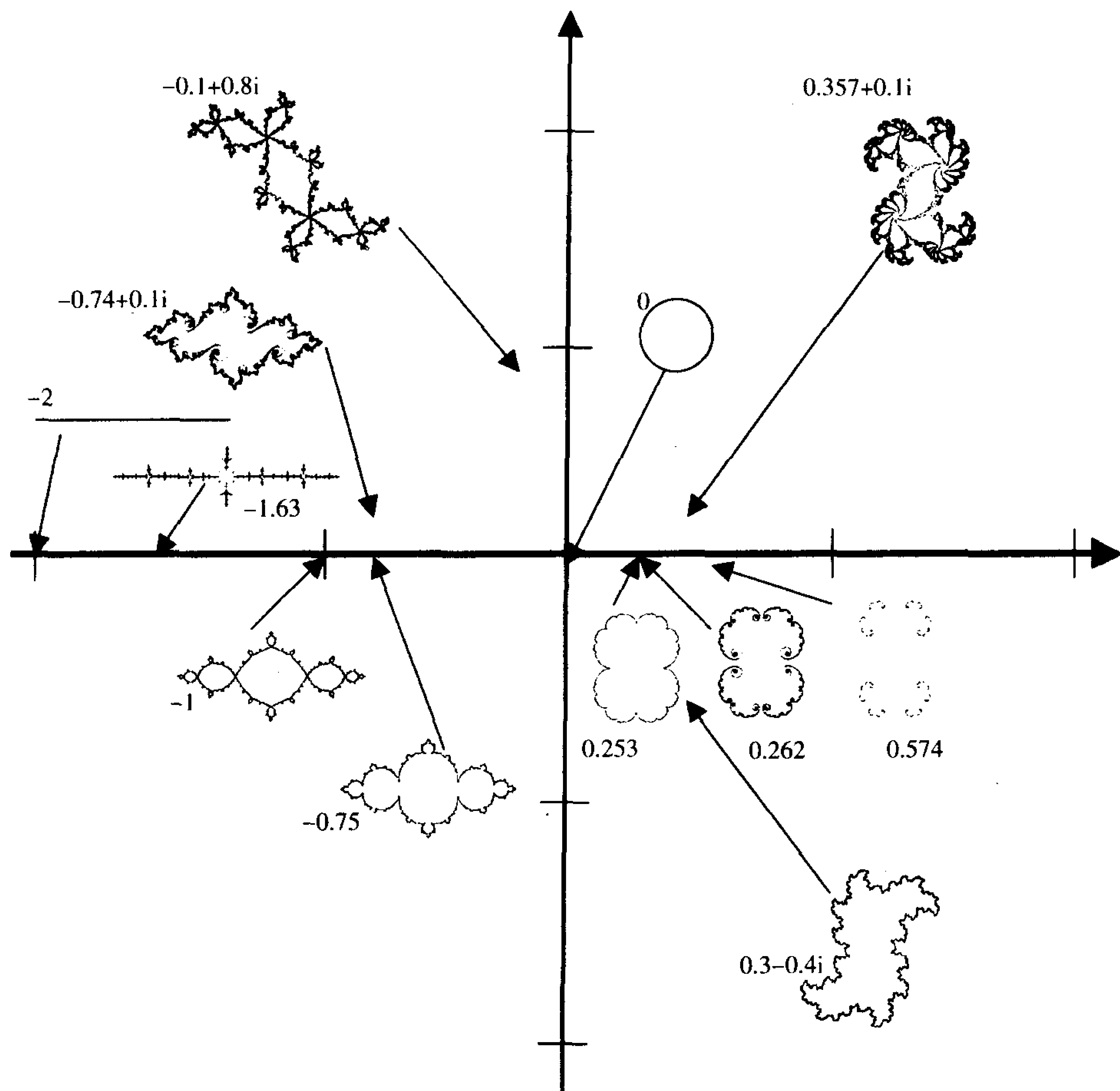


图 2-20 茹利亚集

探究茹利亚集最有趣的方法是使用计算机软件. 虽然函数迭代的规则很简单，但对专家来说，把图形描绘出来却并不在行，本章最后列出的参考文献指出了一些提供这方面工具的网站和软件包. 希望读者用计算机软件尝试一下，把图 2-20 中的图形绘制出来.

由图 2-20 看到，一些充满茹利亚集由单连通分支组成，而另外一些却不是. 1982 年，芒

德布罗(B. Mandelbrot)开始研究 c 为何值产生的(充满)茹利亚集是连通的. 这就是由图 2-21 所示的、令人惊讶的芒德布罗集. 如果函数 $f(z)=z^2+c$ 的充满茹利亚集是连通的, 则 c 位于芒德布罗集的内部; 如果 $f(z)=z^2+c$ 的充满茹利亚集是不连通的, 则 c 位于芒德布罗集的外部. 用计算机软件作一个演示, 从芒德布罗集的内部到外部的一条路径上取一族 c 的值, 观察茹利亚集发生什么变化是非常有趣的; 当它们由连通变到离散时, 茹利亚集就"蒸发"了(见参考文献). 这对于读者并不奇怪, 物理学中的一些相变现象已经可由芒德布罗集进行模拟.

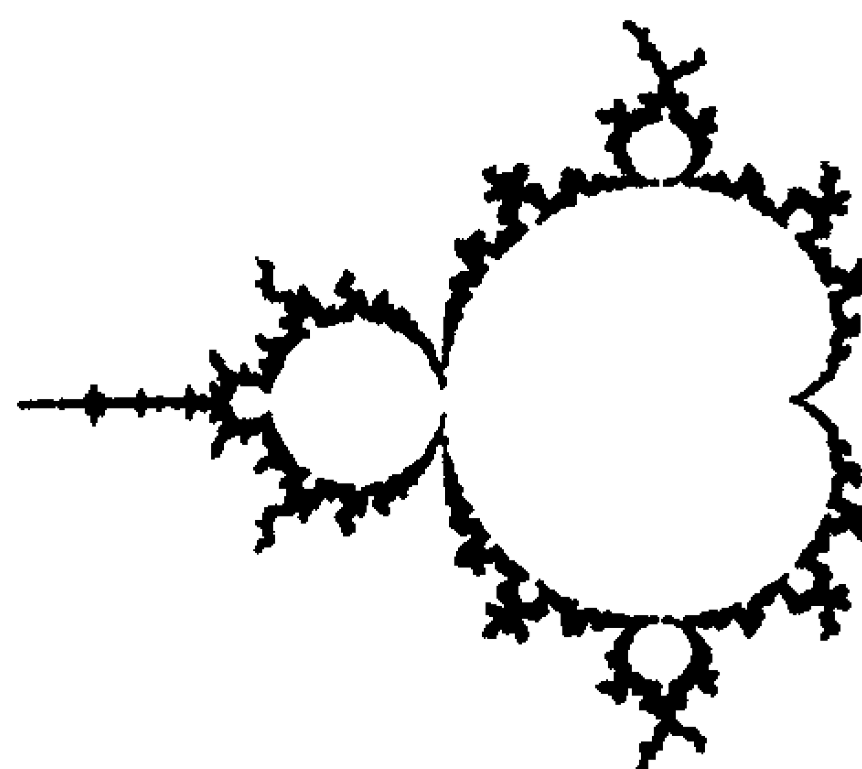


图 2-21 芒德布罗集

这些集合精细的理论分析与计算机模拟之间相互影响, 对以后的研究提供了一些令人感兴趣的信息. 例如, 我们不能期望计算机来告诉我们一个轨道是否是无界的, 因为计算机只能对有限数集加以区分, 最后它可能一直循环下去(或溢出). 因此, 在确定一个轨道是无界之前, 就必须对需要模拟的迭代次数做出判断. 其次, 实际上计算机对函数 $f(z)$ 每进行一次迭代, 它就会有一个舍入误差, 当我们模拟长轨道时, 这些误差会堆积起来; 所以, 必须要对计算结果的可信度做出认真估计. 尽管如此, 在 1987 年, Hammel、Yorke 和 Grebogi 证明, 每一条用计算机模拟的轨道都任意接近于某一真实轨道!

对于较复杂的函数, 茹利亚集(及它们的同类集)是连续数学研究的对象. 本章最后列出的计算机软件将引导读者去探究由(在第 3 章中定义的)复三角函数和其他函数迭代产生的美丽的收敛图形. 实际上, 20 世纪 80 年代后期, 由芒德布罗集生成的图形的一个国际展览(称为"无序的边界线")已在许多博物馆巡回展出; 这些可以在 Peitgen 和 Richter 的参考文献中找到.

93 ~ 94

练习 2.7

1. 求函数 $f(z)=z^2+c$ 的不动点与吸引子, 其中 c 为实常数.
2. 若 $f(z)$ 为整函数, ζ 为 $f(z)$ 的不动点且 $|f'(\zeta)|>1$, 则 ζ 称为 f 的斥性点. 证明存在一个以 ζ 为心的圆盘使得所有从圆盘内出发的轨道, 除去从 ζ 出发的 1 循环轨道外都会延伸到圆盘外.
3. 求出下列各函数的不动点, 并进一步确定哪些是吸引子、斥性点(见习题 2)或其他类型的点.
   (a) $f(z)=z^2+z+1$　　(b) $f(z)=z^3+z^2+(3/4)z-1/4$
4. 设 $f(z)=z^2$, α 为一个实的无理数, 则种子 $z_0=e^{i2\pi\alpha}$ 生成一条无重点的轨道.
5. 求出 $f(z)=1/(z+1)$ 的不动点, 并进一步确定其为吸引子、斥性点(见习题 2)还是其他类型的点.
6. 证明: $z_0=e^{i2\pi/(2^n-1)}$ 是由迭代 $f(z)=z^2$ 生成的一条 n 循环轨道的始点.
7. 证明: 始点 $z_0=e^{i2\pi/5}$ 在 $f(z)=z^2$ 迭代下可生成 4 循环轨道, 但它并不适合习题 6 给出的模式.
8. 利用软件绘出图 2-20 中的茹利亚集.
9. 确定映射 $f(z)=\alpha z$ 的充满茹利亚集, 其中 α 为复常数. 分别考虑 $|\alpha|\leq 1$ 与 $|\alpha|>1$ 的情形.
10. 一般地, 关于逼近整函数 $F(z)$ 的零点的牛顿(Newton)方法可以用函数

$$f(z)=z-\frac{F(z)}{F'(z)}$$

的轨道来描述.

证明: 可能除去 $F'(z)=0$ 的点外, $f(z)$ 的不动点与 $F(z)$ 的零点相同. 进而证明, $F(z)$ 的每一零点($F'(z)=0$ 的点除外)都是 $f(z)$ 的吸引子.

小结

一个以 $z=x+iy$ 为复变量的复值函数 $f(z)$ 可以写做 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 为两个实变量 x，y 的实函数，分别称为 $f(z)$ 的实部与虚部．这类函数的极限、连续性和导数的定义与微积分中相应的定义看起来一模一样，但是由于 z 是二维的，而这些定义中对它的变化没加任何限制，实际上定义中的条件得到了加强．特别地，当 $\Delta z \to 0$ 时，极限 [95]

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

的存在蕴涵着函数 u 和 v 之间一个很重要的关系，即柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

若函数 $f(z)$ 在一个开集内可微，则称它在这个开集内解析．这个性质可由在这个开集内，u 和 v 具有一阶连续的偏导数并且满足柯西-黎曼方程推出．函数 f 的解析性是 f 遵守 z 的复结构的直观条件的数学语言；即 f 可以用仅仅在 $(x+iy)$ 中的 x 和 y 来计算．如果 f 仅由 z 来表达，由积分基本公式可求它的导数．

一个解析函数的实部与虚部都是调和函数，即它们满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0,$$

并且它们的二阶偏导数都是连续的．此外，实部与虚部的水平截线是正交的．在一个圆盘上给定一个调和函数 $u(x,y)$，可以构造另一个调和函数 $v(x,y)$，使得 $u(x,y)+iv(x,y)$ 在这个圆盘上解析；这样的函数 v 称为 u 的共轭调和函数．调和函数可以用来解释物理现象中的温度均衡分布．

参考文献

除去第 1 章后的参考文献外，下面列出的教科书、文章、网站和软件包对于如下专题的学习会有帮助：

调和函数

[1] Davis, H., and Snider, A.D. *Introduction to Vector Analysis*, 7th ed. Quant Systems, Charleston, SC, 1994.

[2] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vol. II. Chelsea, New York, 1973.

[3] Snider, A.D. *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999. [96]

茹利亚集与芒德布罗集

[1] Devaney, R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1992.

[2] Hammel, S. M., Yorke, J. A., and Grebogi, C. "Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits?," *J. of Complexity* 3 (1987), 136–145.

[3] Peitgen, H.-O. and Richter, P. H. *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Berlin, 1986. (Describes the exhibit "Frontiers of Chaos.")

[4] *http://math.bu.edu/DYSYS/explorer/tour4.html*, a web site maintained at Boston University by R. L. Devaney, contains much material on the Julia and Mandelbrot sets. The "evaporating" Julia sets mentioned in the text are visible here.

[5] *http://www.unca.edu/ mcmcclur/java/Julia/* allows the user to click on an arbitrary value for c and view the Julia set for z^2+c. [97]

第3章 初等函数

3.1 多项式与有理函数

如2.2节中所说，形如

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \tag{1}$$

的函数称为 z 的多项式函数. 两个多项式的比

$$R_{m,n}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n} \tag{2}$$

称为有理函数.

若在多项式(1)中，复常数 $a_n \neq 0$，则称多项式(1)的次数是 n[1]. 若在有理函数(2)中，$a_m \neq 0$ 且 $b_n \neq 0$，则称有理函数(2)分子的次数是 m，分母的次数是 n. 这些函数的解析性质非常明显：多项式函数是整函数，有理函数在除分母为零的点外处处解析. 这些函数族将有助于我们对初等解析函数的研究.

首先，取一个特殊的三次多项式作典型分析：

$$p_3(z) = 12 + 10z - 4z^2 - 2z^3 \equiv -2z^3 - 4z^2 + 10z + 12. \tag{3}$$

我们将考察 $p_3(z)$ 是如何由其零点和导函数在某一点处的函数值所确定的.

容易证明(用代入法) $p_3(z)$ 的零点是2，-1 和 -3. 由此可推出 $p_3(z)$ 可表示为下列因式的乘积：

$$p_3(z) = -2(z-2)(z+1)(z+3). \tag{4}$$

99

对多项式进行因式分解的一般思路是，我们总可以用一个"除数"多项式去除一个"被除数"多项式，得到一个"商"多项式和一个次数小于"除数"多项式次数的"剩余"多项式：

$$\text{被除式} = \text{除式} \times \text{商式} + \text{余式}. \tag{5}$$

若 z_1 是任意复常数，在(1)式中用一次多项式 $z - z_1$ 除 $p_n(z)$，则得到一个次数更低的余式，即一个常数，于是

$$p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z) + \text{常数}, \tag{6}$$

其中商多项式 $p_{n-1}(z)$ 的次数为 $n-1$[2]. 若 z_1 恰为 $p_n(z)$ 的一个零点时，在(6)式中令 $z = z_1$，则可推出(常数)余式是0. 于是(6)式说明了如何把 $(z - z_1)$ 从 $p_n(z)$ 中分解出来的过程；这时我们说 $p_n(z)$ 被"压缩"了. 对前面的例子 $p_3(z)$，我们分解出第一个零点 $z_1 = 2$ 后，得到

$$-2z^3 - 4z^2 + 10z + 12 = (z-2)(-2z^2 - 8z - 6).$$

若这时 z_2 是商多项式 $p_{n-1}(z)$ 的零点(当然是 $p_n(z)$ 的零点)，则可以进一步分解出 $(z - z_2)$，等等，如此一直进行下去，直到把所有的零点讨论完为止，最后得到[3]

$$p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_k)p_{n-k}(z). \tag{7}$$

---

[1] 规定恒为0的多项式的次数是 $-\infty$. 除避免一些"例外"(见习题22)情形外，此规定意义不大.

[2] 称这个除法为辗转相除法.

[3] 读者应该知道以下事实：理论上，这个分解总是可以持续进行直到 $p_{n-k}(z)$ 变为一个常数.

由于 $p_3(z)$ 有三个零点，因此式(4)表明它可被“完全”分解为一次因式的乘积(因子 -2 的次数为0).

例1 求多项式 $z^3+(2-\mathrm{i})z^2-2\mathrm{i}z$ 的因式分解.

解 显然 $z_1=0$ 是它的一个零点，于是有

$$z^3+(2-\mathrm{i})z^2-2\mathrm{i}z=z(z^2+(2-\mathrm{i})z-2\mathrm{i}).$$

应用求根公式(见1.5节中例3)，可以得到上面二次多项式的两个根

$$z_2,z_3=\frac{-(2-\mathrm{i})\pm\sqrt{(2-\mathrm{i})^2-4(1)(-2\mathrm{i})}}{2}=-2,\mathrm{i}$$

(关于平方根，见练习1.5习题21)，因此该多项式可分解为

$$z^3+(2-\mathrm{i})z^2-2z=z(z+2)(z-\mathrm{i}).$$ ■

如果对六次多项式 $p_6(z)=z^6+z^4-4\mathrm{i}z^2-4z+4-3\mathrm{i}$ 进行因式分解，面临的问题是如何去找 $p_6(z)$ 的一个零点. 首先要考虑的问题是，$p_6(z)$ *究竟有多少个零点*？在1.1节，我们知道 x^2+1 在实数范围内没有零点，只有把数系扩充为复数系 **C**，才有零点 $\pm\mathrm{i}$. 这样可能存在一族系数在 **C** 中的多项式，它们在 **C** 中无零点，为此我们必须继续扩大数系. [100]

1799年，传奇式人物高斯在他的博士论文中证明了*代数学基本定理*，进而说明不需要继续扩大数系：

定理1 *任意复系数非常数多项式在 **C** 上至少有一个零点.*

由于在因式分解过程中可以分解出所有的零点，最后直至常数项，因此我们立即得出一个 n 次多项式有 n 个零点. 重零点按它们的重数计算. 例如，$z^4+2z^2+1=(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2$ 在两个点处为零，每个零点的重数都是2，我们把它们算作4个零点.

高斯一生中给出了代数学基本定理的四种证明. 最简单的一个以本书第4章的复积分为基础，详细证明将在4.6节中给出.

回到因式分解过程并结合商多项式的*零点存在性*问题，我们可将任何多项式完全地分解为

$$p_n(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n). \qquad (8)$$

由(8)式可以得到大量的信息. 它表明 n 次多项式 $p_n(z)$ 恰好有 n 个零点，不少(若计算重数)且不多(为什么)；$p_n(z)$ 完全由其零点和一个常数倍(a_n)确定. 若两个 n 次多项式有相同的(n 个)零点，则它们仅相差一个常数因子. 另外，这个因式分解表明，z_0 为 $p(z)$ 的 k 重零点当且仅当

$$p_n(z)=(z-z_0)^k q(z),$$

其中 $q(z)$ 为一多项式，且 $q(z_0)\neq 0$.

例2 证明：若 $p(z)$ 为实系数多项式，则它可表示为一次因式与二次因式乘积的形式，其中每个因式的系数都为实数.

证 我们知道，任一实系数多项式的非实数零点以复共轭对出现(见练习1.2习题17). 因此，若 z_2 是 z_1 的共轭复数，则在(8)式中可以把 $(z-z_1)(z-z_2)$ 组合起来，得 [101]

$$\begin{aligned}p_n(z)&=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)\\&=a_n(z^2-(z_1+\overline{z_1})z+z_1\overline{z_1})\cdots(z-z_n)\end{aligned}$$

$$= a_n(z^2 - 2(\mathrm{Re}z_1)z + |z_1|^2)\cdots(z - z_n).$$

这样，一对次数为 1 的复因式就可用一个实二次因式来代替. 对其余复因式也作类似的组合处理(且注意到如果有任何实零点，则有实一次因式)，就能得到所需的表达式. 例如，考虑五次单位根，可以证明

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^2 - 2\cos(2\pi/5)z + 1)(z^2 - 2\cos(4\pi/5)z + 1).$$

■

当然，基本定理只是指出了零点的存在性；却并没有告诉我们如何把它们求出来. 我们已经知道如何求出一次(平凡的!)和二次(求根公式)多项式的所有零点. 对三次和四次多项式情形，本章末的参考文献中给出了相应的求根公式. 对五次或五次以上的多项式，阿贝尔[㊀]和伽罗瓦[㊁]终结了长达数世纪的研究，证明没有类似的算法存在.

因此，对一般情况下的多项式进行因式分解，必须借助于对其零点的数值逼近. 如果有一个好的初值估计可应用的话，牛顿方法(见练习 2.7 习题 10)是一个求出任何解析函数零点的极好方法. 本章后面的参考文献中还列出了专为多项式设计的其他算法.

为了进行后面的讨论，考虑下面的例子.

例 3 将(3)式中的多项式 $p_3(z)$ 表示为关于 $(z-1)$ 的幂的形式(而不是 z 的幂的形式).

解 即要求系数 d_0, d_1, d_2 和 d_3，使得

$$p_3(z) = 12 + 10z - 4z^2 - 2z^3 \tag{9}$$

$$= d_0 + d_1(z - 1) + d_2(z - 1)^2 + d_3(z - 1)^3. \tag{10}$$

较为直接的方法是把(10)式写成 z 的幂的形式，与(9)式的系数作比较，得到四个含有四个未知数的方程，联立求解. 更简单的方法是令 $z = (z-1) + 1$，把其记为 $\zeta + 1$，将 $p_3(z) = p_3(\zeta + 1)$ 表示成 ζ 的幂的形式，最后再用 $(z-1)$ 代替 ζ：

$$\begin{aligned} p_3(\zeta + 1) &= 12 + 10(\zeta + 1) - 4(\zeta + 1)^2 - 2(\zeta + 1)^3 \\ &= 12 + 10\zeta + 10 - 4\zeta^2 - 8\zeta - 4 - 2\zeta^3 - 6\zeta^2 - 6\zeta - 2 \\ &= 16 - 4\zeta - 10\zeta^2 - 2\zeta^3; \end{aligned}$$

102

$$p_3(z) = 16 - 4(z - 1) - 10(z - 1)^2 - 2(z - 1)^3. \tag{11}$$

■

由此例可知，对任意给定的 z_0，任意多项式都可以写成 $(z - z_0)$ 的幂的形式. 但有一个更加简单的"重复展开"法. 首先注意到，在(10)式中，$p_3(z)$ 的系数可直接由 p_3 及其导数在 $z = 1$ 处的导数表示. 例如，对(10)式求二次微分，消去 d_0 和 d_1；在等式左边令 $z = 1$，消去 d_3；仅剩 d_2(乘以 2). 对(10)式逐次微分，得到

$$\begin{aligned} p_3(1) &= d_0, \\ p_3'(1) &= 1d_1, \\ p_3''(1) &= 2\cdot 1d_2, \\ p_3'''(1) &= 3\cdot 2\cdot 1d_3, \end{aligned}$$

㊀ 阿贝尔(Abel, Niels Henrik, 1802—1829).

㊁ 伽罗瓦(Galois, Evariste, 1811—1832).

$$p_3^{(4)}(1) = p_3^{(5)}(1) = \cdots = 0.$$

由此推出，在多项式 $p_n(z)$ 关于 $(z-z_0)$ 的幂的展开式中，$(z-z_0)^k$ 的系数等于 $p_n(z)$ 的 k 阶导数在 z_0 点的值除以 $k!$ ㊀：

$$p_n(z) = \frac{p_n(z_0)}{0!} + \frac{p'_n(z_0)}{1!}(z-z_0)^1 + \frac{p''_n(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{12}$$

这个式子称为多项式 $p_n(z)$ 在 z_0 处的**泰勒**㊁**形式**. 当然，也可直接由(9)式求出 $p_3(z)$ 在 1 处的泰勒形式：

$$p_3(1) = 12 + 10 \cdot 1^1 - 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 = \mathbf{16} = d_0,$$

$$p'_3(1) = 10 - 4 \cdot 2 \cdot 1^1 - 2 \cdot 3 \cdot 1^2 = -\mathbf{4} = d_1,$$

等等(对比(11)). 因此，多项式 $p_3(z)$ 的"标准"形式(3)就是它在点 $z=0$ 处的泰勒形式. 通常把多项式在点 $z=0$ 处的泰勒形式称为**麦克劳林**㊂形式；所以，标准形式(9)即为 $p_3(z)$ 的麦克劳林形式.

若一个多项式的泰勒形式的第一项的次数是一次

$$p_n(z) = \frac{p'_n(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{p''_n(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

则 z_0 是这个多项式的一个零点. 例如，$p_3(z)$ 在其零点 $z_0=2$ 处的泰勒形式是

$$p_3(z) = (0) - \frac{30}{1!}(z-2) - \frac{32}{2!}(z-2)^2 - \frac{12}{3!}(z-2)^3. \tag{13}$$

103

事实上，在(13)式中不含常数项 $p_3(2)$ 不仅仅表明 $z=2$ 是 $p_3(z)$ 的零点，而且还给出了另外一种分解出 $(z-2)$ 的方法. 当多项式 $p_n(z)$ 的泰勒形式中不含前 k 项时，其形式为

$$\begin{aligned} p_n(z) &= \frac{p_n^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{p_n^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\ &= (z-z_0)^k\left[\frac{p_n^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{p_n^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-k}\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

因此，若 z_0 是 $p_n(z)$ 的一个 k 重零点，则有 $p_n^{(k)}(z_0) \neq 0$，且对于 $0 \leqslant j < k.$，有 $p_n^{(j)}(z_0) = 0$.

下面我们考虑有理函数. 因为它们是多项式之比，可分别对其分子和分母用前面方法作类似的讨论. 或许最具启发性的是它的下述分式形式：

$$R_{m,n}(z) = \frac{a_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{b_n(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n)}, \tag{15}$$

其中 $\{z_k\}$ 是分子的所有零点，$\{\zeta_k\}$ 是分母的所有零点. 假定已经约去了含相同零点的因子. 则

㊀ 记住 $0! = 1$.

㊁ 泰勒(Brook Taylor, 1685—1731)在 1715 年发表了他的发现，但这早在其 40 年前就由 James Gregory(1638—1675)所预测.

㊂ 麦克劳林(Colin Maclaurin, 1698—1746).

分子的零点当然就是 $R_{m,n}(z)$ 的零点；分母的零点称为 $R_{m,n}(z)$ 的极点.（当然，零点和极点可以是多重的.）显然，当 z 趋于任意一个极点时，$R_{m,n}(z)$ 将趋于无穷大⊖.

例 4 求下列有理函数的所有极点及相应重数.

$$R(z)\ \frac{(3z+3\mathrm{i})(z^2-4)}{(z-2)(z^2+1)^2}.$$

解 分母的零点是 2，i 及 -i，它们可能是 $R(z)$ 的极点. 为确定它们是否为极点，把分子和分母进行因式分解并约去相同的因式，得

$$\frac{(3z+3\mathrm{i})(z^2-4)}{(z-2)(z^2+1)^2}=\frac{3(z+\mathrm{i})(z-2)(z+2)}{(z-2)(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2}$$

$$=\frac{3(z+2)}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})}.$$

104 因此，$z=\mathrm{i}$ 为 $R(z)$ 的 2 重极点，$z=-\mathrm{i}$ 为 $R(z)$ 的单极点. ■

根据 $R_{m,n}(z)$ 的极点，可以把 $R_{m,n}(z)$ 写成部分分式的形式. 例如：

$$\frac{3z^2+4z-5}{(z-2)(z+1)(z+3)}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+3}. \tag{16}$$

对于重极点情形，

$$\frac{4z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{-1}{z}+\frac{8}{z-1}+\frac{-7}{z-2}+\frac{6}{(z-2)^2}. \tag{17}$$

注意有理函数的部分分式分解集中在它的极点上，很少涉及它的零点的情况.

定理 2 如果

$$R_{m,n}(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m}{b_n(z-\zeta_1)^{d_1}(z-\zeta_2)^{d_2}\cdots(z-\zeta_r)^{d_r}} \tag{18}$$

是一个分母次数为 $n=d_1+d_2+\cdots+d_r$、分子次数为 m 且 $n>m$ 的有理函数，则 $R_{m,n}(z)$ 有如下形式的**部分分式分解**

$$\begin{aligned}R_{m,n}(z)=&\frac{A_0^{(1)}}{(z-\zeta_1)^{d_1}}+\frac{A_1^{(1)}}{(z-\zeta_1)^{d_1-1}}+\cdots+\frac{A_{d_1-1}^{(1)}}{(z-\zeta_1)}\\&+\frac{A_0^{(2)}}{(z-\zeta_2)^{d_2}}+\cdots+\frac{A_{d_2-1}^{(2)}}{(z-\zeta_2)}\\&+\cdots+\frac{A_0^{(r)}}{(z-\zeta_r)^{d_r}}+\cdots+\frac{A_{d_r-1}^{(r)}}{(z-\zeta_r)},\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\{A_s^{(j)}\}$ 是常数.（假设 ζ_k 互不相同.）

⊖ 在 1.7 节的意义下，一个有理函数将其极点的邻域映射成为无穷大 ∞ 的邻域.

在计算积分时，读者可能已有过一些部分分式分解的经历. 更进一步的应用将在后面的章节中给出[○].

在证明定理 2 之前，先假定每一个适当的有理函数都有一个部分分式分解，下面我们讨论如何把它求出来.

较为直接的算法是对形如(19)的式子的分母进行通分，把通分后得到的分子与 $R_{m,n}(z)$ 的分子逐项比较. 由此得到一个关于未知系数 $\{A_s^{(j)}\}$ 的线性方程组，并解这个方程组，求出 $\{A_s^{(j)}\}$. 在下例中，我们将给出一个计算 $\{A_s^{(j)}\}$ 更简洁、更有效的方法. [105]

例 5 重求(17)式中有理函数的部分分式分解.

解 所求形式应为

$$R(z)=\frac{4z+4}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{A_0^{(1)}}{z}+\frac{A_0^{(2)}}{z-1}+\frac{A_0^{(3)}}{(z-2)^2}+\frac{A_1^{(3)}}{z-2}. \tag{20}$$

若在(20)式两边同乘以 z，那么(20)式右端第一项的分母就约去了 z，代入 $z=0$，则可求出 $A_0^{(1)}$；即 $A_0^{(1)}=\lim\limits_{z\to 0}zR(z)$. 仅仅是从 $R(z)$ 原先的表达式就可很容易求出这个极限：

$$A_0^{(1)}=\lim_{z\to 0}zR(z)=\frac{4\cdot 0+4}{(0-1)(0-2)^2}=-1.$$

同理，我们容易得出

$$A_0^{(2)}=\lim_{z\to 1}(z-1)R(z)=\frac{4\cdot 1+4}{1(1-2)^2}=8$$

$$A_0^{(3)}=\lim_{z\to 2}(z-2)^2R(z)=\frac{4\cdot 2+4}{2(2-1)}=6.$$

为了求出 $A_1^{(3)}$，在(20)式两边同乘以 $(z-2)^2$，通过微分消去 $A_0^{(3)}$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-2)^2R(z)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{A_0^{(1)}(z-2)^2}{z}+\frac{A_0^{(2)}(z-2)^2}{z-1}+A_1^{(3)}(z-2)+A_0^{(3)}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{A_0^{(1)}(z-2)^2}{z}+\frac{A_0^{(2)}(z-2)^2}{z-1}\right]+A_1^{(3)}.\end{aligned}$$

这时，除 $A_1^{(3)}$ 外，其余各项至少含有一个因式 $(z-2)$，所以

$$\begin{aligned}A_1^{(3)}&=\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-2)^2R(z)]=\lim_{z\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{4z+4}{z^2-z}\right)\\&=\frac{(2^2-2)4-(4\cdot 2+4)(2\cdot 2-1)}{(2^2-2)^2}=-7.\end{aligned}$$

■

由上述例子的方法可知，如果 $R_{m,n}(z)$ 可以写成(19)式的形式，则其系数的一般表达式为

$$\boxed{A_s^{(j)}=\lim_{z\to\zeta_j}\frac{1}{s!}\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}z^s}[(z-\zeta_j)^{d_j}R_{m,n}(z)].} \tag{21}$$

由此公式，我们可以得到定理 2 的证明方法. [106]

○ 在大多数应用中，当一个有理函数的分子次数等于或超过分母次数时，我们有一个更长的分解式，更明确地分出"多项式"部分，再对余下的分式部分应用部分分式分解.

定理 2 的证明 设常数 $A_s^{(j)}$ 由(21)式定义，首先考虑(19)式中含有极点 ζ_1 的部分分式的和(所谓的 $R_{m,n}(z)$ 在 ζ_1 处的奇异部分). 我们断言差

$$R_{m,n}(z)-\sum_{s=0}^{d_1-1}\frac{A_s^{(1)}}{(z-\zeta_1)^{d_1-s}}=R_{m,n}(z)-\frac{1}{(z-\zeta_1)^{d_1}}\sum_{s=0}^{d_1-1}A_s^{(1)}(z-\zeta_1)^s \tag{22}$$

不以 ζ_1 为极点. 记

$$\begin{aligned}T(z)&:=\sum_{s=0}^{d_1-1}A_s^{(1)}(z-\zeta_1)^s,\\P(z)&:=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m,\\Q(z)&:=b_n(z-\zeta_2)^{d_2}(z-\zeta_3)^{d_3}\cdots(z-\zeta_r)^{d_r},\end{aligned} \tag{23}$$

则(22)式可写为

$$\frac{P(z)}{(z-\zeta_1)^{d_1}Q(z)}-\frac{T(z)}{(z-\zeta_1)^{d_1}}=\frac{P(z)-Q(z)T(z)}{(z-\zeta_1)^{d_1}Q(z)}.$$

所以要证前面的断言，必须证明 ζ_1 至少为多项式 $P-QT$ 的 d_1 阶零点，即

$$(P-QT)^{(s)}(\zeta_1)=0,\quad 其中\ s=0,1,\cdots,d_1-1. \tag{24}$$

为此，注意到(23)式是多项式 T 在 ζ_1 处的泰勒形式，从而

$$T^{(s)}(\zeta_1)/s!=A_s^{(1)},\quad 其中\ s=0,1,\cdots,d_1-1.$$

由式(21)，我们有

$$A_s^{(1)}=\frac{1}{s!}g^{(s)}(\zeta_1),\quad 其中\quad g(z):=(z-\zeta_1)^{d_1}R_{m,n}(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

故

$$T^{(s)}(\zeta_1)=g^{(s)}(\zeta_1),\quad 其中\ s=0,1,\cdots,d_1-1.$$

当把这些方程写成 $(g-T)^{(s)}(\zeta_1)=0$ 的等价形式时，因为

$$\begin{aligned}(P-QT)&=Q(g-T)\\(P-QT)'&=Q(g-T)'+Q'(g-T)\\(P-QT)''&=Q(g-T)''+2Q'(g-T)'+Q''(g-T),\end{aligned}$$

[107] 等等，由此可推出(24)式. 这证明了 ζ_1 不是差式(22)的极点.

类似地，可推出 ζ_2 不是 $R_{m,n}(z)$ 与它在 ζ_2 处的奇异部分之差的极点等等. 由此可知

$$R_{m,n}-\sum_{s=0}^{d_1-1}\frac{A_s^{(1)}}{(z-\zeta_1)^{d_1-s}}-\cdots-\sum_{s=0}^{d_r-1}\frac{A_s^{(r)}}{(z-\zeta_r)^{d_r-s}} \tag{25}$$

为一个没有极点的有理函数，即为一个多项式. 而当 $|z|$ 趋于无穷大时，(25)式中的每一项都趋于 0，所以它必是一个零多项式，由此推出等式(19)成立. ■

练习 3.1

1. 设 -1, $3i$ 及 $-3i$ 分别为 4 次多项式 $p(z)$ 的 2 重，1 重及 1 重零点. 若 $p(1)=80$，求 $p(z)$.
2. 证明：若多项式 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 可写成 $p(z)=a_n(z-z_1)^{d_1}(z-z_2)^{d_2}\cdots(z-z_r)^{d_r}$，则
   (a) $n=d_1+d_2+\cdots+d_r$.

(b) $a_{n-1} = -a_n(d_1z_1 + d_2z_2 + \cdots + d_rz_r)$.

(c) $a_0 = a_n(-1)^n z_1^{d_1} z_2^{d_2} \cdots z_r^{d_r}$.

3. 对下列多项式进行因式分解:

(a) $z^5 + (2+2i)z^4 + 2iz^3$　　(b) $z^4 - 16$

(b) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

4. 证明:若 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ 是一个次数 $n \geq 1$ 的多项式,且 $|a_0| > 1$,则 $p(z)$ 在单位圆周外至少有一个零点.[提示:首项系数 $a_n = 1$,并考虑 p 的因式分解形式.]

5. 求下列多项式在 $z = 2$ 处的泰勒形式:

(a) $z^5 + 3z + 4$　　(b) z^{10}　　(c) $(z-1)(z-2)^3$

6. 若 $p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n \neq 0)$,则其*逆多项式* $p^*(z)$ 由下式定义:

$$p^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}z + \cdots + \bar{a}_0z^n.$$

(a) 证明 $p^*(z) = z^n \overline{p(1/\bar{z})}$.

(b) 证明:若 $z_0 (\neq 0)$ 是 $p(z)$ 的一个零点,则 $1/\bar{z}_0$ 是 $p^*(z)$ 的一个零点.

(c) 证明:当 $|z| = 1$ 时,有 $|p(z)| = |p^*(z)|$.

7. 证明:若 z_0 是多项式 $p(z)$ 的 m 阶零点,则 z_0 是 $p'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点.　108

8. 证明:若 z_0 分别是多项式 $p(z)$ 与 $q(z)$ 的 m 阶及 k 阶零点,则 z_0 是乘积多项式 $p(z)q(z)$ 的 $m+k$ 阶零点.

9. 证明:若 z_0 是 $p_n(z)$ 的 d 阶零点,则存在正常数 c_1 和 c_2,使得对于充分接近 z_0 的所有 z,有

$$c_1|z - z_0|^d \leq |p_n(z)| \leq c_2|z - z_0|^d.$$

10. 证明:若 $p_n(z)$ 为 n 次多项式,则存在正常数 c_1 和 c_2,使得对于 $|z|$ 充分大的所有 z,有

$$c_1|z|^n < |p_n(z)| < c_2|z|^n.$$

11. 求下列各有理函数的所有极点及相应重数.

(a) $\dfrac{3z^2+1}{z^3(z^2+2iz+1)}$　　(b) $\dfrac{z^2+4}{(z-2)(z-3)^2}$

(c) $\left(\dfrac{2z+3}{z^2+4z+4}\right)^3$　　(d) $\dfrac{2z}{z^2+3z+2} + \dfrac{2}{z+1}$

12. 设 $R_{m,n}(z) = P(z)/Q(z)$ 和 $r_{m,n} = p(z)/q(z)$ 均为分子次数是 m,分母次数是 n 的有理函数.证明:若 $R_{m,n}$ 和 $r_{m,n}$ 在 $m+n+1$ 个不同的点处取相同的值,则对所有的 z 有 $R_{m,n} = r_{m,n}$.

13. 运用公式(21),求出下列每一个有理函数的部分分式分解式:

(a) $\dfrac{3+i}{z(z+1)(z+2)}$　　(b) $\dfrac{2z+i}{z^3+z}$

(c) $\dfrac{z}{(z^2+z+1)^2}$　　(d) $\dfrac{5z^4+3z^2+1}{2z^2+3z+1}$

[提示:首先应用带余除法得到有理函数的适当形式.]

14. 证明:若 z_0 是有理函数 $R(z)$ 的 m 阶极点,则 z_0 是其导函数 $R'(z)$ 的 $m+1$ 阶极点.

15. **(留数)** 设 $R = P/Q$ 是一个满足 $\deg P < \deg Q$ 的有理函数,若 ζ 是 R 的一个极点,则在 R 的部分分式展开式中 $1/(z-\zeta)$ 的系数称为 $R(z)$ 在 ζ 处的留数,记为 $\mathrm{Res}(\zeta)$.应用公式(21),计算下列各个留数:

(a) 对 $R(z) = \dfrac{2z+3}{(z-i)(z^2+1)}$,求 $\mathrm{Res}(i)$.

(b) 对 $R(z) = \dfrac{z^3+4z+9}{(2z+2)(z-3)^5}$,求 $\mathrm{Res}(-1)$.

(c) 对 $R(z) = \dfrac{2z^2+3}{z^2(z^2+2z+i)}$,求 $\mathrm{Res}(0)$.

(d)对 $R(z)=\dfrac{z^2-9}{(z^2+9)^2}$，求 Res(3i).

109

(e)对 $R(z)=\dfrac{2z^3+3}{z^3(z+1)}$，求 Res(0).

16. 证明：若 $R_{m,n}(z)$ 是一个分子次数为 m，分母次数为 n 的有理函数，则存在正的常数 c_1 和 c_2，使得对所有充分大的 $|z|$，有

$$c_1|z|^{m-n}<|R_{m,n}(z)|<c_2|z|^{m-n}.$$

17. 证明：若 $p(z)=a_n(z-z_1)^{d_1}(z-z_2)^{d_2}\cdots(z-z_r)^{d_r}$，则其对数微分 $\dfrac{p'}{p}$ 的部分分式展开式为

$$\frac{p'(z)}{p(z)}=\frac{d_1}{z-z_1}+\frac{d_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{d_r}{z-z_r}.$$

[提示：应用公式 $(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$ 进行归纳概括.]

18. 证明：若

$$R(z)=\frac{d_1}{z-z_1}+\frac{d_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{d_r}{z-z_r},$$

其中每一个 d_i 都是正实数，并且每一个 z_k 都位于上半平面 Im $z>0$ 内，则 $R(z)$ 在下半平面 Im $z<0$ 内无零点. [提示：记 $\overline{R(z)}=\dfrac{d_1(z-z_1)}{|z-z_1|^2}+\cdots+\dfrac{d_r(z-z_r)}{|z-z_r|^2}$. 然后对 Im $z_k>0$ 和 Im $z<0$ 画出向量 $(z-z_k)$，由图形可推出这些正实系数 $(d_k/|z-z_k|^2)$ 向量的任何线性组合必有一个负的(从而非零)虚部. 由此即知，对于 Im $z<0$，有 Im$R(z)>0$.]

19. 证明：若多项式 $p(z)$ 的所有零点都在上半平面内，则 $p'(z)$ 的所有零点也都在上半平面内. [提示：参看习题 17 和习题 18.]

20. 把习题 19 的结论在几何意义下进一步推广. 证明：如果一个多项式的所有零点都位于任一条直线的一侧，则 $p'(z)$ 的所有零点也都位于这条直线的这一侧.

21. 当一个点集完全位于某条直线的一侧时，则说该直线"掩蔽"了这个点集，把含有这个点集的那一侧称为掩蔽区域. 若 $z_1, z_2, \cdots, z_r$ 是平面上的任何有限点集，则把 $\{z_j\}$ 的所有掩蔽区域的公共部分称为它的凸包. 由习题 20 的思路，证明高斯—卢卡(Gauss-Lucas)[○]定理：若 $p(z)$ 是任一多项式，则 $p'(z)$ 的所有零点都位于 $p(z)$ 的零点集的凸包内.

22. 说明如何应用 $(-\infty)$ 作为零多项式的次数的技巧，推导"两个多项式乘积的次数是每个因式的次数之和"这一结论.

3.2 指数函数、三角函数与双曲函数

复指数函数 e^z 在解析函数理论中极为重要，这不仅是因为它自身的重要性，而且因为常常用它来定义复三角函数和复双曲函数. 由第 1 章中的定义知，若 $z=x+iy$，则

110

$$\boxed{e^z=e^x(\cos y+i\sin y).} \tag{1}$$

由 2.4 节中的例 2 可知，e^z 是一个整函数且

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z.$$

由(1)可得

○ 卢卡(Francois Edouard Anatole Lucas，1842—1891)发明了汉诺威迷宫塔.

$$|e^z| = e^x, \tag{2}$$

$$\arg e^z = y + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{3}$$

这表明 e^z 不会取 0 值. 但 e^z 可以取到任何其他的复值(见习题 4).

任取集合 S 中的两点 z_1 和 z_2，若 $f(z_1) = f(z_2)$ 蕴涵 $z_1 = z_2$，则称 f 在 S 上是一一的. 在微积分中，指数函数在实轴上是一一的，但在整个复平面上，它却不是一一的. 事实上，我们有下述定理.

> **定理 3** (i) 当且仅当 $z = 2k\pi i$，其中 k 为一个整数时，$e^z = 1$.
>
> (ii) 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i$，其中 k 为一个整数时，$e^{z_1} = e^{z_2}$.

(i) 的证明 首先假定当 $z = x + iy$ 时，$e^z = 1$，则必有

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x = 1,$$

故 $x = 0$. 由此得

$$e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1,$$

或等价于

$$\cos y = 1, \quad \sin y = 0.$$

只有当 $y = 2k\pi$(k 为某个整数)，即当 $z = 2k\pi i$ 时，才能同时满足这两个方程.

反之，若 $z = 2k\pi i$，其中 k 为整数，则

$$e^z = e^{2k\pi i} = e^0(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = 1.$$

(ii) 的证明 由除法法则，

$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad 当且仅当 \quad e^{z_1 - z_2} = 1.$$

但由(i)，后一个方程当且仅当 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ 时才成立，其中 k 为一整数. ■

111

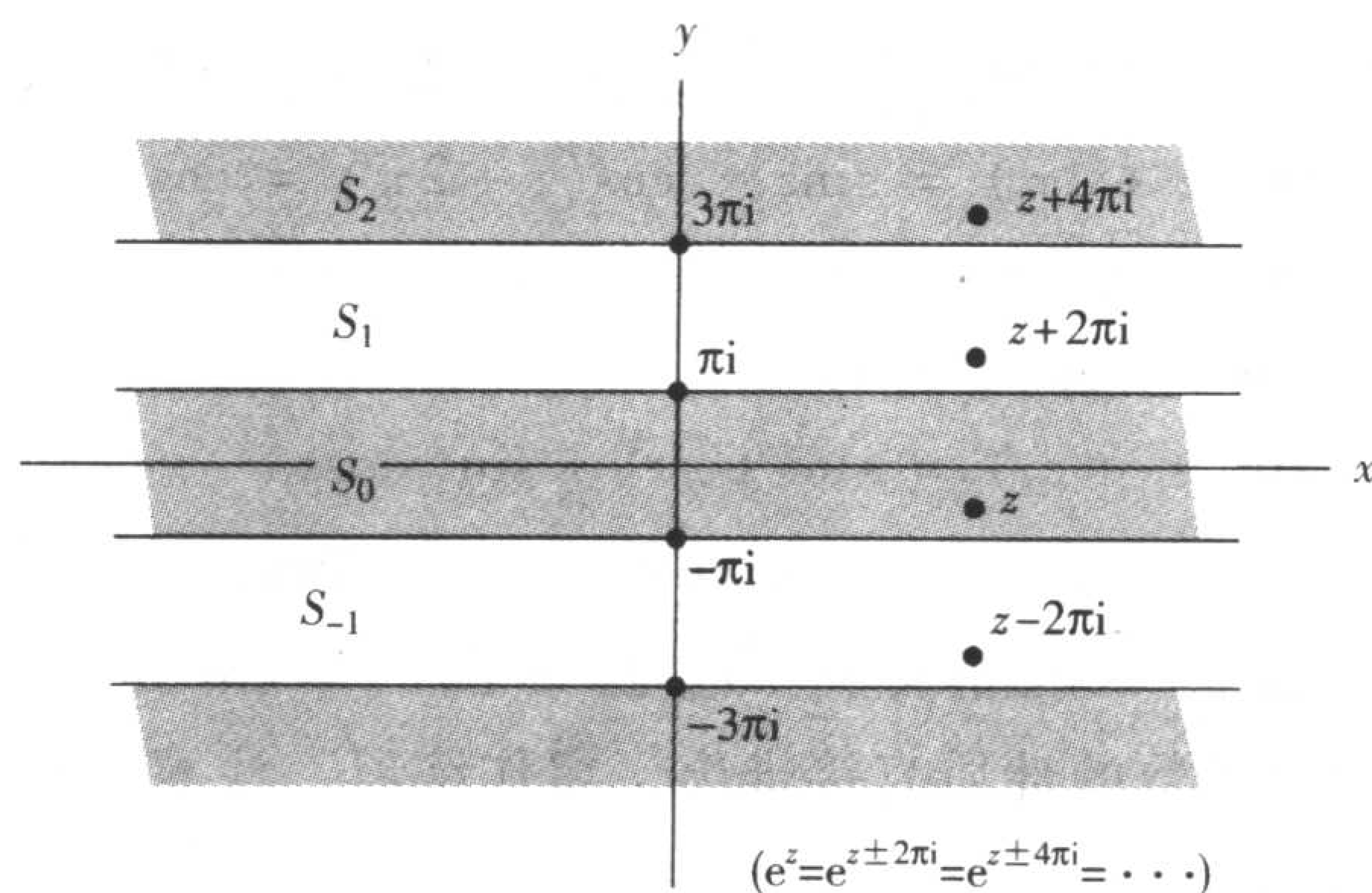


图 3-1 e^z 的基本区域

定理 3 的一个重要推论是 e^z 为周期函数. 一般来说，对定义在区域 D 内的函数 f，若存在一个非零常数 λ，使得对于 D 中的任何 z 都有 $f(z + \lambda) = f(z)$，则称 f 在区域 D 内是周期的. 任何具有此性质的常数 λ 都称为 f 的一个周期. 对所有 z，因为

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

因此 e^z 是以 $2\pi i$ 为复周期的周期函数. 因此，如图 3-1 所示，若把 z 平面分割成无限个水平带

形区域

$$S_n := \{x + iy \mid -\infty < x < \infty, (2n-1)\pi < y \leqslant (2n+1)\pi\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

则 e^z 在每一个带形区域内都具有相同的性质．再由定理 3 的(ii)，e^z 在每个 S_n 上是一一的．基于此，这些带形区域中的任何一个都称为 e^z 的基本区域．

由等式

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,$$

可知

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y,$$

对这两个等式作减法和加法运算，得到

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

[112] 我们可将这些实变量公式推广至复三角函数．

定义 1 对任意复数 z，定义

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

因为 e^{iz} 和 e^{-iz} 都是整函数，所以 $\sin z$ 和 $\cos z$ 也都是整函数．事实上，

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}) = \cos z, \tag{4}$$

类似地，

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z. \tag{5}$$

我们看到，等式(4)和(5)与微积分中的求导公式相同．在复平面上仍然成立的恒等式还有

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z. \tag{6}$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z. \tag{7}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1. \tag{8}$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1\cos z_2 \pm \sin z_2\cos z_1. \tag{9}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1\cos z_2 \mp \sin z_1\sin z_2. \tag{10}$$

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z. \tag{11}$$

这些恒等式的证明可由指数函数的性质直接推出，留作练习．注意等式(6)蕴涵 $\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期为 2π 的周期函数．

例 1 证明：当且仅当 $z = k\pi$(其中 k 为一整数)时，$\sin z = 0$．

证 若 $z = k\pi$，则显然有 $\sin z = 0$．反之，假设 $\sin z = 0$，则有

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0,$$

或等价地，

$$e^{iz} = e^{-iz}.$$

由定理 3 的(ii)可推出

$$iz=-iz+2k\pi i,$$

由此得出 $z=k\pi$，其中 k 为某一整数. ■ [113]

所以，$\sin z$ 的零点全是实零点. $\cos z$ 也具有相同的性质，即

$$\cos z=0 \quad 当且仅当 \quad z=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

其中 k 为一整数.

其余四个复三角函数的定义分别为

$$\tan z:=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z:=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z:=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z:=\frac{1}{\sin z}.$$

注意函数 $\cot z$ 和 $\csc z$ 在除去 $\sin z$ 的零点，即点 $z=k\pi$ 外处处解析，而 $\tan z$ 和 $\sec z$ 在除去点 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 外处处解析，其中 k 为任一整数. 而且，对于这些函数，通常的微分运算法则仍然成立：

$$\frac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z,\quad \frac{d}{dz}\sec z=\sec z\tan z,$$

$$\frac{d}{dz}\cot z=-\csc^2 z,\quad \frac{d}{dz}\csc z=-\csc z\cot z.$$

前面讨论的都是复三角函数和实三角函数之间的一些相似性质. 下面给出它们的一些不同的性质. 例如，实余弦函数以 1 为界，即

$$|\cos x|\leqslant 1,其中 x 为任意实数,$$

然而

$$|\cos(iy)|=\left|\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right|=\cosh y$$

是无界的，事实上，对任意实数 y，$|\cos(iy)|\geqslant 1$！

复双曲函数的定义是实双曲函数定义的自然推广：

定义 2 对任意复数 z，定义

$$\sinh z:=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\qquad \cosh z:=\frac{e^z+e^{-z}}{2}. \tag{12}$$

注意函数(12)都是整函数，且满足

$$\frac{d}{dz}\sinh z=\cosh z,\quad \frac{d}{dz}\cosh z=\sinh z. \tag{13}$$

复变方法的一个优点是可以揭示出双曲函数和三角函数之间的密切联系. 读者容易证明以下各式：

$$\sin iz=i\sinh z,\sinh iz=i\sin z,\cos iz=\cosh z,\cosh iz=\cos z, \tag{14}$$ [114]

应用这些公式可将三角恒等式(6)～(11)转化成双曲函数的情形. 例如，在恒等式(8)中用 iz 替换 z，可推出类似的双曲恒等式 $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$.

除了前面定义的两个复双曲函数外，还有四个复双曲函数，分别定义如下：

$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\text{sech} z := \frac{1}{\cosh z}, \quad \text{csch} z := \frac{1}{\sinh z}.$$

练习 3.2

1. 证明：当且仅当 $z=(\pi/4+2k\pi)\mathrm{i}(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$时，$\mathrm{e}^z=(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$.
2. 设 $f(z)=\mathrm{e}^z-(1+z+z^2/2+z^3/6)$，证明$f^{(3)}(0)=0$.
3. 求和 $\sum_{K=0}^{100} \mathrm{e}^{kz}$.
4. 设 $\omega(\neq 0)$的极坐标表示为 $\omega=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 证明 $\exp(\log r+\mathrm{i}\theta)=\omega$(底数为 e 的对数).
5. 将下列每一个数写成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式.

   (a) $\exp(2+\mathrm{i}\pi/4)$　　(b) $\dfrac{\exp(1+\mathrm{i}3\pi)}{\exp(-1+\mathrm{i}\pi/2)}$

   (c) $\sin(2\mathrm{i})$　　(d) $\cos(1-\mathrm{i})$

   (e) $\sinh(1+\pi\mathrm{i})$　　(f) $\cosh(\mathrm{i}\pi/2)$
6. 证明三角恒等式(8)和(9).
7. 证明：对于所有复数 z，公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$ 成立.
8. 证明微分公式(13).
9. 对下列各式，求 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$.

   (a) $w=\exp(\pi z^2)$　　(b) $w=\cos(2z)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   (c) $w=\exp[\sin(2z)]$　　(d) $w=\tan^3 z$

   (e) $w=[\sinh z+1]^2$　　(f) $w=\tanh z$
10. 说明函数 $f(z)=\sin(z^2)+\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{i}z$ 为什么是整函数.
11. 说明函数 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{\cos z}{\mathrm{e}^z}\right)$为什么在全平面上是调和的.
12. 用关系式(14)及相应的三角恒等式证明下列双曲恒等式.

   115

   (a) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$　　(b) $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cosh z_2+\cosh z_1\sinh z_2$

   (c) $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2$
13. 验证下列各式.

   (a) $\sin(x+\mathrm{i}y)=\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y$

   (b) $\cos(x+\mathrm{i}y)=\cos x\cosh y-\mathrm{i}\sin x\sinh y$
14. 证明下列各式.

   (a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$是周期为 2π 的周期函数.

   (b) $\tan z$ 是周期为 π 的周期函数.

   (c) $\sinh z$ 和 $\cosh z$ 都是周期为 $2\pi\mathrm{i}$ 的周期函数.

   (d) $\tanh z$ 是周期为 $\pi\mathrm{i}$ 的周期函数.
15. 证明：当且仅当 $z=\pi/2+k\pi$(其中 k 是一个整数)时，$\cos z=0$.
16. 验证恒等式

$$\sin z_2-\sin z_1=2\cos\left(\frac{z_2+z_1}{2}\right)\sin\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right).$$

并用此来证明当且仅当 $z_2=z_1+2k\pi$ 或 $z_2=-z_1+(2k+1)\pi$(其中 k 是一个整数)时，$\sin z_1=\sin z_2$.

17. 求出满足下述等式的所有数 z(若有的话).

(a) $e^{4z}=1$

(b) $e^{iz}=3$

(c) $\cos z=i\sin z$

18. 证明下列各式.

(a) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$　　(b) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z-1}{z}=0$

[提示：应用 $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}[f(z)-f(0)]/z$.]

19. 证明：在任意半径为 π 的开圆盘上，函数 e^z 都是一一的.

20. 证明：函数 $\omega=e^z$ 把图 3-2a 中的阴影矩形区域一一地映射到图 3-2b 中的半环形区域.

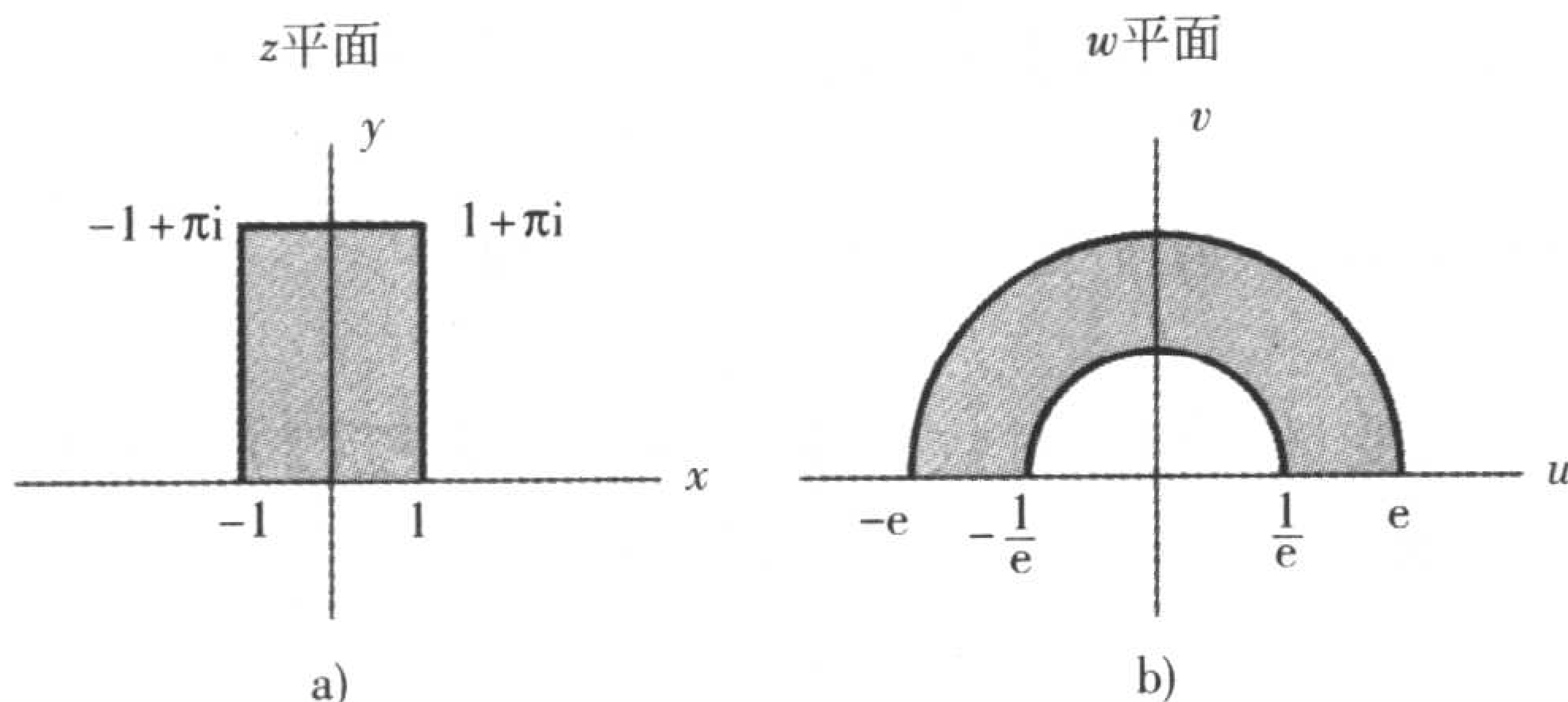


图 3-2　在 $w=e^z$ 下矩形的映射

21. (a) 证明映射 $\omega=\sin z$ 在下面的半无限带形区域上是一一的：

$$S_1=\{x+iy\mid -\pi<x<\pi, y>0\},$$

并求出这个带形区域的像. [提示：见习题 16.]

(b) 对 $w=\sin z$，下列较小半无限带形区域

$$S_2=\{x+iy\mid -\pi/2<x<\pi/2, y>0\}$$

的像是什么？

116

22. 证明：对任意 m 个互不相同的复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m (\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j)$，函数 $e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \cdots, e^{\lambda_m z}$ 在 **C** 上是线性无关的. 换言之，证明对所有的 z，若 $c_1e^{\lambda_1 z}+c_2e^{\lambda_2 z}+\cdots+c_me^{\lambda_m z}=0$，则 $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$.

[提示：对 m 用数学归纳法. 归纳过程中，除以其中的一个指数函数，然后求导.]

23. 下面是证明 $\sin^2z+\cos^2z=1$ 的另一种思路. 验证如下证明过程中的每一步.

(a) 函数 $f(z)=\sin^2z+\cos^2z$ 是整函数.

(b) 对所有 z，$f'(z)=0$.

(c) $f(z)$ 是常函数.

(d) $f(0)=1$.

(e) 对所有 z，$f(z)=1$.

24. 仅用实算法运算，编写一个计算机程序，当输入 $z=x+iy$ 的实部和虚部 (x, y) 时，输出 (a) e^z，(b) $\sin z$ 和 (c) $\cosh z$ 的实部和虚部.

25. 函数 $e^{1/z}$ 在 $z=0$ 点附近的性质极其复杂；在 5.6 节中把这类点称为“本性奇点”. 分别求出位于小圆盘 $|z|\leqslant 0.001$ 内，$e^{1/z}$ 取值为 (a) i，(b) -1，(c) 6.02×10^{23}(阿伏加德罗常数)，(d) 1.6×10^{-19}(电学中的电量转换单位)时的点 z.

117

3.3 对数函数

在讨论对应 $w=f(z)$ 时，我们已使用了"函数"这个词，表示对每个可允许的 z 值，f 唯一地确定一个值 w. 有时通过说"f 是一个单值函数"来强调这一点. 当然，也有方程定义的不是单值函数；例如，$w=\arg z$ 和 $w=z^{1/2}$. 事实上，对每一个非零的 z，$\arg z$ 有无穷多个不同的值，$z^{1/2}$ 有两个不同的值. 一般情况下，如果对某些 z 值，对应 $w=f(z)$ 的多个值，则称 $w=f(z)$ 是一个*多值函数*. 通常对于一个非一一的单值函数，取它的反函数就可得到多值函数. 实际上，这就是得到复对数函数 $\log z$ 的方法㊀.

所以，我们把对数函数 $\log z$ 定义为指数函数 $z=e^w$ 的反函数，即

$$w=\log z. \tag{1}$$

因 e^w 不取零值，假设 $z\neq 0$. 为明确地求出 $\log z$，令 $z=re^{i\theta}$，$w=u+iv$，则方程 $z=e^w$ 变为

$$re^{i\theta}=e^{u+iv}=e^u e^{iv}. \tag{2}$$

在(2)式两边取模，得到 $r=e^u$，或 u 是 r 的通常(实)对数：

$$u=\operatorname{Log} r.$$

(这里用大写 Log 来区分实变量的自然对数函数 $u=\log r$.)方程(2)中余下的因子相等，即 $e^{i\theta}=e^{iv}$，把 v 定义为(多值的)极角 $\theta=\arg z$：

$$v=\arg z=\theta.$$

所以 $\omega=\log z$ 也是一个多值函数. 下面给出它的明确定义.

定义 3 若 $z\neq 0$，则 $\log z$ 定义为无穷多个值的集合

$$\log z:=\operatorname{Log}|z|+i\arg z$$
$$=\operatorname{Log}|z|+i\operatorname{Arg} z+i2k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots). \tag{3}$$

118

$\log z$ 的多值仅仅表现在对数的虚部是极角 θ 这个事实；而它的实部是单值的. 下面给出一些例子.

$$\log 3=\operatorname{Log}3+i\arg 3=(1.908\ldots)+i2k\pi,$$
$$\log(-1)=\operatorname{Log}1+i\arg(-1)=i(2k+1)\pi,$$
$$\log(1+i)=\operatorname{Log}|1+i|+i\arg(1+i)$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{Log}2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),$$

其中 $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$.

实对数函数的一些常见性质可以推广到复对数函数的情形，但由于 $\log z$ 的多值性，这些推广的精确表述比较复杂. 例如，若 $z\neq 0$，则有

$$z=e^{\log z},$$

但

$$\log e^z=z+2k\pi i \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

另外，应用表示式(3)和等式

㊀ 本书中所有的对数函数都取 e 为底，今后可简写为 log 或 Log. 本书中不采用记号 ln 及 Ln. 欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)认为对数函数可以扩充至负数和复数.

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{4}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \tag{5}$$

我们可以证明

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2, \tag{6}$$

以及

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2. \tag{7}$$

由等式(4)和(5)，等式(6)和(7)可以被解释为：若给定其中任意两项确定的值，则一定可以找到第三项的值使得方程成立．例如，若 $z_1 = z_2 = -1$，且选取 πi 为 $\log z_1$ 和 $\log z_2$ 的值，则选取 $2\pi i$ 作为 $\log(z_1 z_2) = \log 1$ 的值时方程(6)才成立.

在 1.3 节中，我们用分支切割的概念解决了极角 $\theta = \arg z$ 的确定问题．用 $\operatorname{Arg} z$ 表示 $\arg z$ 的主值，它的取值范围是区间$(-\pi, \pi]$，当 z 越过沿负实轴的分支割线时，$\arg z$ 增加 2π．关于其他分支，可以通过把 $\arg z$ 的值限制在$(\tau, \tau + 2\pi]$上得到 $\arg_\tau z$，且把 $\arg z$ 以 2π 为周期的不连续性转移到射线 $\theta = \tau$ 上.

显然可用相同的技巧得到 $\log z$ 的单值分支．对数函数的主值 $\operatorname{Log} z$ 是从辐角的主值得到的：

$$\boxed{\operatorname{Log} z := \operatorname{Log}|z| + i\operatorname{Arg} z.} \tag{8}$$

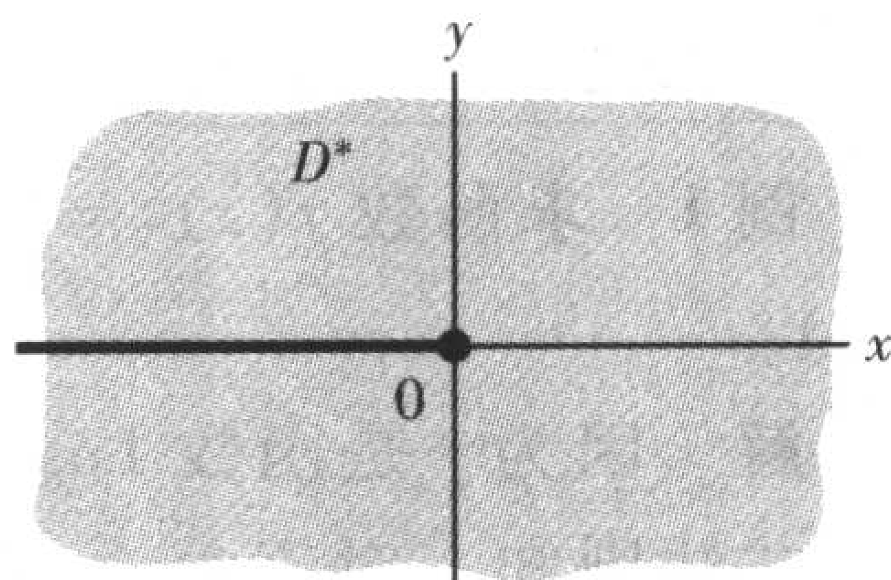


图 3-3　Logz 的解析区域

119

[注意，因为当 z 是正实数时，$\operatorname{Arg} z = 0$，所以对于对数函数的主值像对通常的(实)值一样，可以使用同样的记号(Log 用大写字母 L).] $\operatorname{Log} z$ 也像 $\operatorname{Arg} z$ 一样，沿分支割线具有不连续性，当 z 越过负实轴时，它的值增加 $2\pi i$．然而，$\operatorname{Log} z$ 在除去非正实轴上的所有点外都是连续的，这一事实可使我们证明下面的定理.

定理 4　函数 $\operatorname{Log} z$ 在由复平面上除去非正实轴外的所有点组成的区域 D^*(见图 3-3)内是解析的．并且对任意 $z \in D^*$，有

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}. \tag{9}$$

证　令 $w = \operatorname{Log} z$．我们要证对任意点 $z_0 \in D^*$ 和 $w_0 = \operatorname{Log} z_0$，差商的极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} \tag{10}$$

存在且等于 $1/z_0$.[㊀] 由 $z = e^w$ 及指数函数的解析性得到

$$\lim_{w \to w_0} \frac{z - z_0}{w - w_0} = \left.\frac{dz}{dw}\right|_{w = w_0} = e^{w_0} = z_0.$$

为了完成定理的证明，只需证明

㊀ 这里用形式(10)比用通常形式 $\lim_{\Delta z \to 0}[\operatorname{Log}(z_0 + \Delta z) - \operatorname{Log} z_0]/\Delta z$ 更为方便．令 $\Delta z = z - z_0$，可知这两个形式是等价的.

120

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\dfrac{z - z_0}{w - w_0}} \tag{11}$$

成立，这是因为上式右边的极限存在且等于 $1/z_0$. 若能证明

(a)当 z 趋于 z_0 时，w 必趋于 w_0，

(b)当 $z \neq z_0$ 时，$w \neq w_0$[所以方程(11)中各项都有意义]，

则可由恒等式

$$\frac{w - w_0}{z - z_0} = \frac{1}{\dfrac{z - z_0}{w - w_0}}, \tag{12}$$

推出(11)式.

条件(a)的成立是由于 $w = \mathrm{Log}z$ 在 D^* 上的连续性. 至于条件(b)，如果取 w 为 w_0，因为 $z = e^w$，必有 $z = z_0$，所以条件(b)成立. 因此 $w = \mathrm{Log}z$ 在 D^* 上的每一点可微，从而解析[⊖]. ■

推论 1 函数 $\mathrm{Arg}z$ 在定理 4 中的区域 D^* 内调和.

推论 2 实函数 $\mathrm{Log}|z|$ 在除去原点的全平面上调和. (见习题 8.)

例 1 求函数 $f(z) := \mathrm{Log}(3z - \mathrm{i})$ 的解析区域并计算 $f'(z)$.

解 因为 f 是函数 Log 和 $g(z) = 3z - \mathrm{i}$ 的复合函数，由链式法则知，对于每个使 $3z - \mathrm{i}$ 位于定理 4 中的区域 D^* 中的点 z，f 是可微的. 所以使得 $3z - \mathrm{i}$ 为负数或零的点 f 不可微；而这些点位于水平射线 $x \leq 0$，$y = \dfrac{1}{3}$ 上(见图 3-4). 于是，在以此射线分开的复平面上，由式(9)可得

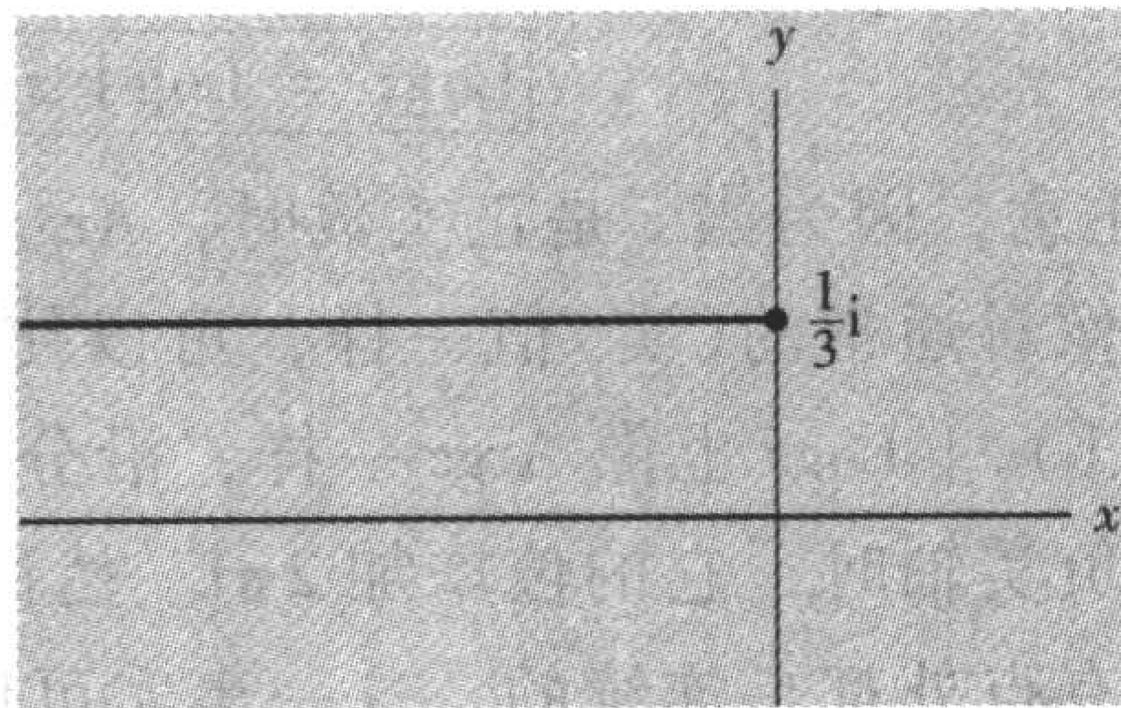


图 3-4 $\mathrm{Log}(3z - \mathrm{i})$ 的解析区域

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log}(3z - \mathrm{i}) = \frac{1}{3z - \mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(3z - \mathrm{i}) = \frac{3}{3z - \mathrm{i}}.$$ ■

当负实轴上不连续性的定位不方便时，可以使用 $\log z$ 的其他分支. 显然，表达式

121

$$\mathcal{L}_\tau(z) := \mathrm{Log}|z| + \mathrm{i}\arg_\tau z \tag{13}$$

给出了一个虚部在区间$(\tau, \tau + 2\pi]$内的单值函数. 此外，应用类似定理 4 的证明方法，可证明该函数在除去射线 $\theta = \tau$ 和原点的复平面上是解析的，且在这个区域内有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}_\tau(z) = \frac{1}{z}.$$

⊖ 细心的读者将会注意到，可以用同样的方法证明，对任何在 z_0 的邻域内解析且一一的函数 $f(z)$，如果 $f'(z_0) \neq 0$，则其反函数是解析的且有导数 $1/f'(z_0)$.

图 3-5 给出了$\mathcal{L}_{-\pi/4}(z)$的解析区域. 当然，$\log z$ 的任何分支在原点处都是不解析的，原点称为 $\log z$ 的分支点.

至此，我们通过不太正式的方法，应用术语“$\log z$ 的分支”来定义这个多值函数的特定值. 为更加精确起见，我们给出如下定义.

定义 4 $F(z)$称为区域 D 内多值函数 $f(z)$的一个**分支**，如果 $F(z)$在 D 内单值连续，且对 D 中的每一点 z，函数值 $F(z)$是 $f(z)$的一个值.

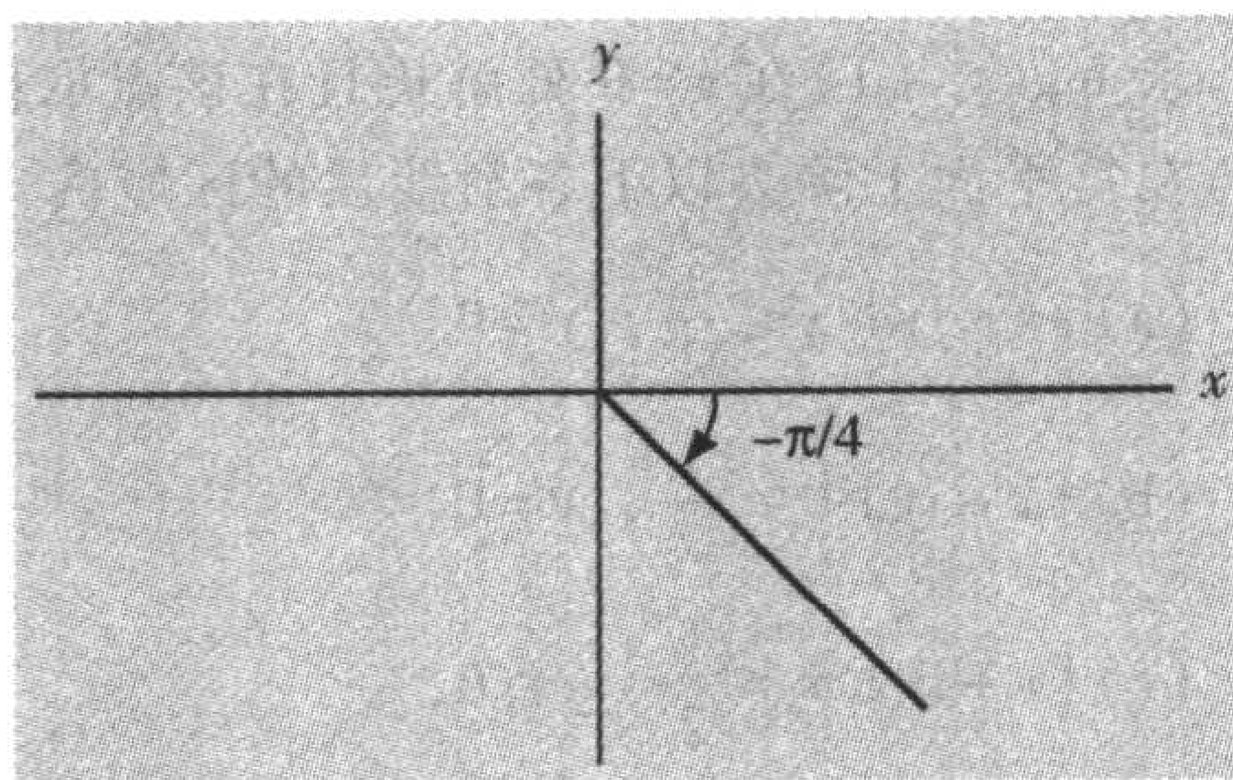


图 3-5 $\mathcal{L}_{-\pi/4}(z)$的解析区域

例如，在沿负实轴割开的复平面上，$\operatorname{Arg} z$ 是 $\arg z$ 的一个分支，$\operatorname{Log} z$ 是 $\log z$ 的一个分支. 在这个相同的区域上，函数 $e^{(1/2)\operatorname{Log} z}$ 给出 $z^{1/2}$ 的一个分支，其函数值都落在右半平面上.

122

例 2 确定 $f(z) = \log(z^3 - 2)$的一个分支，使其在 $z=0$ 处解析，并求 $f(0)$和 $f'(0)$.

解 多值函数 $f(z)$由对数函数和解析函数 $g(z) = z^3 - 2$ 复合而成. 因此，由链式法则，只需选定对数函数在 $g(0) = -2$ 处解析的一个分支即可. 特别地，$F(z) = \mathcal{L}_{-\pi/4}(g(z))$即满足要求. 对于这个选择，

$$F(0) = \mathcal{L}_{-\pi/4}(0^3 - 2) = \operatorname{Log}2 + i\pi,$$

$$F'(0) = \mathcal{L}'_{-\pi/4}(g(0))g'(0) = \frac{g'(0)}{g(0)} = 0.$$ ■

在本节最后，需要提醒大家，在计算机上实现复算法时，所有的函数必须以单值的情形进行编程. 例如，复对数函数通常取“主值”$\operatorname{Log} z$ 进行编程. 此时一些恒等式可能失效，如等式(6)，因为一般情况下，$\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ 是不成立的. (见习题 3.)

练习 3. 3

1. 求下列各式的值.

   (a) $\log i$　　(b) $\log(1 - i)$

   (c) $\operatorname{Log}(-i)$　　(d) $\operatorname{Log}(\sqrt{3} + i)$

2. 验证公式(6)和(7).

3. 证明：当 $z_1 = i$ 和 $z_2 = i - 1$ 时，有

$$\operatorname{Log} z_1 z_2 \neq \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2.$$

4. 证明当且仅当 $-\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi$ 时，$\operatorname{Log} e^z = z$.

5. 解下列方程：

   (a) $e^z = 2i$　　(b) $\operatorname{Log}(z^2 - 1) = \frac{i\pi}{2}$　　(c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

6. 找出下列“证明”$z = -z$ 中的错误：因为 $z^2 = (-z)^2$，所以 $2\operatorname{Log} z = 2\operatorname{Log}(-z)$，故 $\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-z)$，由此推出 $z = e^{\operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Log}(-z)} = -z$.

7. 用柯西–黎曼方程的极形式(见练习 2. 4 习题 6)给出定理 4 的另一种证明.

8. 不直接验证拉普拉斯方程，说明函数 $\operatorname{Log}|z|$ 为何在不包含原点的任一区域内是调和函数.

123

9. 确定 $f(z)=\mathrm{Log}(4+\mathrm{i}-z)$ 的解析区域，并计算 $f'(z)$.

10. 证明：函数 $\mathrm{Log}(-z)+\mathrm{i}\pi$ 是 $\log z$ 的一个在复平面内除去负实轴后的区域上的解析分支.

11. 确定 $\log(z^2+2z+3)$ 在 $z=-1$ 处解析的一个分支，并求它在 -1 处的导数值.

12. 求 $\log(z^2+1)$ 在 $z=0$ 处解析且在该点取值为 $2\pi\mathrm{i}$ 的一个分支.

13. 在复平面上除去以下各射线后的区域内，分别求出 $\log(2z-1)$ 的一个解析分支.

(a) $\{x+\mathrm{i}y \mid x\leqslant\frac{1}{2},\ y=0\}$

(b) $\{x+\mathrm{i}y \mid x\geqslant\frac{1}{2},\ y=0\}$

(c) $\{x+\mathrm{i}y \mid x=\frac{1}{2},\ y\geqslant 0\}$

14. 证明：不存在这样的函数 $F(z)$，即它在环 D: $1<|z|<2$ 上解析，且对所有 $z\in D$ 满足 $F'(z)=1/z$.
[提示：假设 F 存在，证明对 $z\in D$，z 不是负实数，$F(z)=\mathrm{Log}z+c$，其中 c 是一个常数.]

15. 求一个从上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 到无穷水平带形区域

$$\mathcal{H}:=\{u+\mathrm{i}v \mid -\infty<u<\infty, 0<v<1\}$$

的一一解析映射.
[提示：考虑 $w=\mathrm{Log}z$.]

16. 画出 $\mathrm{Log}z$ 的实部和虚部的曲线，并验证 2.5 节中讨论过的正交性质.

17. 证明 $\log z$ 的任何分支(参看定义 4)在相应区域上都是解析的且导数为 $1/z$.

18. 证明：若 F 是 $\log z$ 在一个在区域 D 内的解析分支，则 $\log z$ 在 D 内的所有解析分支是 $F+2k\pi\mathrm{i}$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$. [提示：应用习题 17 的结论.]

19. 试构造 $\log z$ 的一个分支，使其在复平面内除去半抛物线 $\{x+\mathrm{i}y: x\geqslant0,\ y=\sqrt{x}\}$ 后的区域 D 上解析.

20. 仅用实算法运算编写一个计算机程序，使得输入 (x, y) 是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部和虚部，输出是以下诸式的实部和虚部.

(a) $\mathrm{Log}z$ (b) $\mathcal{L}_{-\pi/4}(z)$ (c) $\mathcal{L}_0(z)$ (d) $\mathcal{L}_{4\pi}(z)$

124

21. 为计算机软件系统找一个规则 $\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2$ 不成立的例子.

3.4 垫、楔与壁

现在我们已经定义了函数 $\log z$，当对 z 作适当限制时，它为解析函数，由 2.5 节中的讨论可得到一对新的调和函数(实部和虚部)，我们可以用它们来解决恒温问题.

$\mathrm{Log}z$ 的实部 $\mathrm{Log}|z|$ (或在极坐标下的 $\mathrm{Log}r$) 在以原点为心的任一圆周上是一个常数.(显然!)所以恒温场、静电场，或者任何由拉普拉斯(Laplace)方程 $\phi_{xx}+\phi_{yy}=0$ 给出且在同心圆周上为常数的场量 $\phi(x, y)$ 必然在这两个圆周间呈对数变化. 例 1 描述了一种隔离两种不同温度流体的导"热管".

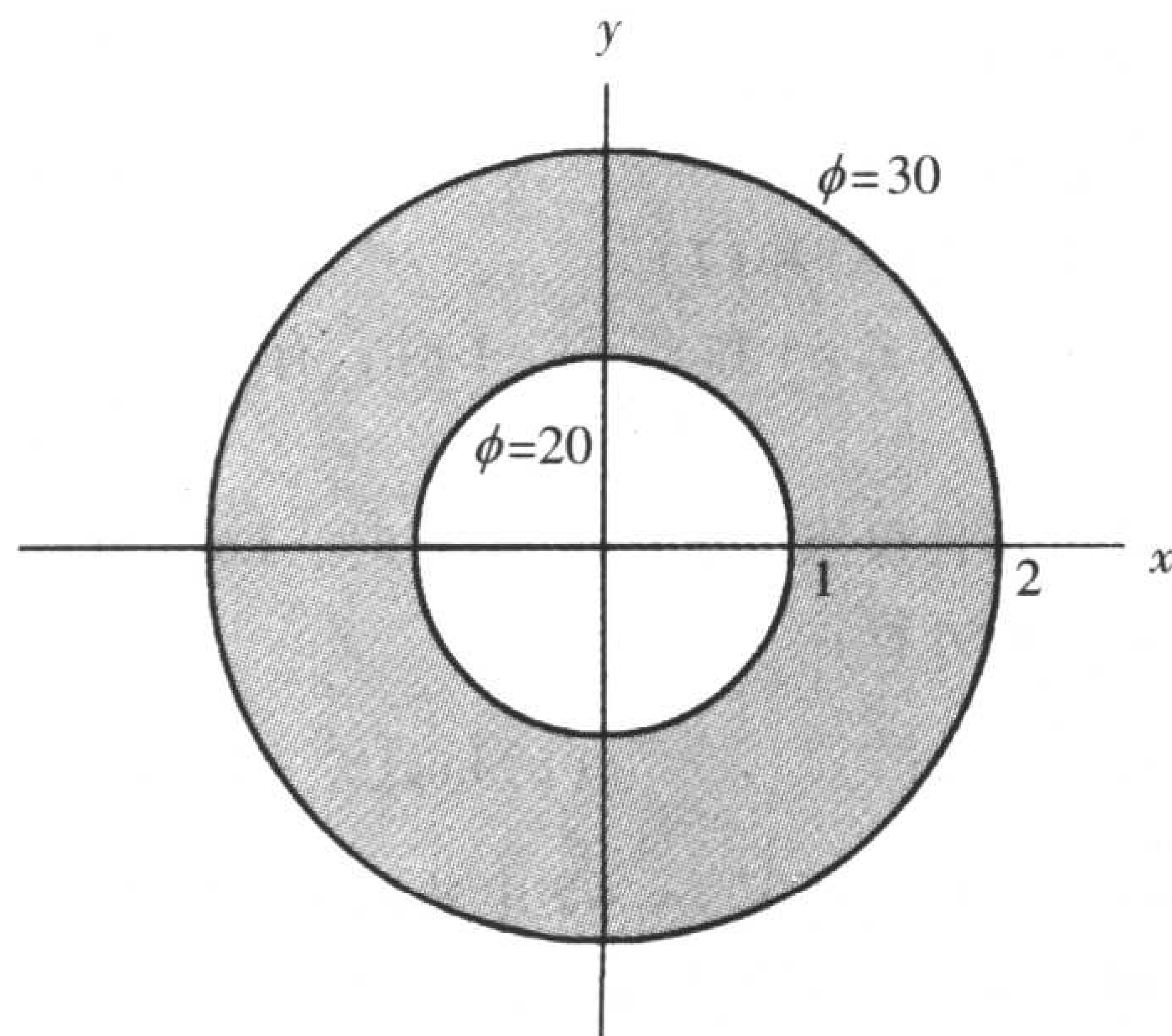


图 3-6 热管的边值问题

例 1 求函数 $\phi(x, y)$，使其在圆周 $|z|=1$ 和 $|z|=2$ 围成的垫形区域内调和，且在内圆周和外圆周上的取值分别为 $\phi=20$ 和 $\phi=30$. 见图 3-6.

解 仿2.5节中例2，对任何常数 A 和 B，函数 $\phi(x, y)=A\mathrm{Log}|z|+B$ 都是调和的，故仅需调整 A 和 B，使它们满足已给的边界条件，即需要

$$A\mathrm{Log}1+B=20 \quad 和 \quad A\mathrm{Log}2+B=30,$$

125

所以 $B=20$，$A=10/\mathrm{Log}2$，所求的解为

$$\phi(z)=10\frac{\mathrm{Log}|z|}{\mathrm{Log}2}+20. \qquad ■$$

如果圆周的圆心在 z_0 处，我们将用到的解的形式为 $A\mathrm{Log}|z-z_0|+B$.

对这个应用来说，因为只用到函数 $\mathrm{Log}\,z$ 的实部 $\mathrm{Log}|z|$，它的值与分支的取法无关，故不用考虑那些影响函数 $\mathrm{Log}\,z$ 的分支割线. 当我们应用沿着从原点出发的射线上取常值的虚部 $\arg z$ 时，则需要稍微小心一些. 下例描述了一个边缘保持恒温的楔的温度分布.

例2 求函数 $\phi(x, y)$，使其在图3-7描述的楔形区域上调和，且在上、下边界上分别取值 $\phi=20$ 和 $\phi=30$.

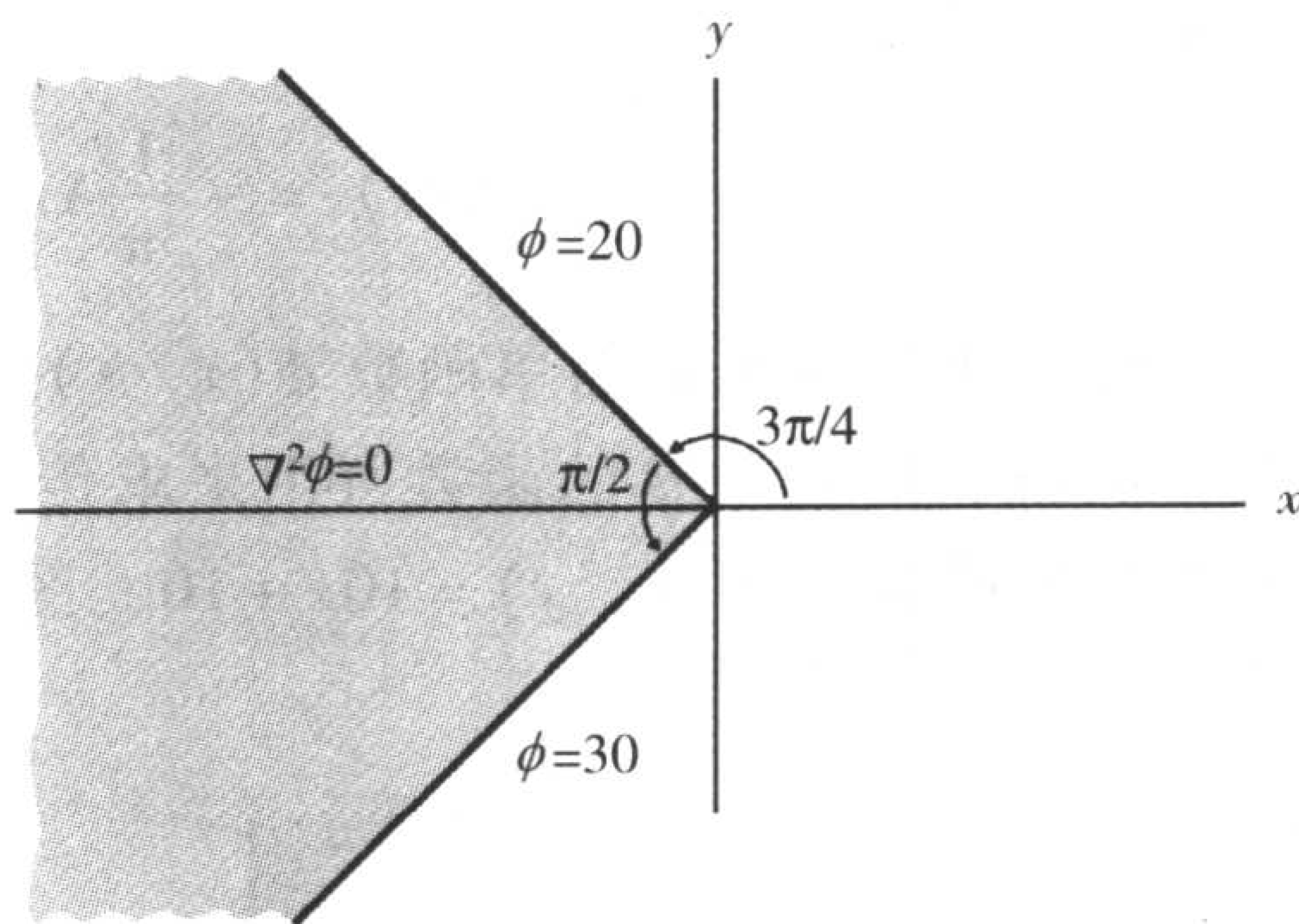


图3-7 楔的边值问题

解 因为 $\mathrm{Arg}z$ 的分支割线负实轴在所给的楔形区域内，所以严格地讲，我们不能使用形如 $A\mathrm{Arg}z+B$ 的函数. 但显然可作如下修正：可以应用 $\arg z$ 的另一分支，例如 $\arg_0 z$，它在正实轴上不连续. 换句话说，这时辐角 $\theta=\arg z$ 的变化范围是从0到 2π，而不是以前的从 $-\pi$ 到 $+\pi$. 边界条件是

$$A\frac{3\pi}{4}+B=20 \quad 和 \quad A\frac{5\pi}{4}+B=30,$$

故 $A=20/\pi$，$B=5$，所求的解为

$$\phi(z)=\frac{20}{\pi}\arg_0 z+5. \qquad ■$$

126

图3-8中描述的是更为复杂的边值问题，它可以看成若干180°的楔的排列. 如果我们构造在上半平面上调和的函数

$$\phi(x,y)=A_1\mathrm{Arg}(z-x_1)+A_2\mathrm{Arg}(z-x_2)+\cdots+A_n\mathrm{Arg}(z-x_n)+B,$$

就可以适当地选取常数使得它们满足边值条件. 下例将详细说明这一过程.

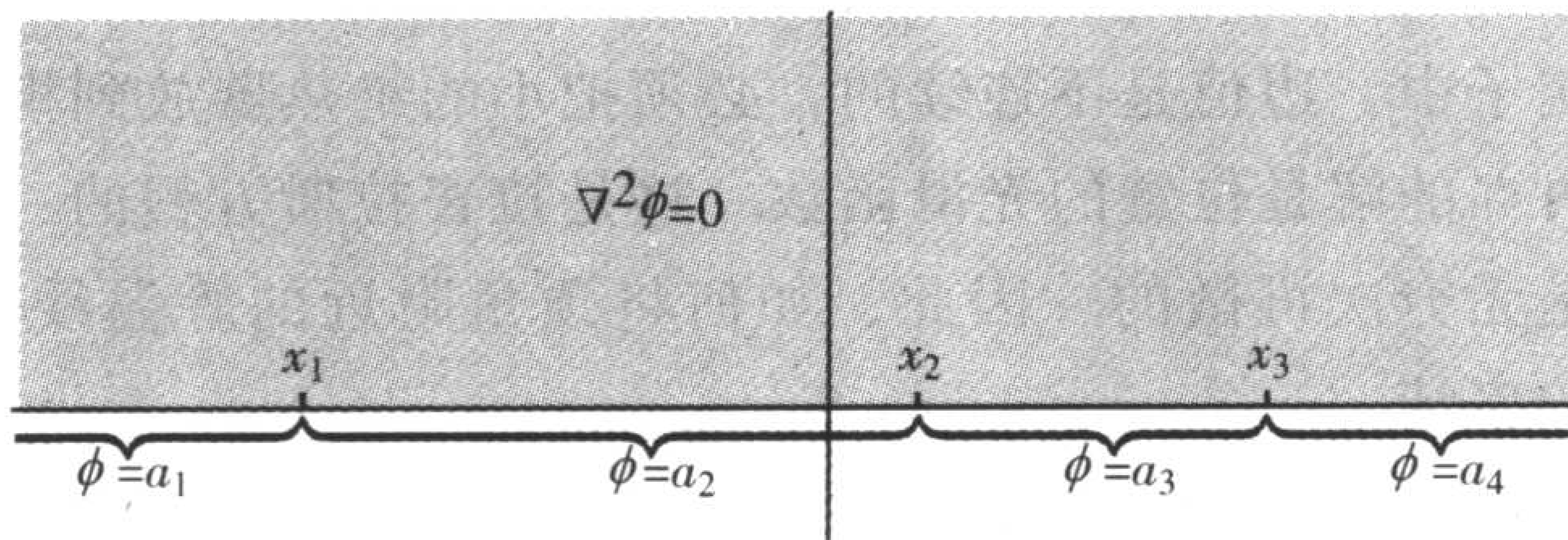


图3-8 上半平面的边值问题

例3 求函数 $\phi(x,y)$，使其在上半平面上调和，且在 x 轴上取下列各值：若 $x>1$，$\phi(x,0)=0$；若 $-1<x<1$，$\phi(x,0)=1$；若 $x<-1$，$\phi(x,0)=0$.

解 将所给边值条件写成如下形式：

$$\phi(x,0) = A_1\mathrm{Arg}(z+1) + A_2\mathrm{Arg}(z-1) + B.$$

因为 $z=x>1$ 时，$\mathrm{Arg}(z-1)=\mathrm{Arg}(z+1)=0$，所以

$$A_1\cdot 0 + A_2\cdot 0 + B = 0.$$

因为 $z=x$，$-1<x<1$ 时，$\mathrm{Arg}(z-1)=\pi$，$\mathrm{Arg}(z+1)=0$，所以

$$A_1\cdot 0 + A_2\cdot\pi + B = 1.$$

因为 $z=x<-1$ 时，$\mathrm{Arg}(z-1)=\mathrm{Arg}(z+1)=\pi$，所以

$$A_1\cdot\pi + A_2\cdot\pi + B = 0.$$

因此 $B=0$，$A_1=-1/\pi$，$A_2=1/\pi$，从而所求解为

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}(z+1) + \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}(z-1).$$ ■

最后，我们注意到简单函数 $\phi(x,y)=x$（即 $f(z)=z$ 的实部）是调和的，并且在垂线上取常数，从而形如 $Ax+B$ 的函数可用来求传导墙或隔离两个温室的厚平板的恒定温度. 图 3-9 所描述的问题的解为 $\phi(x,y)=10x+10$. 图 3-10 描述的四个几何图形给出了 ϕ 的水平曲线或等温线.

127

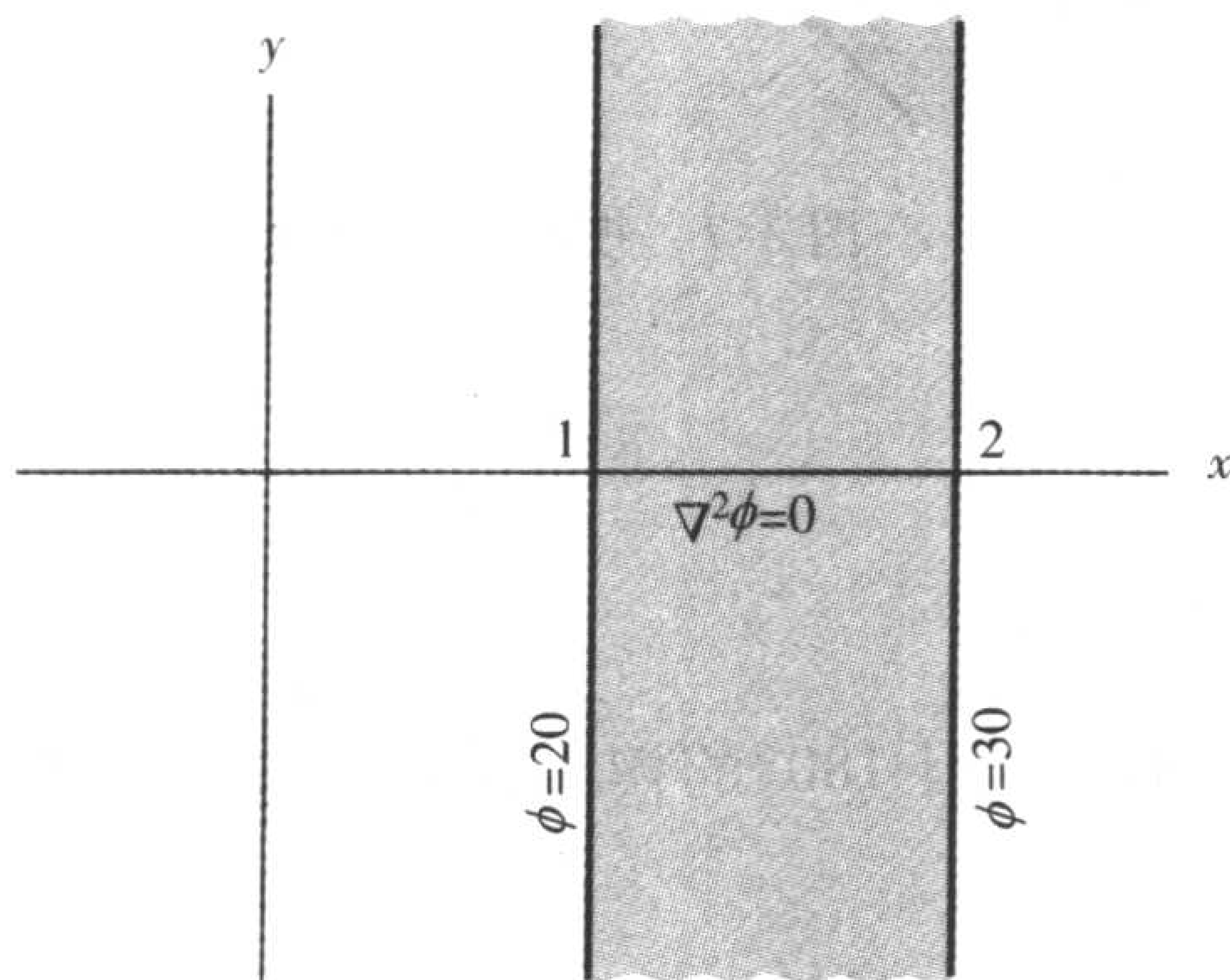


图 3-9 厚平板的边值问题

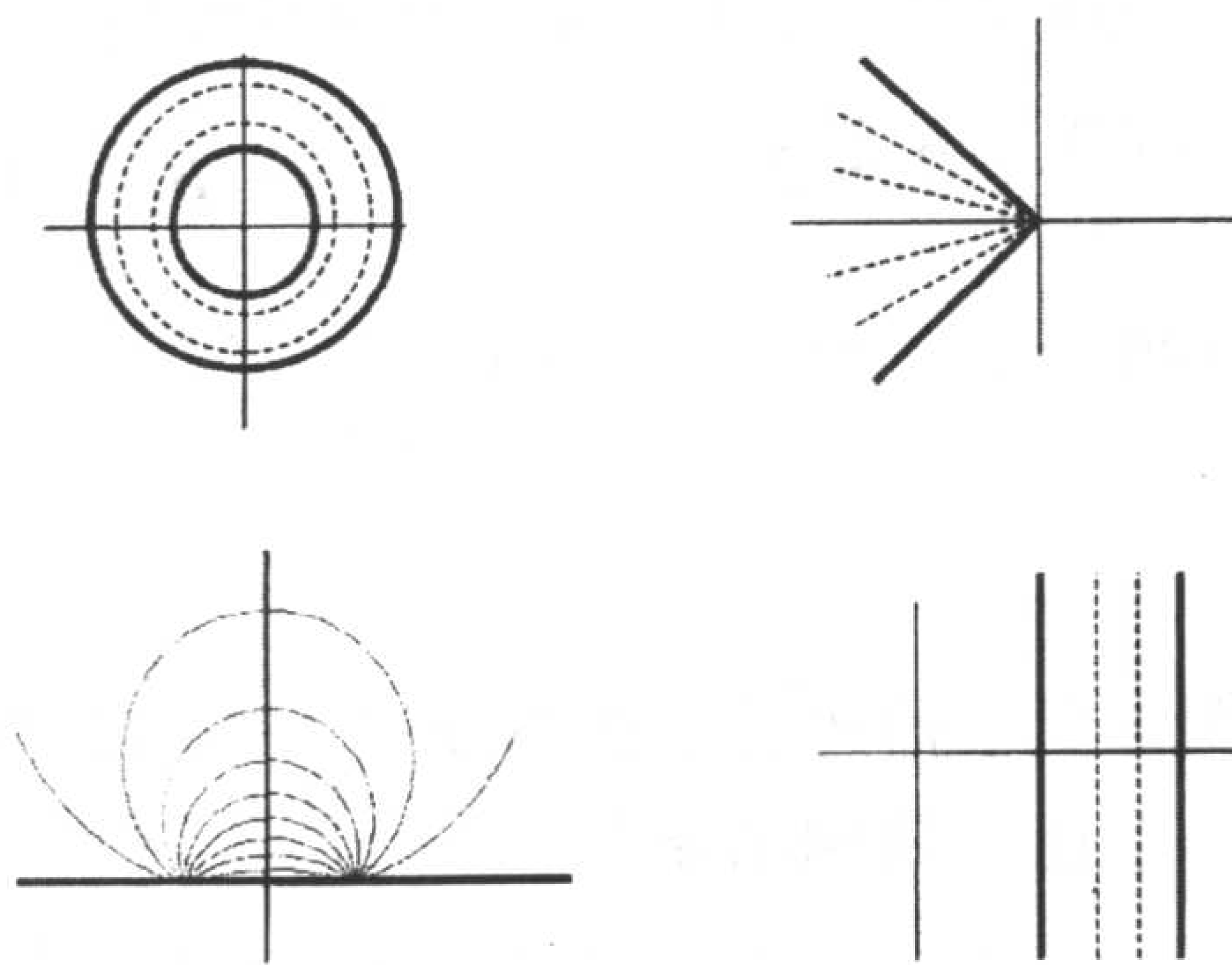


图 3-10 等温线

注意，关于楔的例子中，边值是不连续的，必须把小的绝热器放到楔的顶角处以保持温度不下降. 但是，它的内部的解是位置的光滑函数. 这是拉普拉斯方程的一个特征. 事实上，它的解除了边界点外都是无穷次可微的. 因此，如何将顶角附近的等温线变成“扇形”来修改不连续性是一件有意义的事情.

在第7章中，我们将应用复分析技巧，把复杂几何区域内的拉普拉斯方程问题简化为垫、楔与壁中的相应问题，故本节中使用的方法具有重要意义.

128

练习3.4

1. 求图3-11中描述的边值问题的一个解，并求其在(0，0)处的值.
2. 求图3-12中描述的边值问题的一个解，并求其在(0，0)处的值.

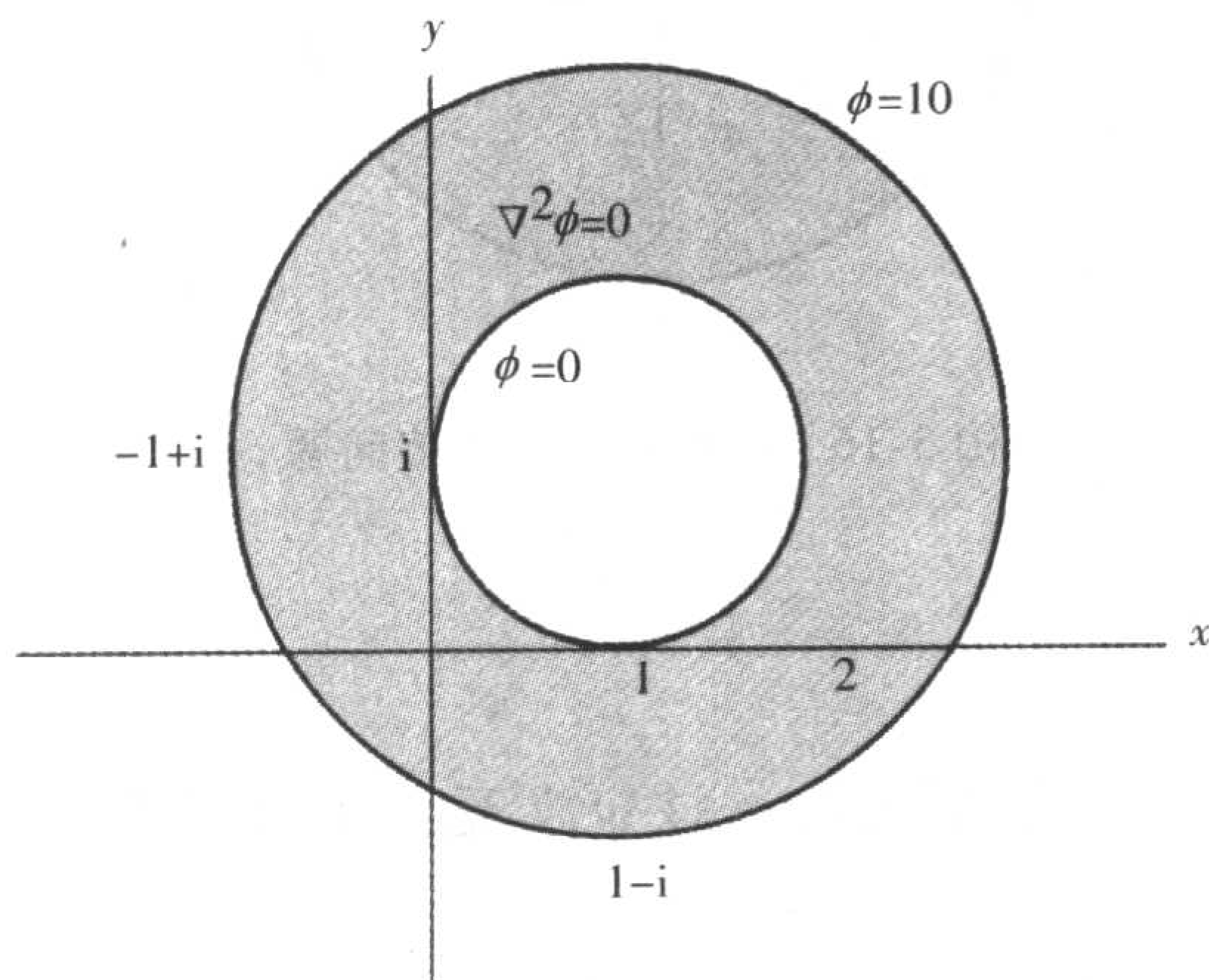


图3-11　习题1中的边值问题

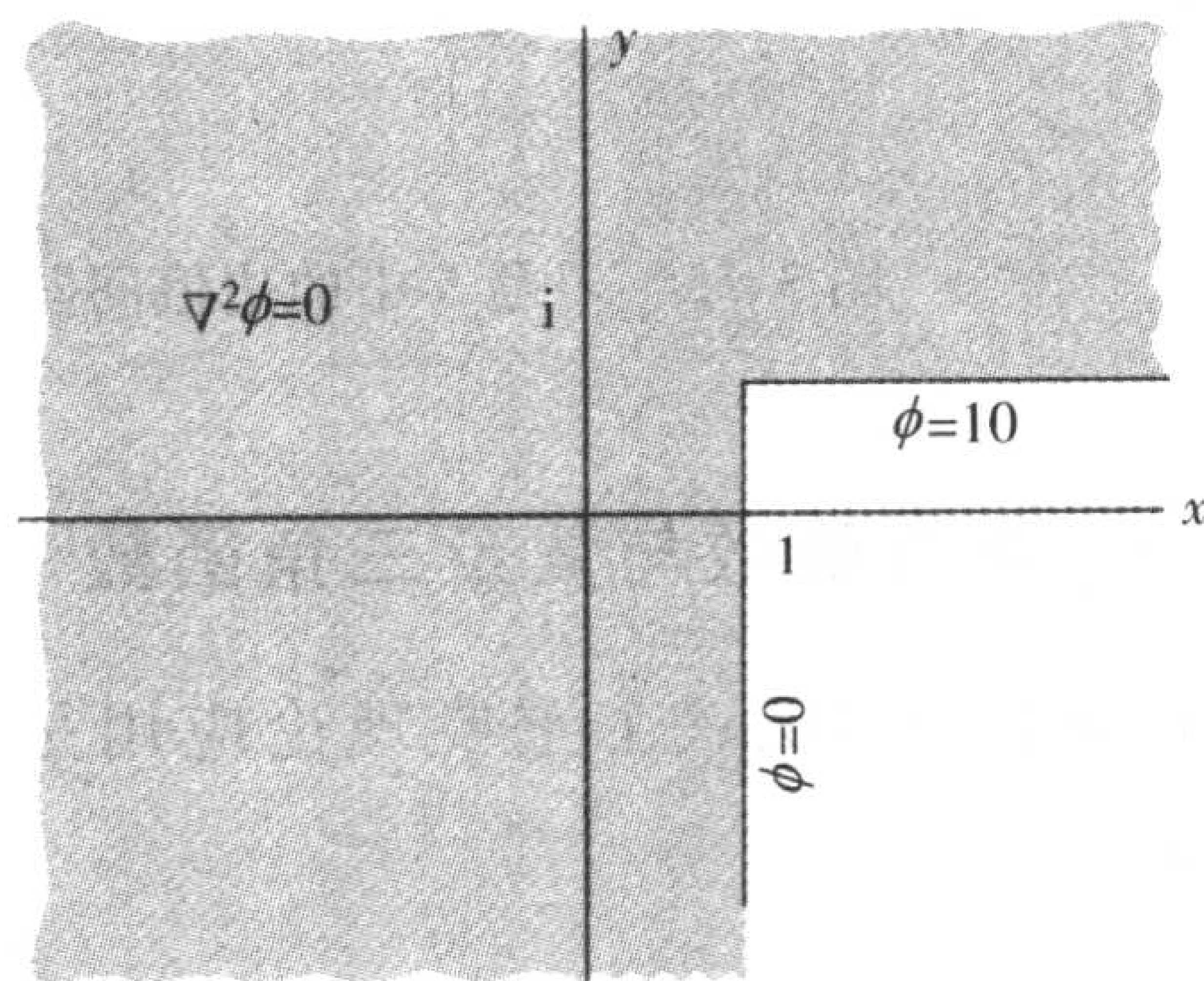


图3-12　习题2中的边值问题

129

3. 求图3-13中描述的边值问题的一个解，并求其在(1，1)处的值.
4. 求图3-14中描述的边值问题的一个解，并求其在(2，3)处的值.

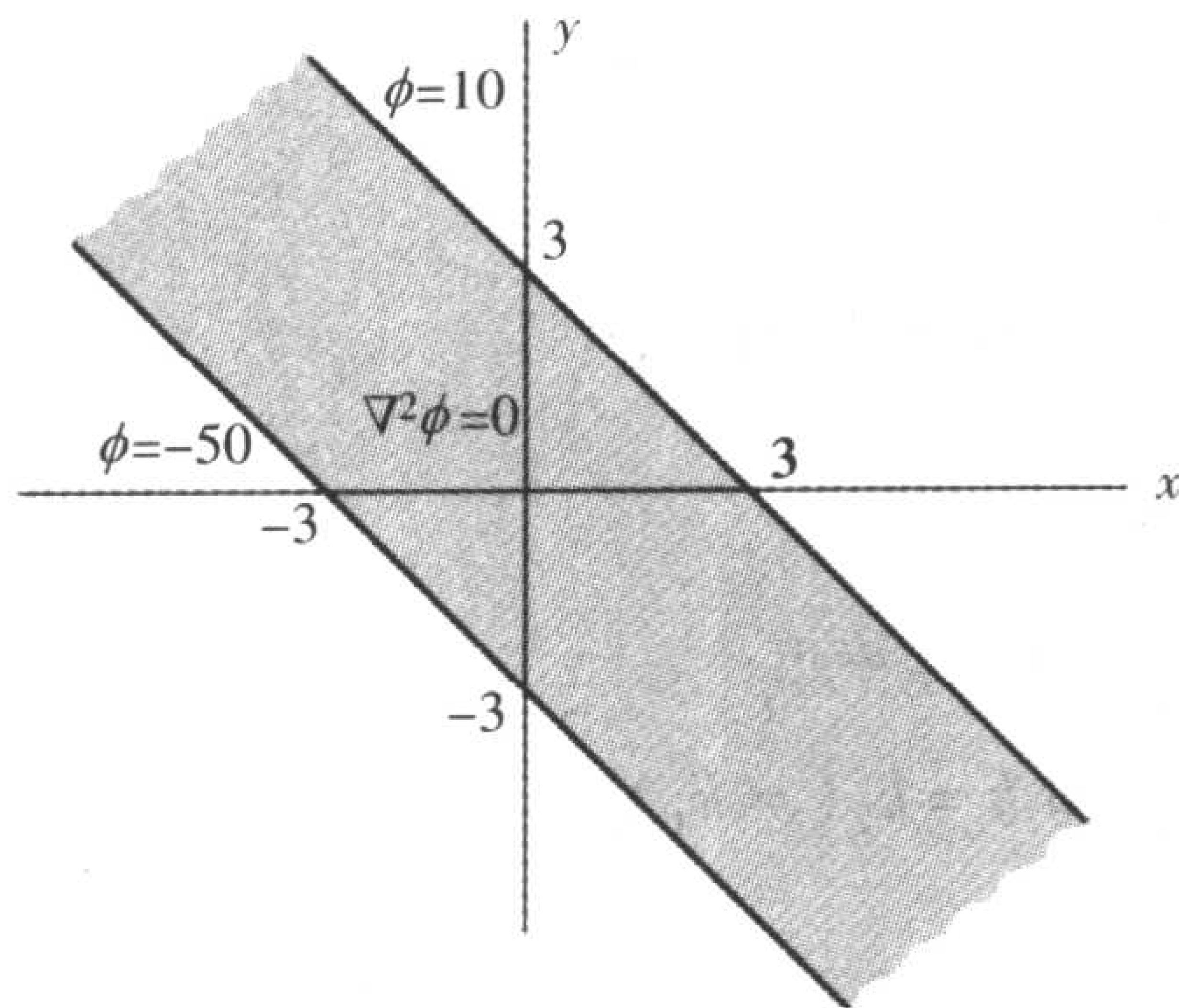


图3-13　习题3中的边值问题

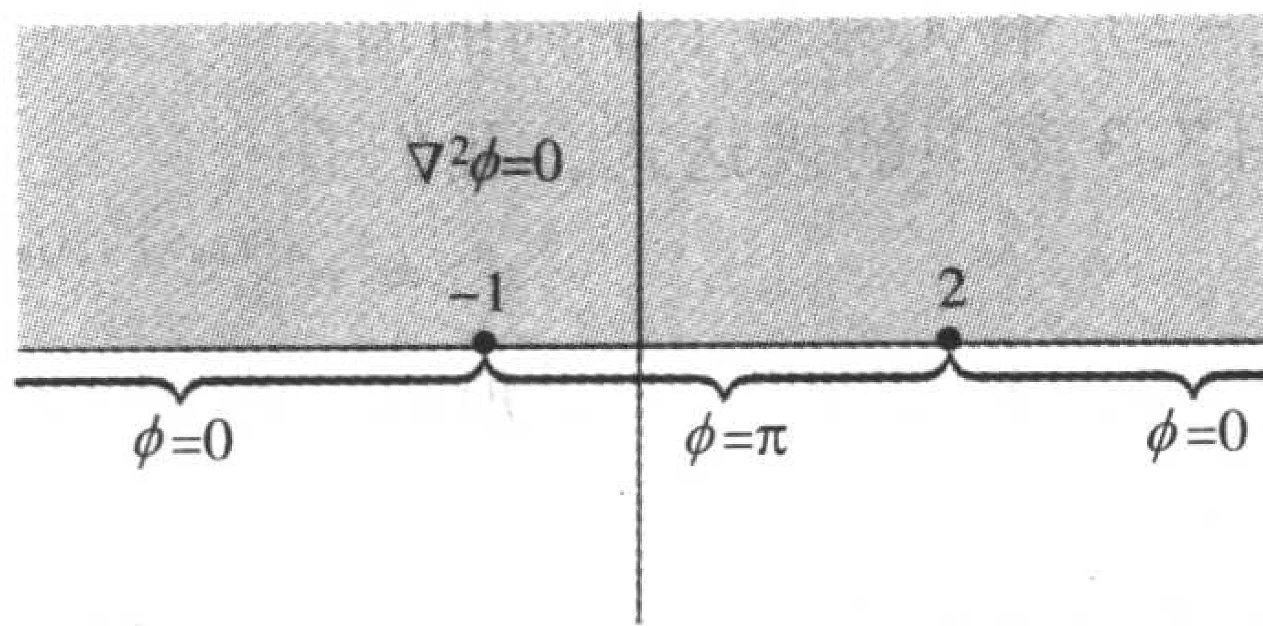


图3-14　习题4中的边值问题

5. 求图3-15中描述的垫内边值问题的解 $\phi(x, y)$ 的一般公式.
6. 求图3-16中描述的圆盘内部的边值问题的解 $\phi(x, y)$ 的一般公式.（如果不好确定，可运用上面练习中得出的公式，并令内径 r_1 趋于零.）
7. 证明函数(argz)(Log | z |)是调和的.［提示：它是什么解析函数的虚部？］

130

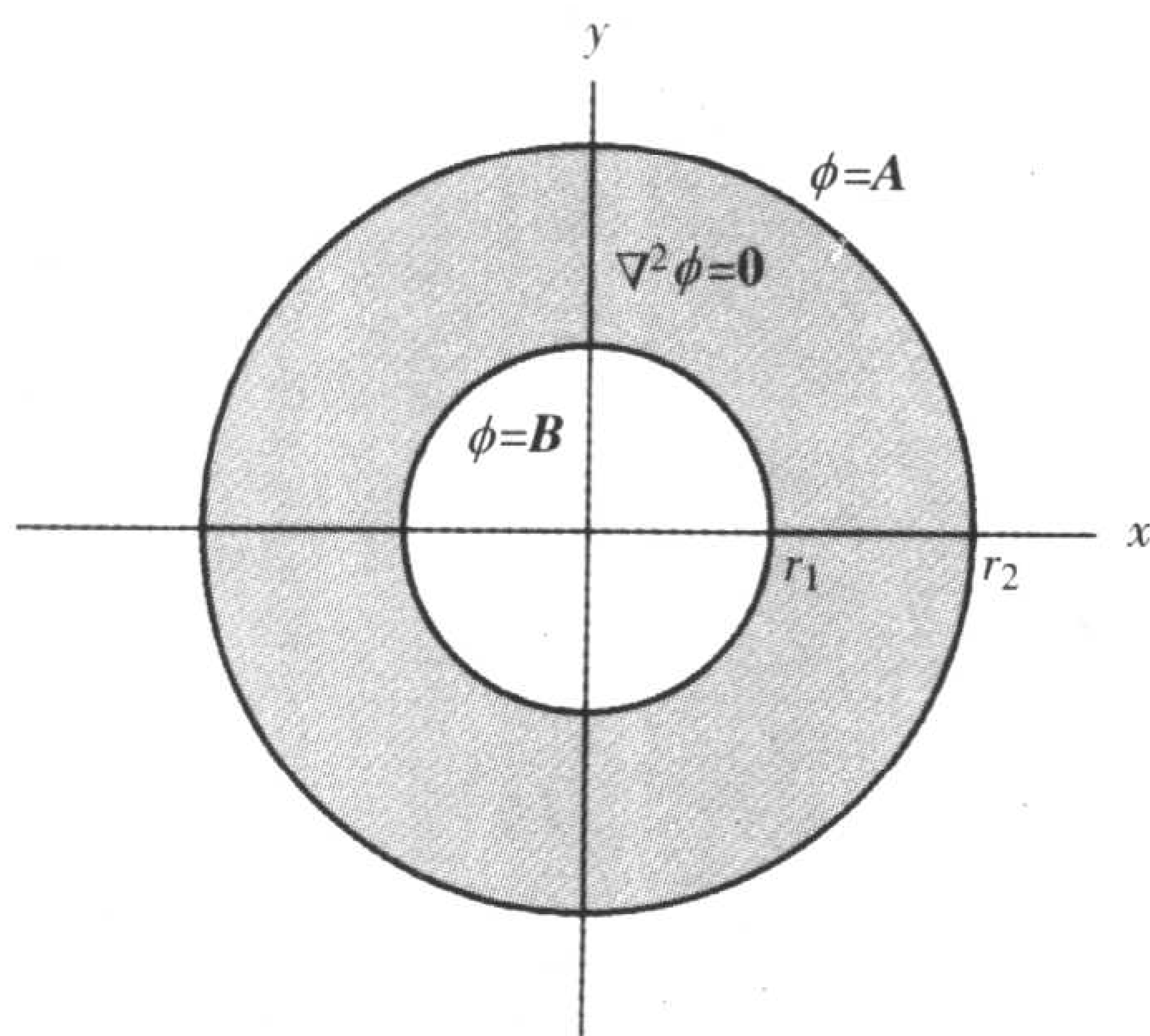


图 3-15 习题 5 中的边值问题

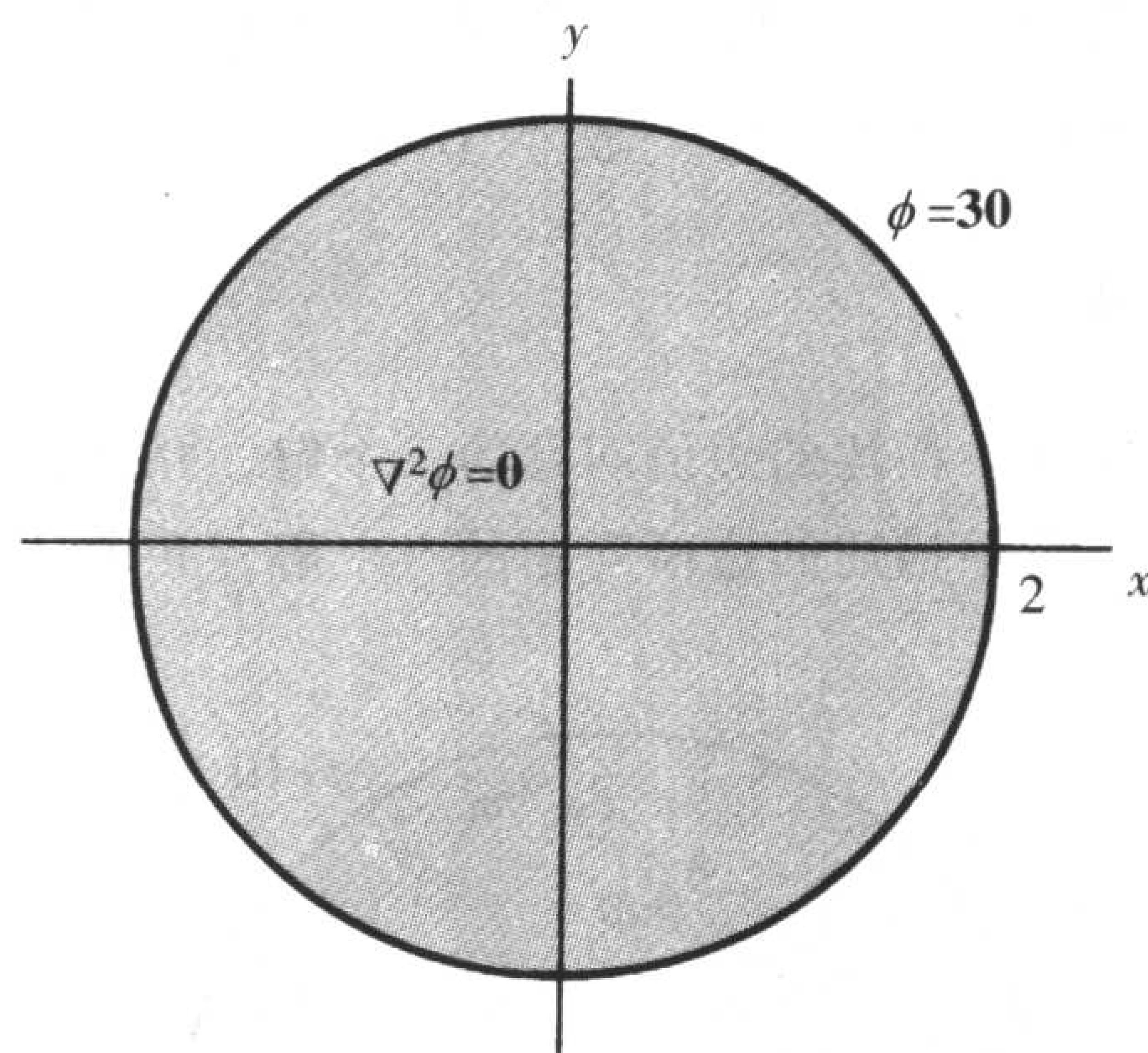


图 3-16 习题 6 中的边值问题

3.5 复幂函数与复反三角函数

对数函数的一个重要理论应用是可用来定义 z 的复幂函数．该定义受到下述恒等式的启发：

$$z^n = (e^{\log z})^n = e^{n\log z},$$

131 其中 n 为任意整数.

> **定义 5** 如果 α 是一个复常数且 $z\neq 0$，那么 z^α 由下述等式定义：
> $$z^\alpha := e^{\alpha\log z}.$$

这表明由 $\log z$ 的任一值可得到 z^α 的一个特定值.

例 1 求 $(-2)^i$ 的所有值.

解 因为 $\log(-2)=\text{Log}2+(\pi+2k\pi)i$，从而

$$(-2)^i = e^{i\log(-2)} = e^{i\,\text{Log}2}e^{-\pi-2k\pi} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

所以 $(-2)^i$ 有无穷多个不同的值. ■

用 3.3 节中的表达式，我们有

$$z^\alpha = e^{\alpha(\text{Log}|z|+i\text{Arg}z+2k\pi i)} = e^{\alpha(\text{Log}|z|+i\text{Arg}z)}e^{\alpha 2k\pi i}, \tag{1}$$

其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 所以，在等式(1)中取 $k=k_1$ 和 $k=k_2(\neq k_1)$，当

$$e^{\alpha 2k_1\pi i} = e^{\alpha 2k_2\pi i}$$

时，z^α 的值将相等. 但由 3.2 节中的定理 3，这个等式只有当

$$\alpha 2k_1\pi i = \alpha 2k_2\pi i + 2m\pi i$$

时才成立，其中 m 是一个整数. 解这个方程，得 $\alpha=m/(k_1-k_2)$. 即在公式(1)中，只有当 α 是一个实有理数时，z^α 才可能取一些相等的值. 从而，若 α 不是一个实有理数，在方程(1)中每取一个整数 k 就确定一个值，故 z^α 可取无穷多个不同的值．另一方面，若 $\alpha=m/n$，其中 m 和 $n>0$ 是没有公因子的整数，则可证明 $z^{m/n}$ 正好可取 n 个不同的值，即

$$z^{m/n}=\exp\left(\frac{m}{n}\text{Log}\mid z\mid\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{m}{n}(\text{Arg}z+2k\pi)\right)\quad(k=0,1,\cdots,n-1).\tag{2}$$

这与 1.5 节中讨论的根的理论完全一致．总之，有如下结论：

当 α 是一个实整数时，z^α 是单值的.

当 α 是一个实有理数时，z^α 可取有限多个值.

在其余情形，z^α 可取无穷多个值.

由定义 4 和 5 可以清楚地看到，由 $\log z$ 的每个分支可以得到 z^α 的一个分支．例如，由 $\log z$ 的主值分支可得到 z^α 的主值分支，记作 $e^{\alpha \text{Log}z}$．由于 e^z 是整函数，$\text{Log}z$ 在定理 4 中的裂纹区域 $D^*=\mathbf{C}\setminus(-\infty,0]$ 内解析，链式法则表明，z^α 的主值分支在 D^* 内也是解析的．另外，对 D^* 中的任意 z，有 [132]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(e^{\alpha\text{Log}z})=e^{\alpha\text{Log}z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\alpha\text{Log}z)=e^{\alpha\text{Log}z}\frac{\alpha}{z}.$$

z^α 的其他一些分支也可由 $\log z$ 另外的分支构造出来，由于后者的每个分支有导数 $1/z$，因此公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\alpha)=\alpha z^\alpha\frac{1}{z}\tag{3}$$

对 z^α 的每个相应分支都成立(假设等式两端取同一分支)[○]．注意，若 z_0 是任一给定的非零点，则可通过选取 $\log z$ 的避开 z_0 的一个分支割线，得到 z^α 的一个在 z_0 的某个邻域内解析的分支.

对于复杂函数的"分支处理"是一件比较烦琐的事情，所幸的是它们在基本应用方面不常碰到．下面通过一些例子介绍关于这方面的一些方法和技巧.

例 2 求 $(z^2-1)^{1/2}$ 的一个分支，使它在单位圆的外部 $|z|>1$ 解析.

解 本题是要寻找一个在单位圆外部 $|z|>1$ 内解析的函数 $w=f(z)$，满足

$$w^2=z^2-1.\tag{4}$$

注意，$(z^2-1)^{1/2}$ 的主值分支，即

$$e^{(1/2)\text{Log}(z^2-1)}$$

肯定不满足要求；因为它的分支割线为使 z^2-1 为负实数的点集，即由整个 y 轴及 x 轴的一部分组成(见图 3-17)．但是，如果我们试着将 w 用其他形式表示时，势必会考虑把 $z(1-1/z^2)^{1/2}$ 作为(4)式的解．$(1-1/z^2)^{1/2}$ 的主值分支，即

$$e^{(1/2)\text{Log}(1-1/z^2)},$$

在 $1-1/z^2$ 是负实数的点有分支割线，这种情况当且仅当 $1/z^2$ 是实数且大于 1 时才发生，因此，这条割线是线段 $[-1,1]$，如图 3-18 所示．所以

$$w=f(z)=ze^{(1/2)\text{Log}(1-1/z^2)}$$

满足在单位圆外解析所需的条件[○]. ■ [133]

○ 我们指出：如果附加条件"在定义 z^α 时用到的对数函数的分支与定义 $z^{\alpha-1}$ 时用到的对数函数的分支相同"，可将方程(3)写成大家更为熟悉的形式：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\alpha)=\alpha z^{\alpha-1}$.

○ 为确保我们的方法没有导致新解的出现，应该证明由方程(5)给出的每个 w 值满足 $z=\sin w$.

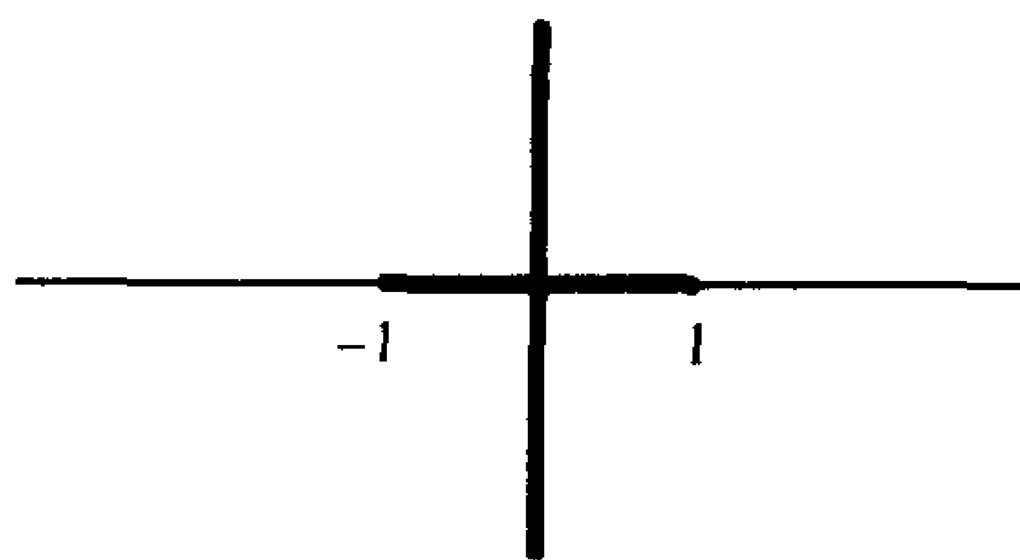


图3-17 $e^{(1/2)\mathrm{Log}(z^2-1)}$的分支割线

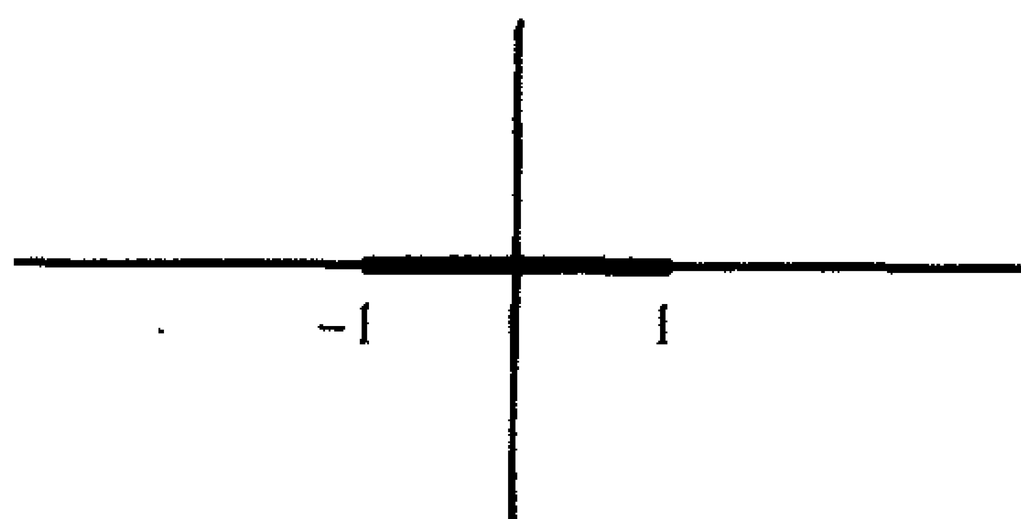


图3-18 $e^{(1/2)\mathrm{Log}(1-1/z^2)}$的分支割线

现在，我们已经能用三角函数来表示指数函数(见1.4节)及用指数函数表示三角函数(见3.2节)，且可将对数函数看成是指数函数的反函数，因此，下面这个例子就很正常了，它表明反正弦函数是一个对数函数.

例3 正弦函数的反函数 $w=\sin^{-1}z$ 由方程 $z=\sin w$ 定义. 证明 $\sin^{-1}z$ 是一个多值函数，且可表示为

$$\sin^{-1}z = -\mathrm{i}\log[\mathrm{i}z + (1-z^2)^{1/2}]. \tag{5}$$

证 由方程

$$z = \sin w = \frac{e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}$$

得

[134]

$$e^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}ze^{\mathrm{i}w} - 1 = 0. \tag{6}$$

应用求根公式，从方程(6)中解出 $e^{\mathrm{i}w}$，得

$$e^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z + (1-z^2)^{1/2},$$

当然，这个平方根是2值函数. 取对数即得公式(5). ■

对于(5)式，首先选取平方根的一个分支，然后再选取对数函数的一个适当分支，就可得到多值函数 $\sin^{-1}z$ 的一个分支. 由链式法则及公式(5)，可以证明 $\sin^{-1}z$ 任何这样的分支都满足

$$\frac{d}{dz}(\sin^{-1}z) = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} \quad (z \neq \pm 1), \tag{7}$$

其中上式右端平方根的选取必须与在 $\sin^{-1}z$ 中使用的分支相同.

例4 假设 z 是实数，且属于区间 $(-1, 1)$，如果在公式(5)中用的是主值，那么 $\sin^{-1}z$ 的值域是什么?

解 由于公式(5)中用的是主值，它可写为

$$\mathrm{Sin}^{-1}z = -\mathrm{i}\,\mathrm{Log}[\mathrm{i}z + e^{(1/2)\mathrm{Log}(1-z^2)}]. \tag{8}$$

当 $|z| = |x| < 1$ 时，显然 $1-z^2$ 位于区间 $(0, 1]$ 内，且它的对数值是实数；因此在(8)式中含有指数 $(1-z^2)^{1/2}$ 的指数函数的值是正实数. 而另一方面，$\mathrm{i}z$ 是纯虚数. 从而，(8)式中括号内的表达式表示的复数位于右半平面上. 因为

$$\left|\mathrm{i}z + (1-z^2)^{1/2}\right| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)} = 1,$$

所以它也位于单位圆上(见图3-19). 于是，对 $(1-z^2)^{1/2}$ 取对数，得到值 $\mathrm{i}\theta$，其中 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$，由于(8)式的首项因子是 $(-\mathrm{i})$，从而得

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

(与通常的情况相同). ■

对反余弦和反正切函数，应用类似于例 3 中的方法，有如下结果：

$$\cos^{-1}z = -\mathrm{i}\log[z + (z^2-1)^{1/2}], \tag{9}$$

$$\tan^{-1}z = \frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z} = \frac{\mathrm{i}}{2}\log\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z} \quad (z \neq \pm \mathrm{i}) \tag{10}$$

及公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos^{-1}z) = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}} \quad (z \neq \pm 1), \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\tan^{-1}z) = \frac{1}{1+z^2} \quad (z \neq \pm \mathrm{i}). \tag{12}$$

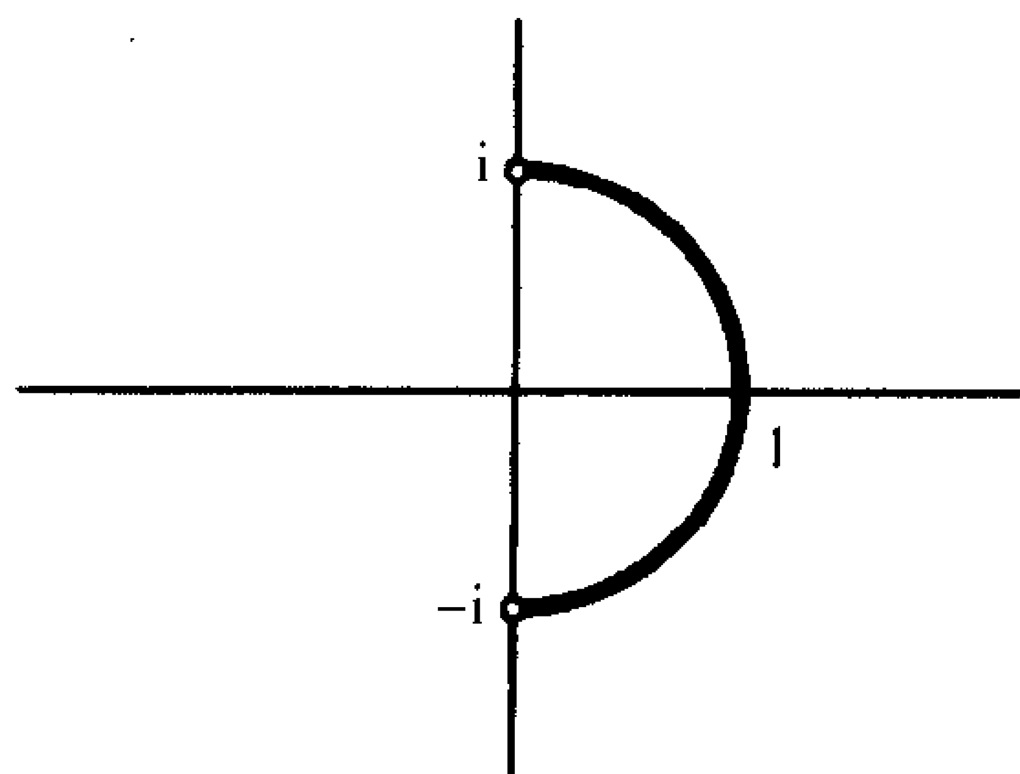


图 3-19 当 $|x|<1$ 时，点集 $\mathrm{i}x+(1-x^2)^{1/2}$ 的图形

135

注意，方程(12)中的导数与 $\tan^{-1}z$ 的分支选取无关，而方程(11)中的导数要依赖于 $\cos^{-1}z$ 的分支中的平方根的选取.

对于反双曲函数也可作类似讨论. 结果如下：

$$\sinh^{-1}z = \log[z + (z^2+1)^{1/2}], \tag{13}$$

$$\cosh^{-1}z = \log[z + (z^2-1)^{1/2}], \tag{14}$$

$$\tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \quad (z \neq \pm 1). \tag{15}$$

练习 3.5

1. 求下列各式之值.

(a) i^{i}　(b) $(-1)^{2/3}$　(c) $2^{\pi \mathrm{i}}$

(d) $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$　(e) $(1+\mathrm{i})^3$

2. 由定义 5 证明：若 $z\neq 0$，则 $z^0=1$.

3. 求下列各式的主值(即由主值分支给出的值).

(a) $4^{1/2}$　(b) $\mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$　(c) $(1+\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}$

136

4. 1 的任何次幂等于 1 吗?

5. 举例说明 $(z_1z_2)^\alpha$ 的主值不一定等于主值的乘积 $z_1^\alpha z_2^\alpha$.

6. 设 α, β 是复常数且 $z\neq 0$. 证明当下列每个幂函数由它的主值分支给出时，各恒等式成立.

(a) $z^{-\alpha} = 1/z^\alpha$　(b) $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$　(c) $\dfrac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}$

7. 求出 $z^{1+\mathrm{i}}$ 的主值分支在 $z=\mathrm{i}$ 处的导数值.

8. 证明方程 $\sin z = 2$ 的所有解是 $\pi/2 + 2k\pi \pm \mathrm{i}\,\mathrm{Log}(2+\sqrt{3})$，其中 $k=0$, ±1, ±2, …. [注：此解集也可表示为 $\pi/2+2k\pi - \mathrm{i}\,\mathrm{Log}(2\pm\sqrt{3})$, $k=0$, ±1, ±2, ….]

9. 推导关于 $\cos^{-1}z$ 的公式(9)和(11).

10. 证明方程 $\cos z = 2\mathrm{i}$ 的全部解是 $\pi/2+2k\pi-\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(\sqrt{5}+2)$, $-\pi/2+2k\pi+\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(\sqrt{5}+2)$，其中 $k=0$, ±1, ±2, …. [注：此解集也可表示为 $\pi/2+2k\pi-\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(\sqrt{5}+2)$, $-\pi/2+2k\pi-\mathrm{i}\,\mathrm{Log}(\sqrt{5}-2)$, $k=0$, ±1, ±2, ….]

11. 求方程 $\sin z = \cos z$ 的全部解.

12. 推导关于 $\tan^{-1}z$ 的公式(10)和(12).

13. 推导关于 $\sinh^{-1}z$ 和 $\cosh^{-1}z$ 的公式(13)和(14).

14. 推导公式 $d(\sinh^{-1}z)/dz = 1/(1+z^2)^{1/2}$ 并解释它在什么条件下成立.

15. 在给定的区域内，分别求出下列每个多值函数的一个解析分支：

(a) $(z^2-1)^{1/2}$，在单位圆盘：$|z|<1$. [提示：$z^2-1=(z-1)(z+1)$.]

(b) $(4+z^2)^{1/2}$，在复平面除去线段：$x=0$，$-2\leq y\leq 2$.

(c) $(z^4-1)^{1/2}$，在单位圆盘外部：$|z|>1$.

(d) $(z^3-1)^{1/3}$，在单位圆盘外部：$|z|>1$.

16. 由定义 5，多值函数 c^z 由 $c^z = e^{z\log c}$ 定义，其中 c 是一个非零常数. 证明通过选择一个 $\log c$ 的特定值，可以得到 c^z 的一个是整函数的分支. 求出这个分支的导数.

17. 推导下述恒等式

$$\sec^{-1}z = -i\log\left[\frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z^2}-1\right)^{1/2}\right].$$

应用主值确定当 $x>1$ 和 $x<-1$ 时 $\mathrm{Sec}^{-1}x$ 的值域. 将该值域与数学手册中列出的函数值作比较：对$x\geq 1$，

$$0 \leq \mathrm{Sec}^{-1}x < \pi/2;$$

对 $x\leq -1$，

137

$$-\pi \leq \mathrm{Sec}^{-1}x < -\pi/2.$$

18. 仅应用实算法，编写一个计算机程序，使得输入(x, y)是 $z=x+iy$ 的实部和虚部，输出是如下函数的实部和虚部.

(a) z^α 的主值分支.

(b) $\mathrm{Sin}^{-1}z$.

(c) $\mathrm{Sec}^{-1}z$.

(d) 在例 3.5 中讨论的$(z^2-1)^{1/2}$的分支.

19. 以复对数的形式求出函数

$$w = q(z) := 2e^z + e^{2z}$$

的反函数. 用得到的这个公式求出所有满足 $q(z)=3$ 的 z 值.

*3.6 在振荡系统中的应用

许多工程问题最终可归结为一个正弦输入系统的响应问题. 在这些实际问题中，所有的参数都是实变量，可用实变量方法进行模型分析. 然而，应用复变量方法来进行分析不仅可以大大减少计算量，而且可以更透彻地理解这些变量和参数在其中所起的作用. 本节中，我们将通过分析一个简单的 RLC 电路(电阻-电感-电容)来说明这一技巧.

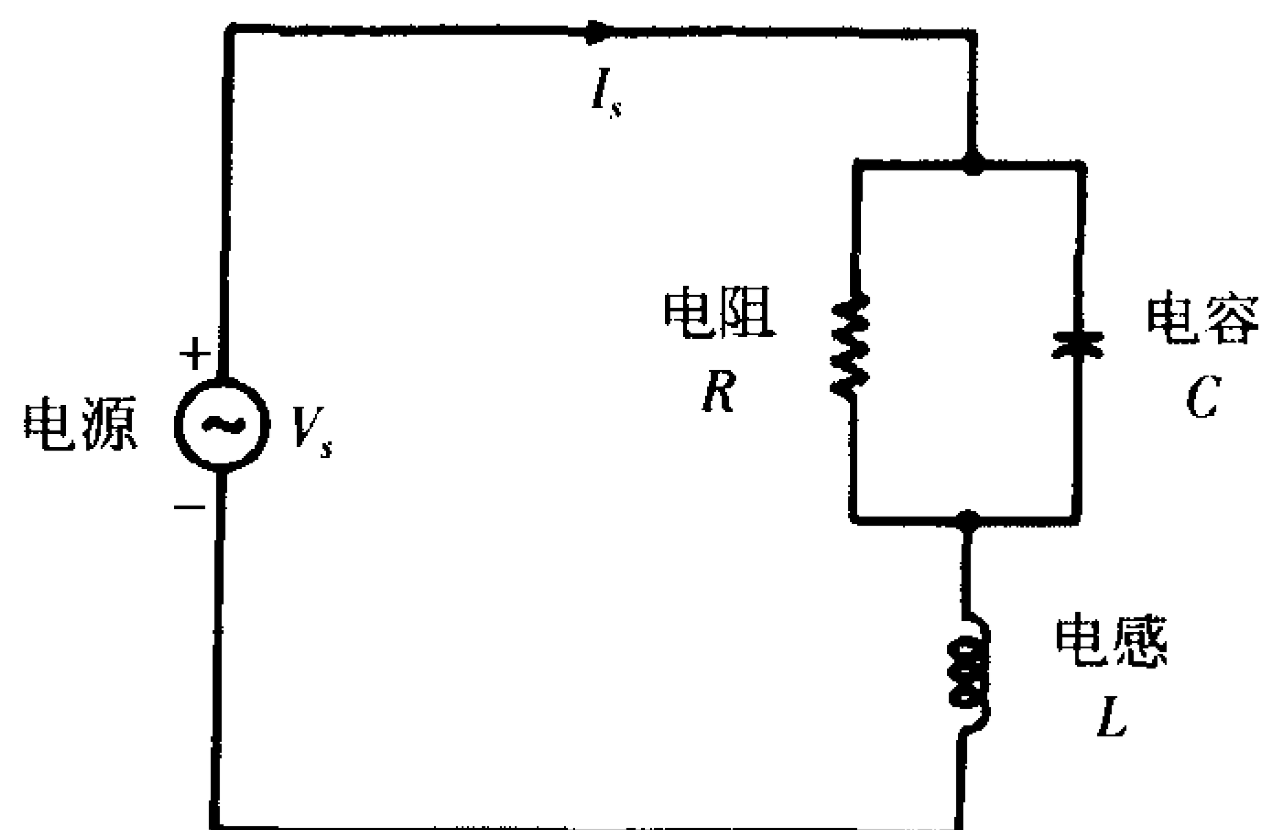


图 3-20 RLC 电路

设电路图如图 3-20 所示，假设电源给系统提供了一个正弦电压 V_s，振荡频率为每秒$\nu=\omega/(2\pi)$，为清楚起见，设在时刻 t 有

$$V_s = \cos\omega t. \tag{1}$$

138 求此时电路中的电流 I_s.

当电流通过电路中的每个元件时，都产生一个电

压降 V，它的大小与通过元件的电流 I 有关. 关于这两个量之间的关系如下：对于电阻器有欧姆[㊀]定律

$$V_r = I_r R, \tag{2}$$

其中 R 为一个常数，称为电阻.

对于电容器，有

$$C\frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t} = I_c, \tag{3}$$

其中 C 为电容.

对于电感器，有

$$V_l = L\frac{\mathrm{d}I_l}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

其中 L 为电感.

由方程(1)～(4)以及表示电荷流动时电量守恒的基尔霍夫[㊁]定律，可以得到一个确定所有电流与电压的微分方程组，但求解过程比较复杂，我们期望有一个简单的方法. 使用复指数函数可以使问题大为简化. 在给出这个问题的复变量方法之前，先看一下它所涉及的物理知识.

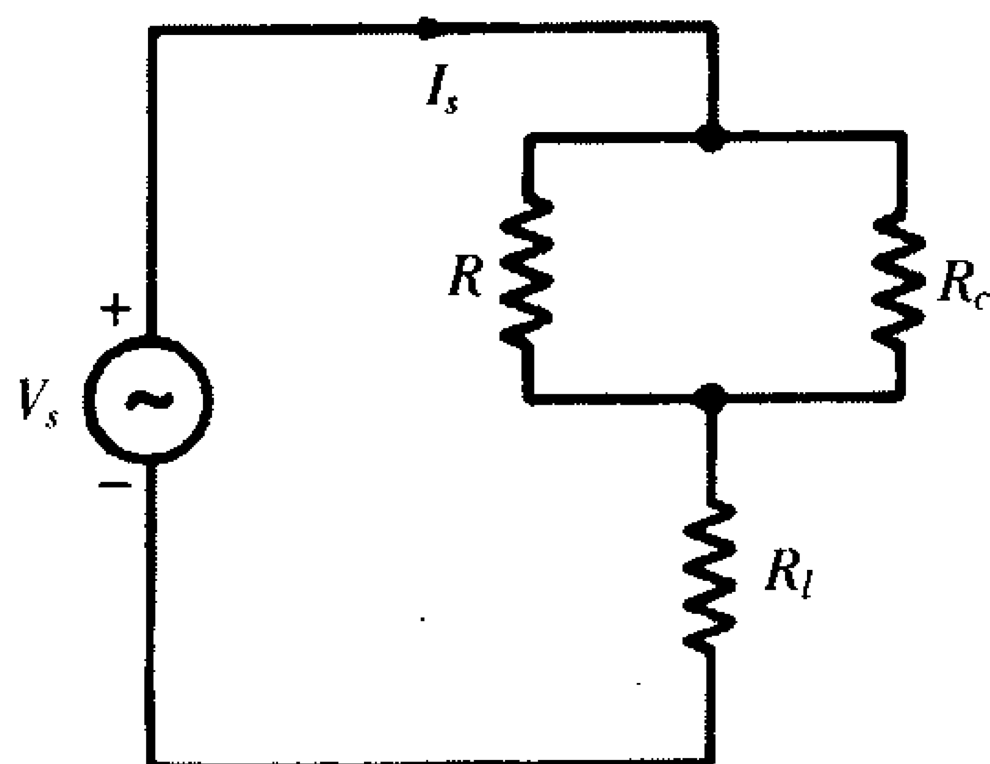


图 3-21 电阻电路

首先，由图 3-21 所示，若把电容器与电感器替换为电阻器，此问题就可以用高中物理的方法来解决，电阻 R 和 R_c 在电路中并联，其等效电阻 $R_{\parallel}$ 由以下公式求得：

$$\frac{1}{R_{\parallel}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_c},$$

或

$$R_{\parallel} = \frac{RR_c}{R + R_c}. \tag{5}$$

而这个电阻又与 R_l 串联，可用如下总电阻 R_{eff} 来表示：

$$R_{\mathrm{eff}} = R_{\parallel} + R_l, \tag{6}$$

这样，(从电源流向上看)此电路的等效电路如图 3-22 所示. 由(1)和(2)可求得输出电流 I_s：

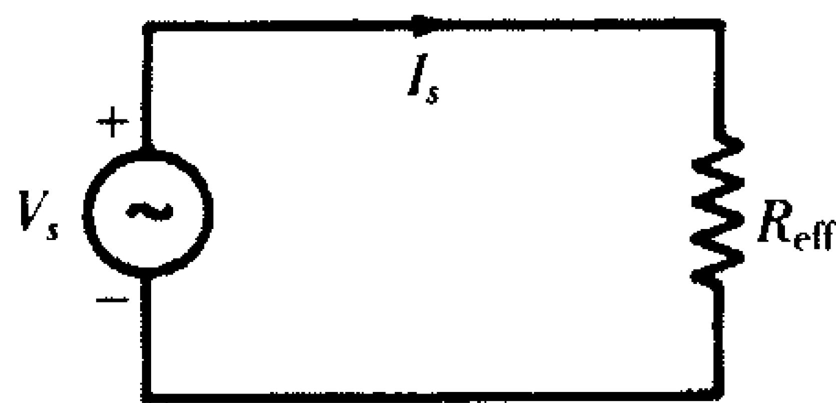


图 3-22 等效电阻器电路

$$I_s = \frac{\cos\omega t}{R_{\mathrm{eff}}} = \frac{\cos\omega t}{\dfrac{RR_c}{R + R_c} + R_l}.$$

于是，通过将电容和电感替换为等效的电阻，就可以很容易地解决这个问题.

其次，我们希望得到原电路中 I_s 的性质. 若在 $t = 0$ 时电源打开，将会有一个很复杂的初始电流响应；这就是所谓的“瞬变现象”，然后，它逐渐消失，系统中的所有电流和电压会进

㊀ 欧姆(George Simon Ohm)，一位数学教授，在 1827 年发表了这个定律.

㊁ 基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff，1824—1887).

入一个随外部电压同频率变化的稳定状态，这种“同步”状态对所有的线性阻尼系统来讲是再常见不过的了，就像我们见到人们在铁轨上骑自行车或做篮球投篮表演艺术一样普通．对许多应用系统来说，它是一种稳态响应，而且与系统的初始状态无关，这很有意义.[⊖]

下面我们将要介绍的复变量技巧可以把电容器和电感器替换为电阻，此方法也适用于求系统的稳态响应.

此技巧是通过运用欧拉恒等式 $e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$，将电源电压 $\cos\omega t$ 表示成指数形式：

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}\,e^{i\omega t}. \tag{7}$$

事实上，更加一般的正弦曲线形式 $a\cos\omega t+b\sin\omega t$ 和 $A\cos(\omega t+\gamma)$ 也可以表示成指数形式 $\mathrm{Re}\,\alpha e^{i\omega t}$：

140

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = \mathrm{Re}(ae^{i\omega t} - ibe^{i\omega t}) = \mathrm{Re}\,\alpha e^{i\omega t}, \tag{8}$$

其中 $\alpha=a-ib$；或者

$$A\cos(\omega t+\gamma) = \mathrm{Re}[\alpha e^{i\omega t}], \tag{9}$$

这里 $\alpha=Ae^{i\gamma}$. 复数因子 $\alpha=a-ib=Ae^{i\gamma}$称为相量.（一般情形参见习题 2.）

对这些函数来说，应用指数表示的优点是，除了形式上比较简洁外，求导也比较简单. 例如对 $e^{i\omega t}$微分(对 t)仅仅相当于乘以 $i\omega$. 因此，对方程(8)两端关于 t 求导，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) &= \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\,\alpha e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\frac{d}{dt}(\alpha e^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}\,i\omega\alpha e^{i\omega t} \\ &(= -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t).\end{aligned}$$

为了利用这些优点，我们必须对图 3-20 中的电路作更深入的了解. 电路中的每个元件都是线性的，因此可以应用叠加原理，也就是说，如果一个元件对于激励电压 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的响应分别为电流 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$，则对于 $V_1(t)+\beta V_2(t)$ 的响应就是电流 $I_1(t)+\beta I_2(t)$，β 为任意常数. 这是线性方程(2)～(4)的一个数学推理. 从数学上看，即使函数取复值，这一结论仍成立. 此外，已知一个电路对实电压 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的响应为实电流，由此，$I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 都是实的，所以 $I_1(t)=\mathrm{Re}[I_1(t)+iI_2(t)]$. 简言之，**如果对复电压 $V(t)$ 的数学响应是 $I(t)$，则对(实)电压 $\mathrm{Re}V(t)$ 的响应将是 $\mathrm{Re}I(t)$.**

有了上面的准备，现在考虑图 3-20 中描述的问题的解法．由等式(1)给出的电压可表示为

$$V_s(t) = \mathrm{Re}\,e^{i\omega t}. \tag{10}$$

我们的方法是先对复电压 $e^{i\omega t}$求出电流的稳态响应，然后再对所得结果取实部，就可得到所需要的解.

由前面观察到的稳态响应的性质以及方程(8)和(9)可知，电路中任何部分所出现的正弦电流或电压都可以表示为 $e^{i\omega t}$的一个(可能是复数)常数倍. 而且，这种函数的微分相当于乘以因子 $i\omega$. 因此，描述电容状态的方程(3)可以写成

$$i\omega CV_c = I_c, \tag{11}$$

⊖ 在电子工程中普遍采用这项技术应归功于 Charles Proteus Steinmetz(1865—1923).

关于电感器的方程(4)可变为

$$V_l = \mathrm{i}\omega L I_l. \tag{12}$$

不过现在反映电压-电流关系的(11)式和(12)式与关于电阻的方程(2)具有相同的形式. 换句话说，当频率为 $\nu=\omega/2\pi$ 时，从数学上看，一个电容器的作用相当于一个具有如下电阻的电阻器： 141

$$R_c = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C}, \tag{13}$$

同样，一个电感器的作用相当于具有如下电阻的电阻器：

$$R_l = \mathrm{i}\omega L. \tag{14}$$

这些纯虚数参数是基于一个人为假设的复电源电压. 工程师们把这种复电阻称为"阻抗".

对于如图 3-21 所示的电路，形式上我们已经用电阻器替换了电容器和电感器，这时图 3-21 就变成了简单电路的情况. 把(13)式和(14)式代入电路中表示并联和串联元件的有效阻抗的公式(5)和(6)，得到

$$R_{\mathrm{eff}} = \frac{\dfrac{R}{\mathrm{i}\omega C}}{R+\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega C}} + \mathrm{i}\omega L.$$

所以，电源的输出电流为

$$I_s = \mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{R_{\mathrm{eff}}},$$

整理后得

$$I_s = \frac{R\cos\omega t - [R^2\omega C(1-\omega^2 LC) - \omega L]\sin\omega t}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}. \tag{15}$$

运用复变量，可以对上述结果提供一个更有意义的解释. 若我们把 ϕ_0 和 R_0 分别定义为

$$\phi_0 := \mathrm{Arg}R_{\mathrm{eff}},\quad R_0 := |R_{\mathrm{eff}}|,$$

则 I_s 可表示为

$$I_s = \mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{R_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0}} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{R_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\phi_0)} = \frac{1}{R_0}\cos(\omega t-\phi_0). \tag{16}$$

上式给出了输出电流关于输入电压(1)的一些简单而形象的性质. 前面已经说过，电流和电压一样，它的变化是一条有相同频率的正弦曲线，但它的振幅是电压振幅的 $1/R_0$. 而且，二者也有不同的相位，二者的相位差是弧度 ϕ_0. R_0 与 ϕ_0 可按照电路的参数和频率计算出来. 这样电路问题就得到了解决.

如果电源提供的电压是一条更复杂的正弦曲线，如 $a\cos\omega t+b\sin\omega t$ 或 $A\cos(\omega t-\gamma)$，那么可以通过(8)式与(9)式将其表示为指数形式 $\mathrm{Re}\,\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. 这样，这个比较复杂的电流响应只是简单地乘以一个常数("相位")α，即 142

$$I_s = \mathrm{Re}\,\frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{R_{\mathrm{eff}}}.$$

总之，用复概念来分析线性正弦系统有两大优点. 第一，使用一般正弦曲线的表示式(8)形式简洁，而且，如(15)和(16)式表明的那样，可以根据正弦曲线的振幅和相位对电流和电压之间的关系做出进一步的解释. 其次，求导过程可变为简单的乘法运算. 不过一定要记住，只有解的实部对应于实际的物理含义，而且线性条件必不可少.

练习 3.6

1. 在图 3-20 中，若供电电压 $V_s = \sin\omega t$，则电路的稳态电流响应是什么？
2. 求一个关于复常数 α("相量")的公式，使得以 $v = \omega/(2\pi)$ 为频率的一般的正弦曲线
$$a_1\cos(\omega t+\gamma_1)+a_2\cos(\omega t+\gamma_2)+\cdots+a_m\cos(\omega t+\gamma_m)$$
$$+b_1\sin(\omega t+\delta_1)+b_2\sin(\omega t+\delta_2)+\cdots+b_n\sin(\omega t+\delta_n)$$
能被表示为 $\mathrm{Re}\,\alpha e^{i\omega t}$.
3. 验证方程(15)中的表达式.
4. 用本节中的技巧，求出图 3-23 中电路的稳态电流输出 I_s.

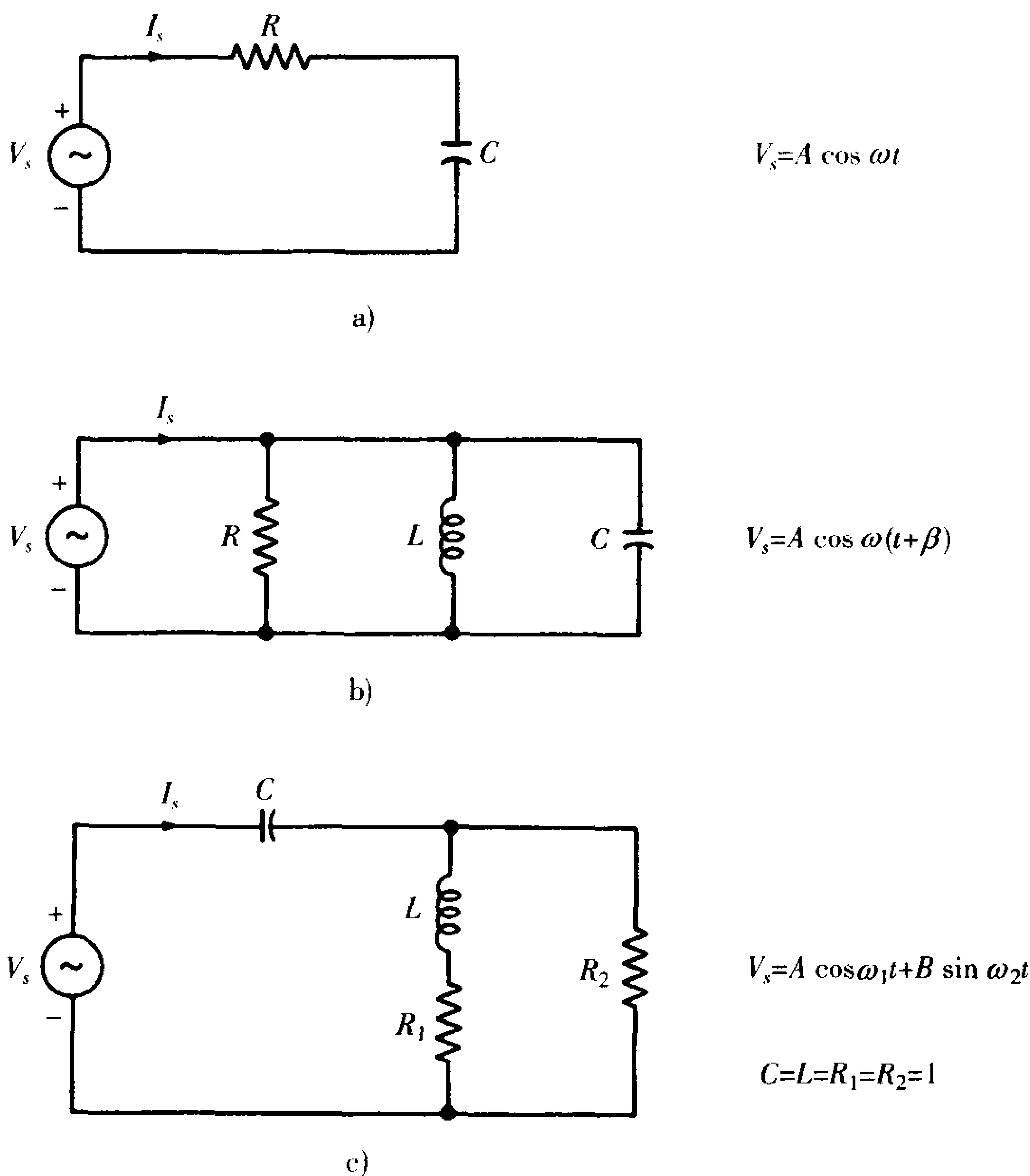


图 3-23 习题 4 的电子电路

5. 在低频极限情形下，电容器就相当于开路(无穷电阻)，而电感器就相当于短路(零电阻). 画出并分析图 3-20 中电路低频极限问题，并在这种情况下验证表达式(15).
6. 对高频极限情形下讨论习题 5. (电容器和电感器分别像什么?)

7. 同步感应发动机的运转需要在它的内部形成一个旋转的磁通量；就是说，若将发动机的横截面看作复的 z 平面，则发动机需要一个像复数 $e^{i\omega t}$ 一样旋转的磁流量向量. 现在一个卷在马口铁上电磁线圈围绕以复数 α 为指向的轴旋转，在发动机的内部产生了一个磁通量 $I(t)\alpha$，其中 $I(t)$ 是线圈里的实电流. 见图 3-24.

(a) 证明：若三个电感器分别围绕以复数 1，$e^{i2\pi/3}$，$e^{i4\pi/3}$ 为指向的轴旋转，生成"三相"电流分别为 $I_0\cos\omega t$，$I_0\cos(\omega t-2\pi/3)$ 和 $I_0\cos(\omega t-4\pi/3)$，那么它们将会产生所需的旋转磁通量(通过它们各自区域的重叠). [提示：若记住

$$\cos(\omega t-2\pi/3)=\frac{e^{i(\omega t-2\pi/3)}+e^{-i(\omega t-2\pi/3)}}{2},$$

则易得此结论.]

(b) 两个对称放置的二相电感器能够工作吗？四个呢？五个呢？能找出一般的规律吗？

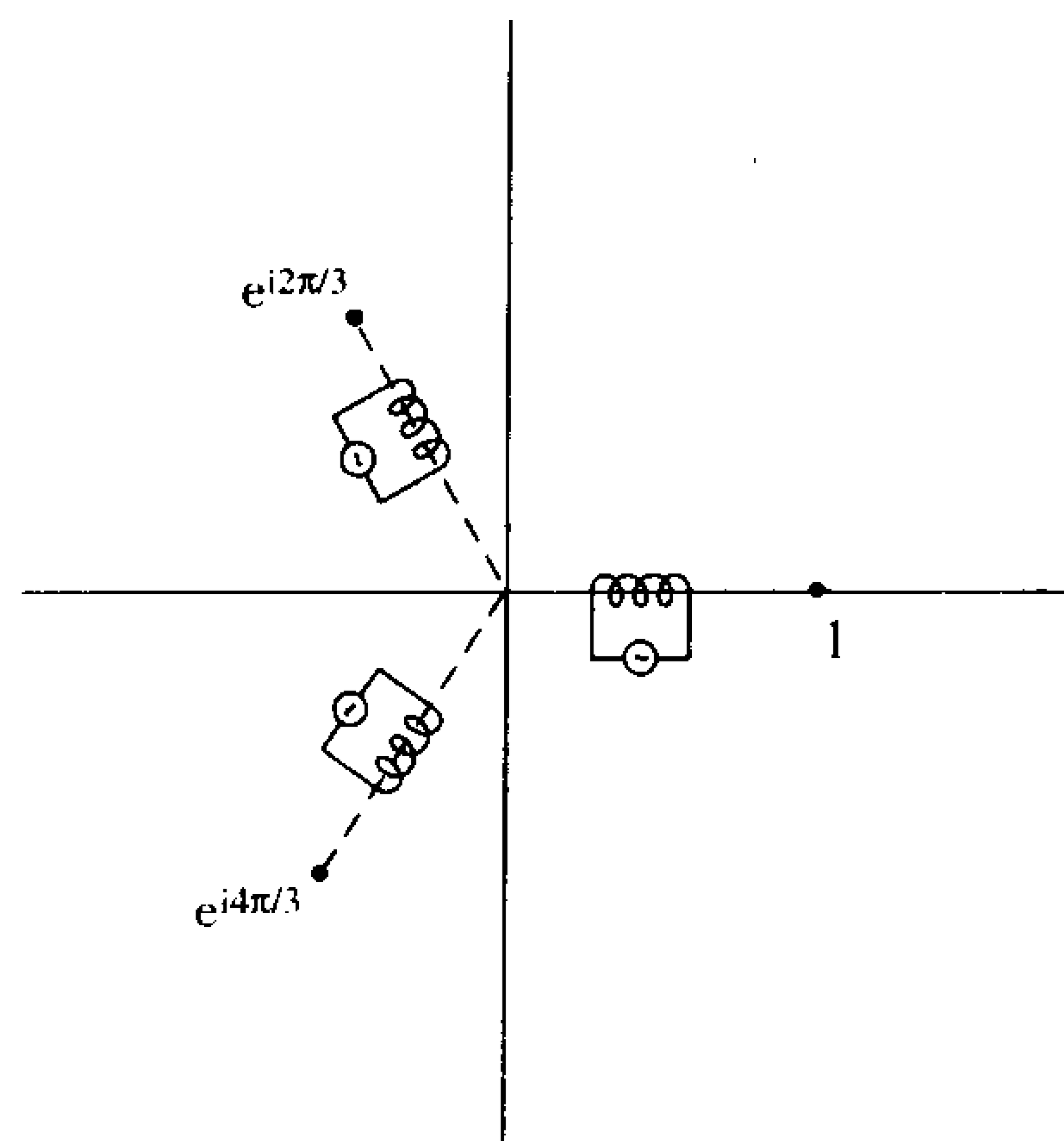


图 3-24 旋转磁通量

143 ~ 144

8. 在无线电传播过程中，发射载波采取单一的正弦曲线 $A\cos\omega t$ 的形式. 发射载波可以通过调制来传送信号 $f(t)$. 调制的两种形式是：

振幅调制：振幅 A 通过一个小的数(β)与信号的乘积来调整，从而使传播信号等于 $[A+\beta f(t)]\cos\omega t$.

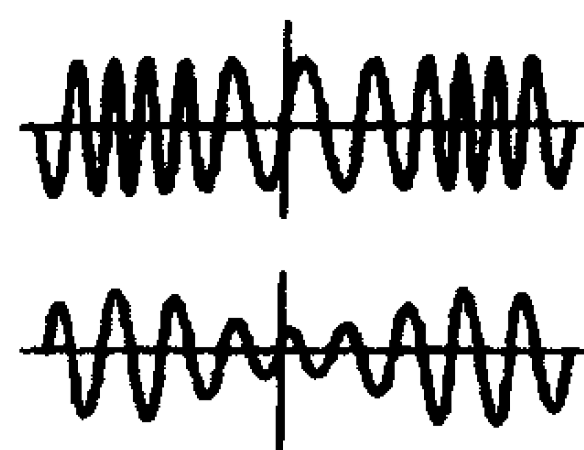
(窄带)频率调制：角频率 ω 通过一个小的数(β)与信号的乘积来调整，使传播信号等于 $A\cos\int[\omega+\beta f(t)]\,dt$.

(这里积分常数并不重要，我们把与正弦曲线 $\cos g(t)$ 有关的"瞬时角速度"看作 $g'(t)$.)

(a) 证明：若 $f(t)$ 也是正弦曲线 $\cos\omega_m t$，且 β 充分小，则 FM 信号约等于 $e^{i\omega t}[A+i(A\beta/\omega_m)\ \sin\omega_m t]$ 的实部，而 AM 信号(正好)等于 $e^{i\omega t}[A+\beta\cos\omega_m t]$ 的实部. [提示：当 $|\alpha|$ 充分小时，$\sin\alpha\approx\alpha$，$\cos\alpha\approx1$.]

(b) 对一个正弦信号来说，图 3-25 中的哪幅刻画了 AM，哪幅刻画了 FM ?

(c) 为对 AM 和 FM 有个感性认识，对 $0\leqslant t\leqslant1$，增量 $\Delta t=0.0005$，对于 $A=1$，$\omega=300$，$f(t)=\cos18t$ 及 $\beta=18$. (这里为强调调制，可选取 β 足够大.) 用软件画出传送的 AM 和 FM 信号.


图 3-25 调制设计

小结

145

关于 z 的多项式和有理函数在除去后者的极点外处处解析. 每一多项式都可完全地分解为复系数的一次多项式的乘积；通过因式分解可以计算每个零点的重数. 多项式的泰勒形式既给出了多项式在展开"中心"的所有导数值，也给出了它在该点的零点的重数(若有的话). 对于一个有理函数 P/Q，其中 P 和 Q 是没有公因式的多项式，把其分母为零的点称为它的极点. 只要 $\deg P<\deg Q$，有理函数就可以写成常数乘以形如 $1/(z-z_k)^j$ 的简单分式的和的形式，其中 $\{z_k\}$ 是有理函数的极点，整数 j 从 1 取到极点的重数.

复正弦函数和复余弦函数可由指数函数来定义：

$$\sin z=(e^{iz}-e^{-iz})/2i,\quad \cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2.$$

当 z 取实值时，这些定义与微积分中的定义相同. 另外，对于这些函数，通常的求导公式及三角恒等式仍成立. 复双曲函数也是用指数函数定义的，且与实的情形有很多类似的性质.

复对数函数 $\log z$ 是指数函数的反函数，并由 $\log z=\mathrm{Log}|z|+i\arg z$ 给出，其中大写字母表示实变量的自然对数函数. 因为对任一 $z\neq0$，$\arg z$ 有无穷多个值，所以 $\log z$ 也有无穷多个值. 因此 $\log z$ 是一个无穷多值函数.

在极坐标下，$\log z$ 的实部 $\text{Log}r$ 和虚部 θ 分别是在圆周和楔上取常值的调和函数. 它们在解决拉普拉斯方程的边值问题时很有用.

对于多值函数 f，通过它的分支讨论了它的解析性. 若单值函数 F 在某个区域内连续，且对此区域内的任意一点 z，$F(z)$ 都和 $f(z)$ 的某个值相等，则称 F 是 f 的一个分支函数.

通过限制 $\arg z$ 的取值范围使得它是单值连续的，就可得到 $\log z$ 的分支函数. 例如，函数 $\text{Log}\, z = \text{Log}\,|z| + i\text{Arg}z$ 是 $\log z$ 的主值分支，在复平面上除去负实轴上的点外的区域 D^* 内是解析的. 在这个意义上说，公式 $d(\log z)/dz = 1/z$ 对 $\log z$ 的每个分支函数都是成立的.

z 的复数次幂通过对数函数来定义. 特别地，当 $z \neq 0$ 时，$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. 除非 α 是一个整数，$w = z^\alpha$ 都是一个多值函数，它的分支可通过选择 $\log z$ 的分支得到. 反三角函数和反双曲函数都可由对数函数表示出来，它们也都是多值函数.

应用复变量可以大大简化对正弦振动系统的分析. 特别地，对含有因子 $e^{i\omega t}$ 的项作微分运算，相当于作简单的乘法运算(乘以 $i\omega$).

参考文献

三次和四次多项式的求根公式见下述参考文献：

146

[1] *Standard Mathematical Tables*. The Chemical Rubber Company, Cleveland (continuing editions).

[2] *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*. R.S. Burington. Handbook Publishers, Sandusky, Ohio (continuing editions).

下面的教材将有助于进一步研究拉普拉斯方程(3.4 节)的边值问题：

[3] Snider, A.D. *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

下述教材对进一步学习 3.6 节中用到的概念有益：

电路

[4] Scott, D.E. *An Introduction to Circuit Analysis: A Systems Approach*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[5] Hayt, W.H., Kemmerly, J.E., and Durbin, S.M. *Engineering Circuit Analysis*, 6th ed. McGraw-Hill, New York, 2001.

正弦分析

[6] Lathi, B.P. *Signal Processing and Linear Systems*, Oxford University Press, New York, 2000.

147

[7] Guillemin, E.A. *Theory of Linear Physical Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

第4章　复　积　分

第2章中我们介绍过，由于复平面的二维性，复变函数的自变量以任意方向趋向极限点，从而推广了导数的概念. 复平面的二维性对积分理论同样有影响，积分路径为平面上的一般曲线而不仅是 x 轴上的线段. 不过微积分中的一些技巧在复分析中也适用，例如利用原函数计算积分值.

在解析函数性质的研究中，复积分理论起了重要的作用. 最主要的结果是柯西定理，其大致意思是说，如果函数在一条环线及其内部解析，则它沿此闭环线的积分等于0. 由这个结果可以得到柯西积分公式，它对解析函数的重要性质有更深刻的刻画.

4.1　周线

本节我们给出 xy 平面上曲线的直观概念的数学解释. 尽管本书的大部分内容仅涉及两种简单的曲线——线段和圆弧，但是在证明定理中弄清楚一般曲线的定义是必要的.

为此，我们想象画家在图纸上画一条曲线 γ 的过程. 在任意特定时刻 t，有一个点，譬如说点 $z=x+iy$ 被画出来，在时间段 $a\leqslant t\leqslant b$ 上画出的所有点的轨迹构成了这条曲线. 显然，画家的这种行为可以看作是生成了一个以 t 为自变量的函数 z，曲线 γ 为当 t 在 a 和 b 之间变动时 $z(t)$ 的值. 这时称 $z(t)$ 为 γ 的参数函数. 图4-1列举了我们需要考虑的几种曲线的类型.

如果一条曲线没有尖角和自交点，则它的数学描述就相当简单，所以我们先来限定研究图中前两种曲线——"光滑"曲线. 其他两条称为"周线"，周线可以分成几条光滑曲线段. 因此在绘制一条光滑曲线 γ 时应遵循下列程序.

首先，在绘制过程中我们不允许笔尖离开纸面，用数学的语言表达，即要求 $z(t)$ 是连续的. 其次，我们强调曲线由平稳光滑的一笔画成，具体地说，笔尖必须以适当的(有限)速率进行移动，即笔尖移动必须是连续变化的. 笔尖画过点 $(x(t),\ y(t))$ 的速度为向量 $(dx/dt, dy/dt)=x'(t)+iy'(t)$，称此向量为 $z'(t)$. 因此我们强调 $z'(t)$ 存在[⊖]且在 $[a,\ b]$ 连续. 此外，为避免出现尖角(绘图过程中的突然中断所产生的)，还要求 $z'(t)\neq 0$.

最后，我们假设每个点只绘制一次，换句话说，$z(t)$ 必须是一一的. 但是允许起点与终点可能重合，如图4-1所示的第二条曲线.

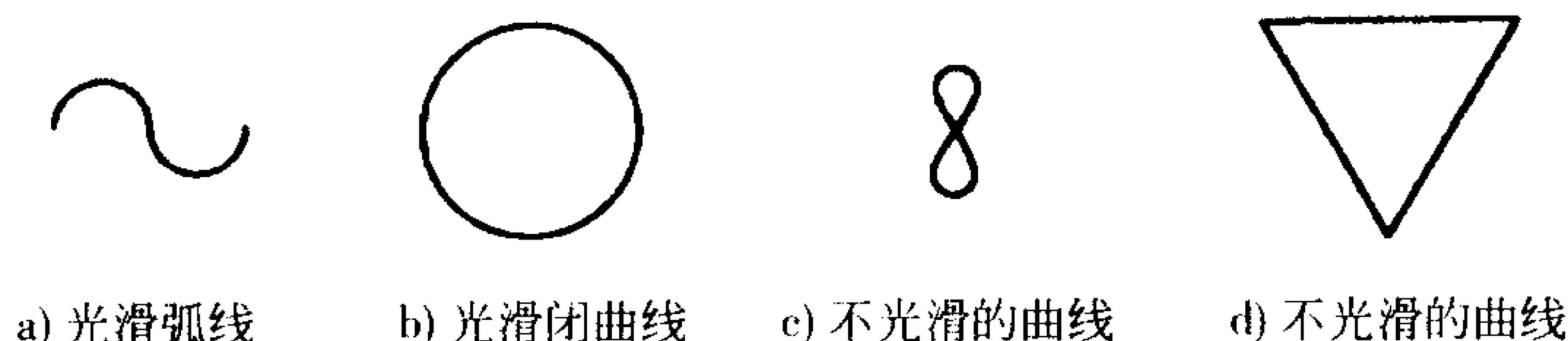


图4-1　光滑曲线和非光滑曲线的例子

⊖ 注意此时 t 是实变量，导数 $z'(t)$ 的存在性不像第2章中复变量函数导数的存在性那么复杂.

综上所述，我们可以对光滑曲线进行分类. 全部光滑曲线可以被分成两类：具有不同端点的光滑弧线和具有公共端点的光滑闭曲线.

定义 1 设复平面上的点集 γ 是某连续复值函数 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的值域，其中 $z(t)$ 满足以下条件：

(i) $z=z(t)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导函数[㊀].

[150]

(ii) $z=z'(t)$ 在 $[a, b]$ 上恒不为零.

(iii) $z(t)$ 在 $[a, b]$ 上是一对一的.

则称点集 γ 为一条光滑弧线[㊁] (smooth arc).

若 $z(t)$ 除满足上述条件(i)(ii)外还满足

(iii′) $z(t)$ 在半开半闭区间 $[a, b)$ 上是一对一的，且 $z(b)=z(a)$，$z'(b)=z'(a)$，则称点集 γ 为一条**光滑闭曲线**(smooth closed curve).

"γ 是一条光滑曲线"是指 γ 是一条光滑弧线或者是一条光滑闭曲线.

初等微积分中已经证明，若向量 $(x'(t), y'(t))$ 存在且不为零，则它在几何意义上是曲线 γ 上在点 $(x(t), y(t))$ 处的切向量. 因此定义 1 中的条件表明光滑曲线上的每一点都存在唯一一条切线并且切线的方向沿曲线连续变化，从而光滑曲线没有自交点或尖点. 参见图 4-1.

为证明复平面上的点集 γ 是光滑曲线，我们必须构造一个值域为 γ 的"可允许"参数函数 $z(t)$，其中可允许的含义是指它满足定义 1 的条件. 事实上，如果一条曲线是光滑的，它会有无限多个可允许参数函数. 例如，画家可任选曲线的两端点之一作为起点；若曲线是闭的，他可选择曲线上任意一点作为起点；他还可在某一部分画得快一些而在另一部分画得慢一些. 一条给定的光滑曲线 γ 有很多不同的可允许参数函数，但是为了说明给定的曲线是光滑的，我们仅仅需要一个可允许参数函数即可.

本书中大部分内容仅涉及线段或圆弧的参数函数. 下面给出几个基本的例子.

例 1 对于下列每一条光滑曲线写出它的一个可允许参数函数.

(a) 从 $z=1$ 到 $z=8$ 的水平线段.

(b) 从 $z=2-2i$ 到 $z=2+2i$ 的垂线段.

(c) 连接 $-2-3i$ 与 $5+6i$ 的直线段.

(d) 圆心为 $1-i$，半径为 2 的圆.

(e) 函数 $y=x^3(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图.

解 (a) 此线段的点集为 $z=x$，$1\leqslant x\leqslant 8$. 用参数 t 代替 x，即

[151]

$$z(t) = t(1 \leqslant t \leqslant 8).$$

事实上，不必坚持以字母"t"作为参数，函数

$$z(x) = x(1 \leqslant x \leqslant 8)$$

也符合题意.

(b) 此垂线段的点集为：$z=2+iy$，$-2\leqslant y\leqslant 2$. 所以可取参数函数

㊀ 在端点 $t=a$，$z'(t)$ 表示右导数，而在 $t=b$，$z'(t)$ 表示左导数.

㊁ 有时也称为正则弧线(regular arc).

$$z(y) = 2 + \mathrm{i}y(-2 \leqslant y \leqslant 2).$$

(c)对于任何两个不同的点 z_1，z_2，连接 z_1，z_2 的线段上的任一点可表示为 $z_1 + t(z_2 - z_1)$ 的形式，其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$(参见练习 1.3 的习题 18)．因此，给定线段的参数函数为

$$z(t) = -2 - 3\mathrm{i} + t(7 + 9\mathrm{i})(0 \leqslant t \leqslant 1).$$

(d)1.4 节中已经证明，以原点为圆心的单位圆上的任何点可表示为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta(0 \leqslant \theta < 2\pi)$的形式，因此对于这条光滑闭曲线建立的可允许参数函数是以 θ 为参变量的函数：$z_0(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$(注意到两端点正好重合)．为了得到圆周(d)的一个参数函数，我们只需平移上述参数函数的圆心并把它的半径加倍，即

$$z(\theta) = 1 - \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

注意，对 θ 的范围做适当限制，可得到半圆或任意圆弧的一个参数函数．

(e)求任何函数 $y = f(x)$ 的图像的参数函数也很容易，只需设 x 为参数，令 $z(x) = x + \mathrm{i}f(x)$，并注明其参数范围．若 $f(x)$ 连续可微，则 $z(x)$ 是一个可允许参数函数．对于曲线(e)，我们有

$$z(x) = x + \mathrm{i}x^3(0 \leqslant x \leqslant 1).$$

易证上述每条曲线都满足条件(i)，(ii)，(iii)(或(iii′))，因此它们都是可允许参数函数． ■

下面对曲线的绘制作进一步分析．假定画家绘制如图 4-2 所示的光滑弧线，并且遵守我们的规则(特别地，不允许有重复路径)，直觉告诉我们，画家或从 z_{I} 出发在 z_{II}停止，或从 z_{II}出发在 z_{I} 停止．这两种方式各产生了一种曲线上点的顺序(如图 4-3 所示)．

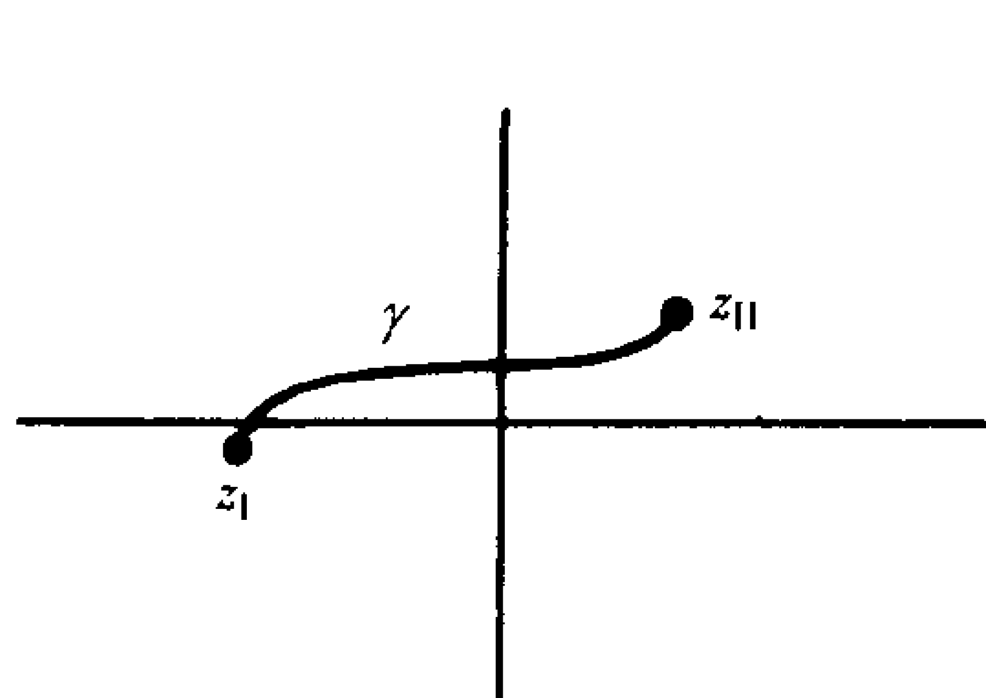
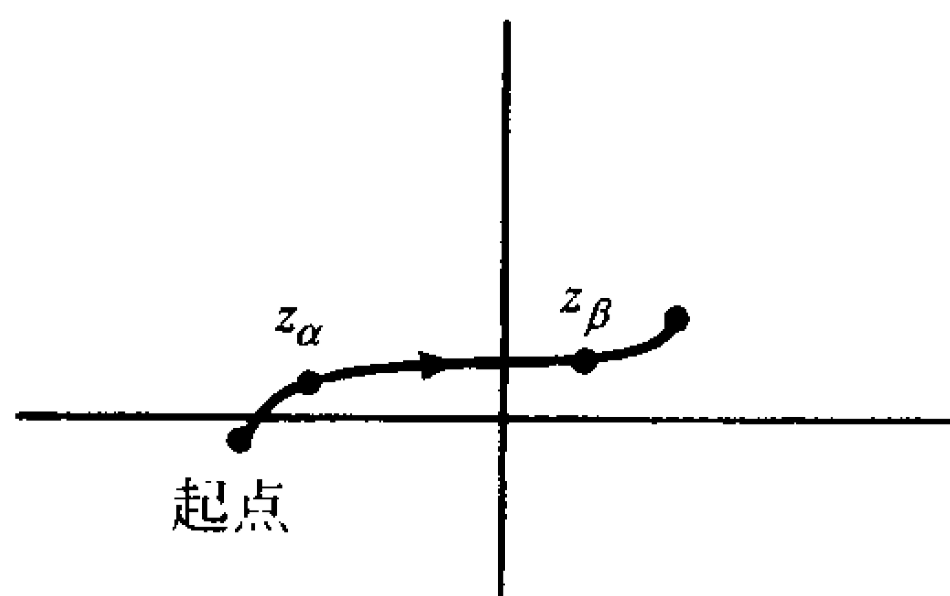
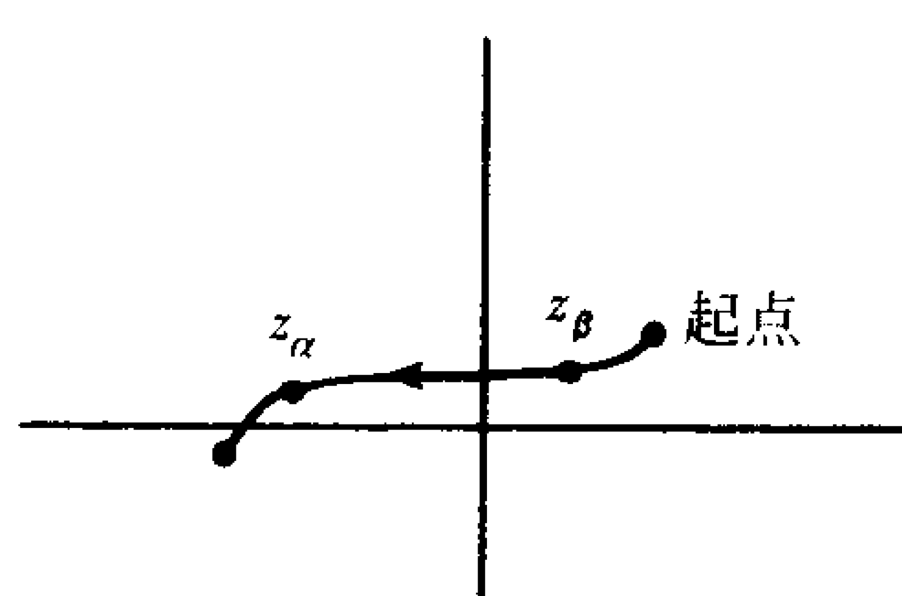


图 4-2 光滑弧线



a) z_α 在 z_β 之前



b) z_β 在 z_α 之前

图 4-3 有向光滑弧线

由此可见光滑弧线 γ 上的点确实存在两种“自然”顺序，它们由 γ 的哪一个端点作为起点来决定．我们把被确定了点的顺序的光滑弧线称为*有向光滑弧线*．点的顺序用箭头表示，如图 4-3所示．

画家在绘制 γ 时所产生的曲线上的点的顺序由刻画笔的轨迹的参数函数 $z = z(t)$ 反映出来．特别地，只要 $t_1 < t_2$，点 $z(t_1)$便在点 $z(t_2)$之前．由于仅有两种可能的(自然)顺序，所以任意可允许参数函数曲线按照它的特定顺序必为二者之一．一般地，若 $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$是符合其中一种顺序的可允许参数函数，则 $z = z(-t)$ $(-b \leqslant t \leqslant -a)$总是对应与之相反的顺序．

如果要画一条光滑闭曲线，则情况要稍微复杂一些．先选取一个起点，然后选择这条曲线的一个方向(参见图 4-4)．这些确定之后，γ 上的点的顺序就确定了．然而，存在一个特例，由于起点也是终点，所以它既在其他任意点之前又在它们之后．不考虑这个特殊点，当(i)起

始点已确定及(ii)从这点开始的“方向”已选定，则称这条光滑闭曲线的点被确定了顺序. 一条被确定了点的顺序的光滑闭曲线称为有向光滑闭曲线.

与光滑弧线情况一样，笔的轨迹的参数化反映了在画一条光滑闭曲线时产生的曲线上的点的顺序. 如果它的参数函数由 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 给出，那么(i)起点一定为 $z(a)$ 且(ii)只要 $a<t_1<t_2<b$，点 $z(t_1)$ 便在点 $z(t_2)$ 之前. 任何其他有同样起点的可允许参数函数必然对应这个顺序或与之相反.

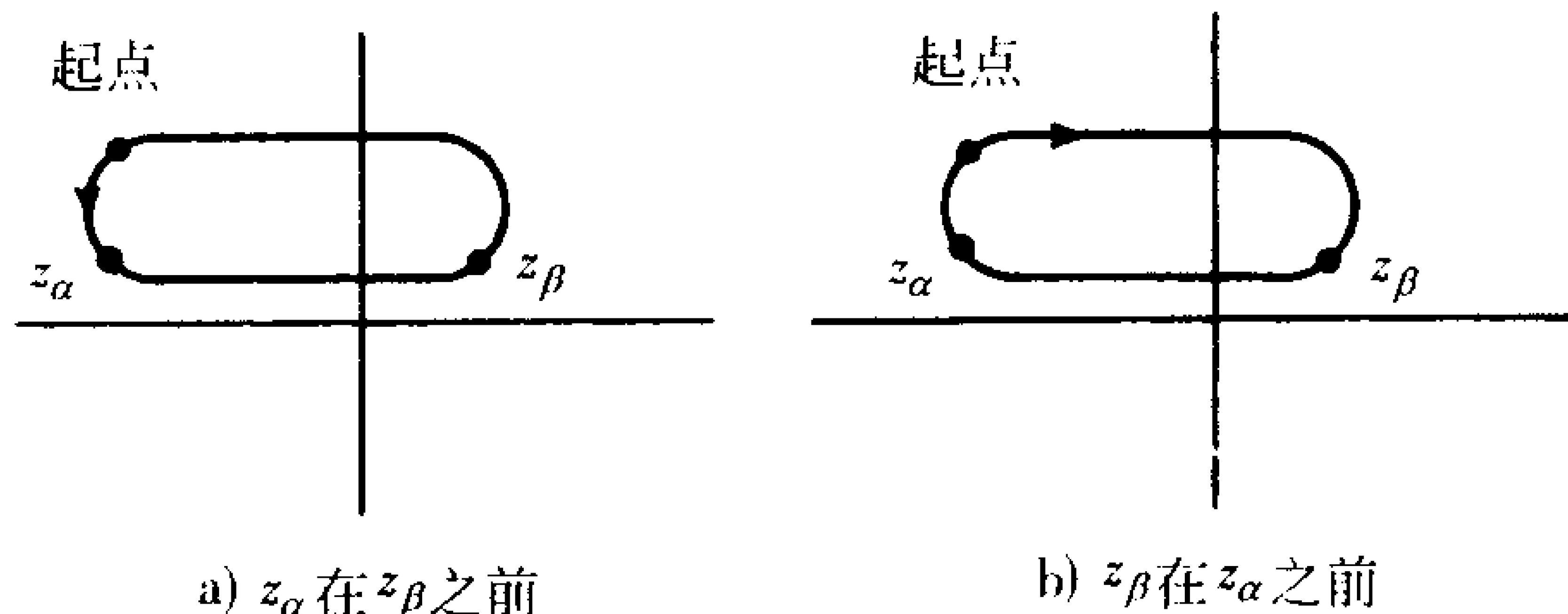


图 4-4 有向光滑闭曲线

152~153

有向光滑曲线指有向光滑弧线或者有向光滑闭曲线.

下面我们准备介绍一些应用在积分理论中更加一般的曲线，它们是由有向光滑曲线首尾相连而得到的，这时允许有自交点、尖点和隅角. 另外，把单个孤立的点也列入这类曲线. 我们来看一下下面给出的定义是否包含了所有的情况.

定义 2 设$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$是有限条有向光滑曲线，对于每个 $k=1, 2, \cdots, n-1$，γ_k 的终点与 γ_{k+1} 的起点重合，这样形成的曲线 Γ 称为**周线**(contour)，记作 $\Gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$. 特别地，我们也称单个点 z_0 为**周线**.

注意，单独的一条有向光滑曲线也是周线，这时 $n=1$.

粗略地说，周线 Γ 承袭了它的组成曲线 γ_k 的一个方向：如果 z_1 和 z_2 在同一条有向光滑曲线 γ_k 上，则它们的顺序由 γ_k 的方向确定；如果 z_1 在 γ_i 上，而 z_2 在 γ_j 上，且 $i<j$，我们说 z_1 在 z_2 之前. 这种说法是不严密的，因为若 z_1 是自交点，则它位于两条不同的光滑曲线上. 从而当我们说 z_1 在 z_2 前面时，必须指出 z_1 在哪条光滑曲线上才是有意义的.

图 4-5 是四条由有向光滑曲线相连而成的周线. 在图 4-5d 中，若将 z_α 看作 γ_1 上的一个点，则它在 z_β 之前；但若将其看作 γ_3 上的一个点，则它在 z_β 之后.

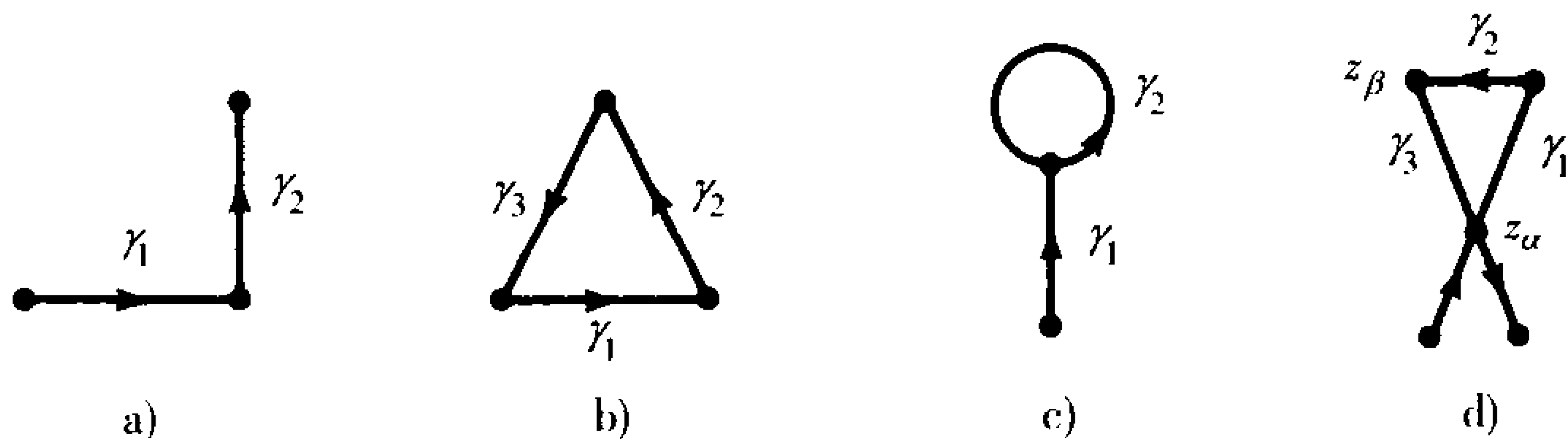


图 4-5 周线的例子

图 4-6、图 4-7 和图 4-8 描述了三种有趣的周线，当我们在第 6 章研究周线积分的例子时将会用到. 注意在图 4-7 中的周线中的所有线段都被折回一次.

周线的参数化是组成它的光滑曲线元素的可允许参数函数的一种简单“拼凑”，我们不必把它明确写出来，因为在实际应用中往往把一条周线分成有限条光滑曲线来研究. 然而周线参数化在理论上非常容易表达，因此只要我们一次把它弄明白，所有的便都清楚了. 我们说

154

$z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$是周线$\Gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$的参数函数，如果存在$[a,\ b]$上的一个细分，把它分成$n$个子区间$[\tau_0,\ \tau_1]$，$[\tau_1,\ \tau_2]$，…，$[\tau_{n-1},\ \tau_n]$，其中

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_{n-1}<\tau_n=b,$$

使得在每个子区间$[\tau_{k-1},\ \tau_k]$上函数$z(t)$是光滑曲线γ_k的可允许参数函数. 由于相邻两条光滑曲线的端点是相连的，从而$z(t)$必定在$[a,\ b]$上连续，但是τ_k可能是$z'(t)$的跳跃间断点.

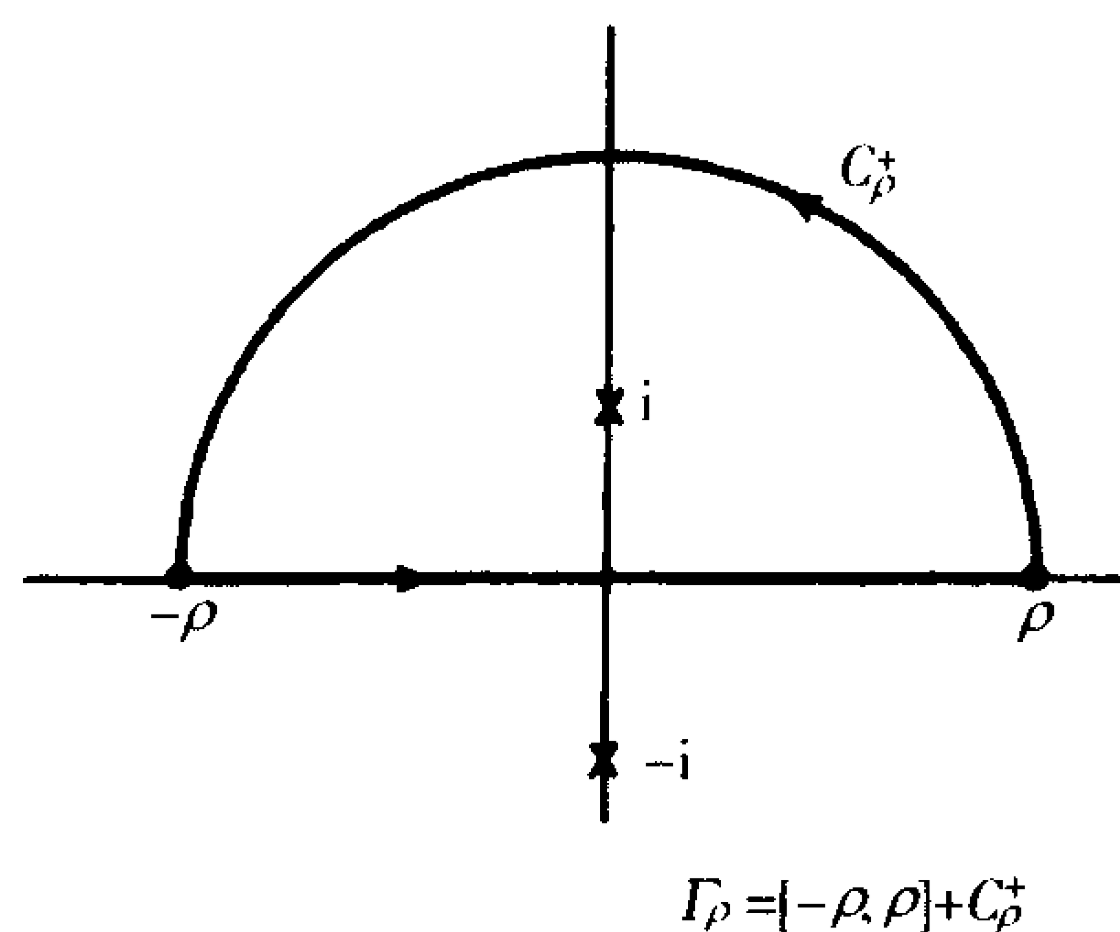


图 4-6 半圆形周线

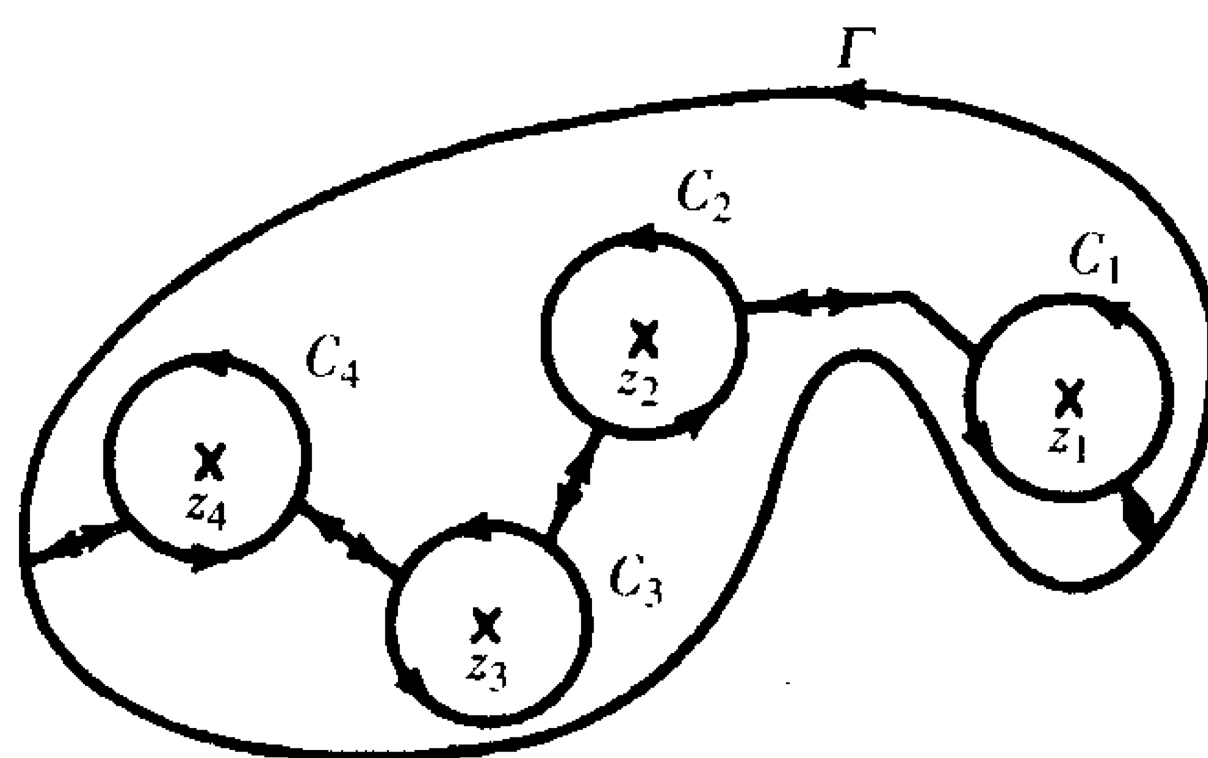


图 4-7 带侵入的周线

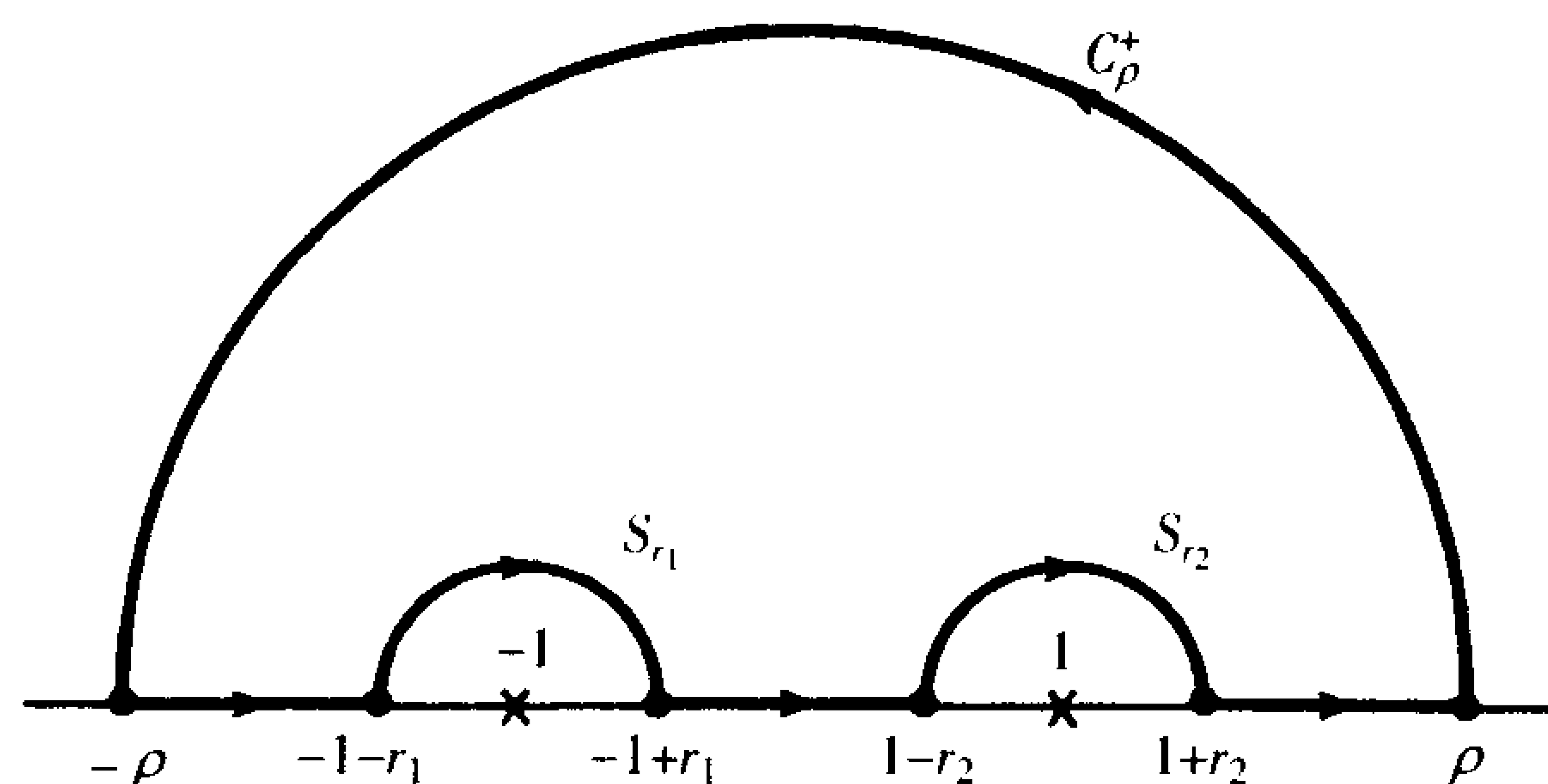


图 4-8 带缺口的周线

单个点的周线的参数函数只是一个常函数.

已知周线Γ各元素γ_k的可允许参数函数，则通过简单的调整或改变参数t的取值范围就可得到周线Γ的参数函数. 我们通过下例详细说明其中的技巧. (其一般情形参见习题 6.)

例 2 将图 4-9 中的周线参数化，参数t的取值范围为$[0,\ 1]$.

解 我们已经知道了如何将线段参数化，下面是γ_1，γ_2，γ_3的可允许参数函数，且分别和它们的方向一致：

$$\gamma_1:z_1(t)=t \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$

$$\gamma_2:z_2(t)=1+t(\mathrm{i}-1) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1),$$

$$\gamma_3:z_3(t)=\mathrm{i}-t\mathrm{i} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

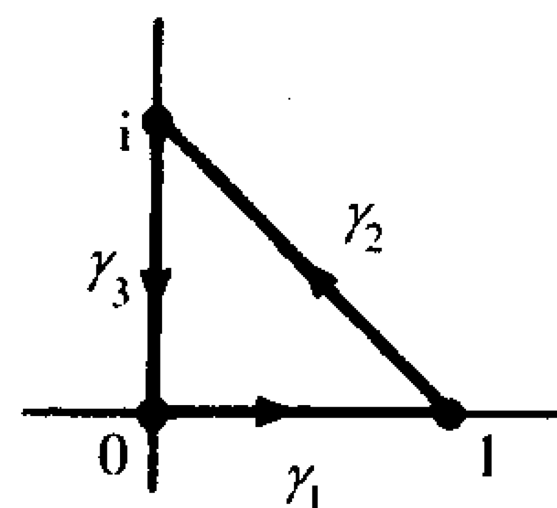


图 4-9 例 2 的周线

它们与如图所示的线段方向相符.

155 ~ 156

现在做一些调整，使 γ_1 的参数 t 在 0 与 1/3 之间变动，γ_2 的参数的变化范围为 $1/3\leqslant t\leqslant 2/3$，$\gamma_3$ 的参数的变化范围为 $2/3\leqslant t\leqslant 1$. 以上仅是对变量 t 的变化范围做了简单的调整.

对于 γ_1，观察到函数 $z_1(t)=t(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的值域与函数 $z_I(t)=3t(0\leqslant t\leqslant 1/3)$ 的值域相同，$z_I(t)$ 也是一个可允许参数函数且没改变 γ_1 上点的顺序. 曲线 γ_2 的值域为 $z_2(t)=1+t(\mathrm{i}-1)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，它与 $z_{II}(t)=1+3(t-1/3)(\mathrm{i}-1)(1/3\leqslant t\leqslant 2/3)$ 的值域相同，$z_{II}(t)$ 同样是可允许参数函数且其上点的顺序没变. 用类似方法处理 $z_3(t)$，从而得到

$$z(t)=\begin{cases}3t & \left(0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3}\right),\\ 1+3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)(\mathrm{i}-1) & \left(\dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{2}{3}\right),\\ i-3\left(t-\dfrac{2}{3}\right)\mathrm{i} & \left(\dfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1\right).\end{cases}$$ ■

周线的原始点集(无向)称为**分段光滑曲线**. 在不引起混淆的情况下，按照上下文的说明，我们将使用符号 Γ 表示周线及它的原始曲线.

许多有向光滑曲线的术语也适用于周线. 例如，Γ 的起点是 γ_1 的起点，它的终点是 γ_n 的终点. 因此 Γ 可以看作是连接这些点的一条路径. 若改变 Γ 中所有光滑弧段的方向，并且这些弧段以反方向为序，则得到的周线称为 Γ 的**反向周线**，记为 $-\Gamma$(参见图 4-10). 注意到若 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是 Γ 的参数函数，则 $z=z(-t)(-b\leqslant t\leqslant -a)$ 是 $-\Gamma$ 的参数函数.

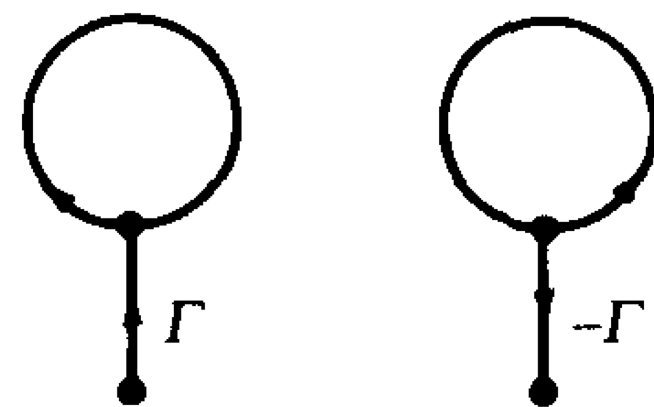


图 4-10 互为反向的两条周线

157

如果 Γ 的起点与终点重合，则称其为**闭周线或环线**. **简单闭周线**是指除去起点和终点外无其他重点的闭周线，换句话说，闭周线的参数函数 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 在半开区间 $[a,b)$ 上是一对一的.

如果曲线是一条简单闭曲线，还有一种确定它的方向的方法. 先引入拓扑学中古老的**若尔当曲线定理**[1]，它指出了这样的一条曲线可把平面分成曲线内部和外部这一直观的结论(参见图 4-11).

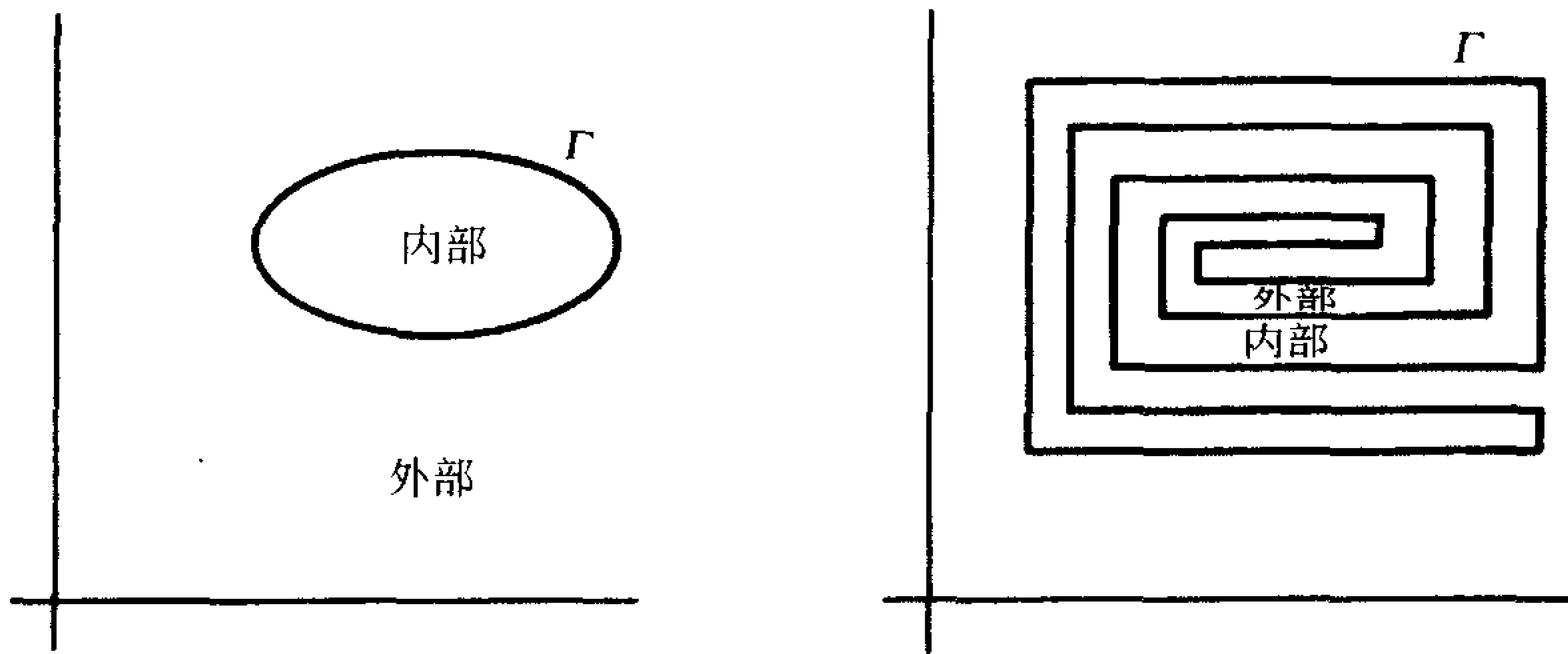


图 4-11 若尔当曲线定理

[1] 若尔当(Camille Jordan，1838—1922).

定理 1 任意简单闭周线把平面分成两个区域，每个区域都以此曲线为边界. 其中一个有界的区域称为曲线的内部；另一个无界区域称为曲线的外部.

若尔当定理对更加一般的曲线也能成立，但是它的证明即使对于周线也相当复杂.

现在给出一条简单闭周线 Γ. 我们设想一个孩子沿着它骑自行车，方向与周线指定的方向相同. 如果车子的轮子充分小，则一定有一个车轮总是在周线的内部区域，而另一个总在周线的外部区域.（否则我们可用一条不穿越周线的路径连接它的内部与外部，这与若尔当曲线定理相矛盾.）通过规定周线的起点和终点以及哪个区域（内部还是外部）落在沿曲线的观察者的左侧可以完全确定周线的方向. 当内部区域在观察者的左手边时，称 Γ 是正方向的，否则称 Γ 是负方向的. 正方向产生了逆时针运动的概念. 参见图 4-12.



图 4-12 若尔当（四岁）

本节最后我们讨论周线的长度. 首先考虑一条光滑曲线 γ，设它的任一可允许参数函数为 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，令 $s(t)$ 为 γ 上点 $z(a)$ 到 $z(t)$ 的长度. 由初等微积分知，

158

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2},$$

即 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|$. 因此，这条光滑曲线的长度可由下面重要的积分公式给出：

$$\boxed{\ell(\gamma)=\gamma\text{ 的长度 }=\int_a^b\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t.}\qquad(1)$$

在参考文献中这个公式有严格的证明. 有时把 $\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$ 简记为 $\int_\gamma|\mathrm{d}z|$. 这强调了一个明显的事实：$\ell(\gamma)$ 是一个只依赖于点集 γ 的几何量，它与计算中所选取的可允许参数函数无关.

周线的长度定义为它的所有组成曲线的长度之和. 例如，图 4-9 中周线的长度等于 $\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)+\ell(\gamma_3)=1+\sqrt{2}+1=2+\sqrt{2}$. 对于逆时针绕圆 $C:|z-\mathrm{i}|=3$ 旋转两周的周线 Γ，我们有 $\ell(\Gamma)=6\pi+6\pi=12\pi$.

练习 4.1

1. 写出下列每条光滑曲线的一个可允许参数函数，使之与给定的方向相符.
   (a) 从 $z=1+\mathrm{i}$ 到 $z=-2-3\mathrm{i}$ 的线段.
   (b) 圆周 $|z-2\mathrm{i}|=4$ 按顺时针方向旋转一周，起点为 $z=4+2\mathrm{i}$.
   (c) 圆周 $|z|=R$ 在第二象限的圆弧部分，起点为 $R\mathrm{i}$，终点为 $-R$.
   (d) 抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 到点 $(3,9)$ 间的部分.

159

2. 证明 $z'(t)$ 不为零是确保光滑曲线没有尖点的必要条件. [提示：考虑曲线 $z(t)=t^2+\mathrm{i}t^3$，$-1\leqslant t\leqslant 1$.]
3. 写出椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的一个可允许参数函数并证明它是一条光滑曲线.
4. 证明：函数 $z(t)=t^3+\mathrm{i}t^6$（$-1\leqslant t\leqslant 1$）的值域是一条光滑曲线，即使给出的这个函数不是可允许参数函数.

5. 指出图 4-13 中简单闭曲线 Γ 的内部区域. Γ 的方向是正方向吗?

6. 设 γ 是一条有向光滑曲线. 证明：若 $z=z(t)(a\leq t\leq b)$ 是 γ 的一个与其方向相符的可允许参数函数，则 $z_1(t)=z\left(\frac{b-a}{d-c}t+\frac{ad-bc}{d-c}\right)(c\leq t\leq d)$ 同样也是.

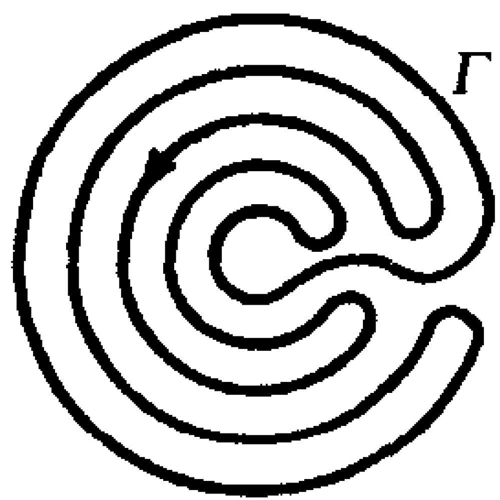


图 4-13 习题 5 的周线

7. 写出绕顶点为 $-1-\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$ 的正方形一周的周线的参数函数，这里以 $-1-\mathrm{i}$ 为起点，按逆时针方向. 这条周线的长度是多少?

8. 写出图 4-14 的周线 Γ 的参数函数. 对于它的反向周线 $-\Gamma$ 也给出它的一个参数函数.

160

9. 对图 4-15 中的杠铃形周线进行参数化，周线的起点和终点分别为 -1 和 1.

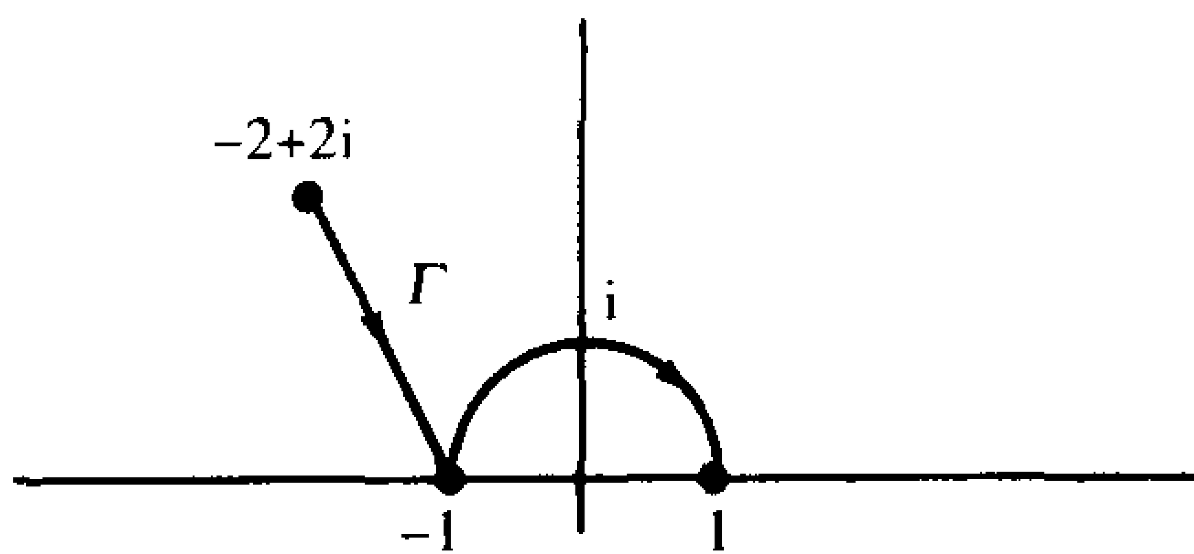


图 4-14 习题 8 的周线

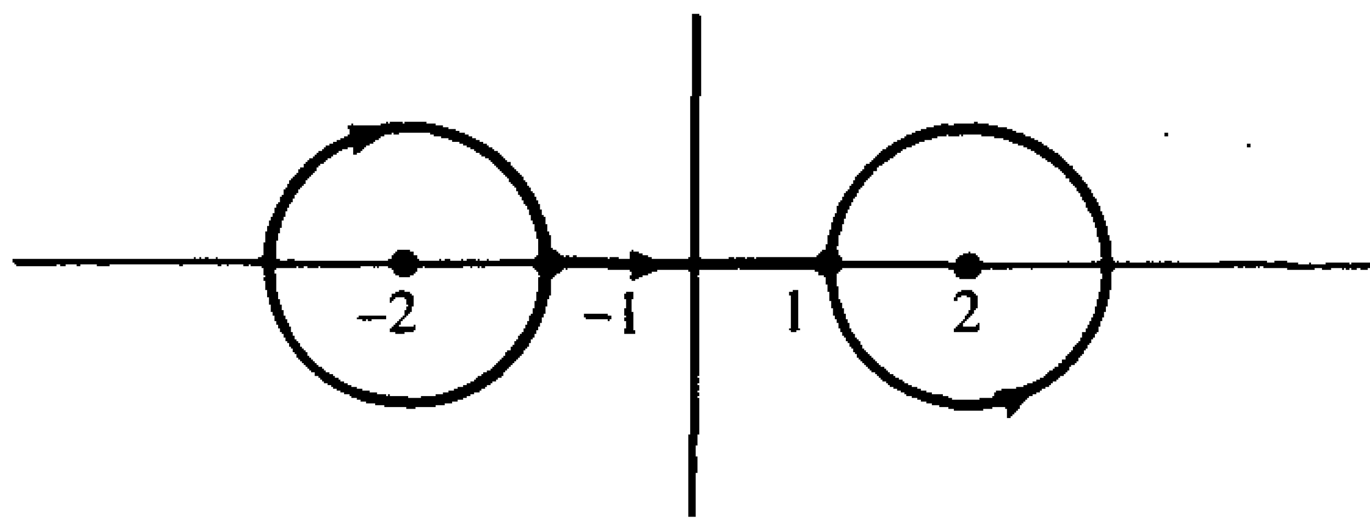


图 4-15 习题 9 的周线

10. 由可允许参数函数及公式(1)证明:

(a)从 z_1 到 z_2 的线段长度是 $|z_2-z_1|$.

(b)圆周 $|z-z_0|=r$ 的长度是 $2\pi r$.

11. 计算由参数函数 $z=z(t)=5\mathrm{e}^{3it}(0\leq t\leq\pi)$ 所确定的曲线的长度.

12. 当 γ 是由参数函数 $z=z(t)(a\leq t\leq b)$ 所确定的周线，公式(1)是否成立?

13. 把 t 看作时间，可允许参数函数 $z=z(t)(a\leq t\leq b)$ 看作移动质点的位置函数，给出下列各个量所表示的物理含义.

(a) $z'(t)$　　(b) $|z'(t)|$

(c) $|z'(t)\mathrm{d}t|$　　(d) $\int_a^b|z'(t)|\mathrm{d}t$

14. 设 $z=z_1(t)$ 是光滑曲线 γ 的可允许参数函数. 如果 $\phi(s)(c\leq s\leq d)$ 是一个严格递增函数且满足：(i) $\phi'(s)$ 在 $[c,d]$ 上正值连续，(ii) $\phi(c)=a$, $\phi(d)=b$, 则函数 $z_2(s)=z_1(\phi(s))(c\leq s\leq d)$ 也是 γ 的一个可允许参数函数. 验证

$$\int_a^b|z_1'(t)|\mathrm{d}t=\int_c^d|z_2'(s)|\mathrm{d}s,$$

它表明了公式(1)式的一种不变性.

4.2 周线积分

在微积分中，实值函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的定积分被定义为和式 $\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$（称为黎曼和）的极限. 若已知原函数，则微积分基本定理提供了更直接的计算积分的方法. 本节的目的是应用黎曼和的概念定义复平面上复值函数 f 沿周线 Γ 的定积分. 为此，首先定义函数沿一条单向光滑曲线的积分，其次通过函数沿组成周线的光滑弧段的积分来定义其沿周线的积分. 最后，我们将通过用原函数得到计算积分的一些简单法则.

161

考虑定义在有向光滑曲线 γ 上的函数 f, 其中 γ 的起点为 α, 终点为 β(可能与 α 重合). 像上一

节一样，γ 上点的顺序与它的方向一致.

对任意正整数 n，我们定义 γ 的一个划分 $\mathcal{P}_n$：在 γ 上取有限个点 z_0，z_1，…，z_n，其中 $z_0=\alpha$，$z_n=\beta$，z_{k-1} 在 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 之前(见图 4-16). 如果计算 γ 上任意连续点对 (z_{k-1},z_k) 间的弧长，则这些弧长的最大值就为细分的“细度”提供了一个标准. 这个最大长度称为划分的网，用记号 $\mu(\mathcal{P}_n)$ 表示. 由此可知，若给定的划分 $\mathcal{P}_n$ 的网很“小”，则 n 必定很大，划分中相邻的点也必定很靠近.

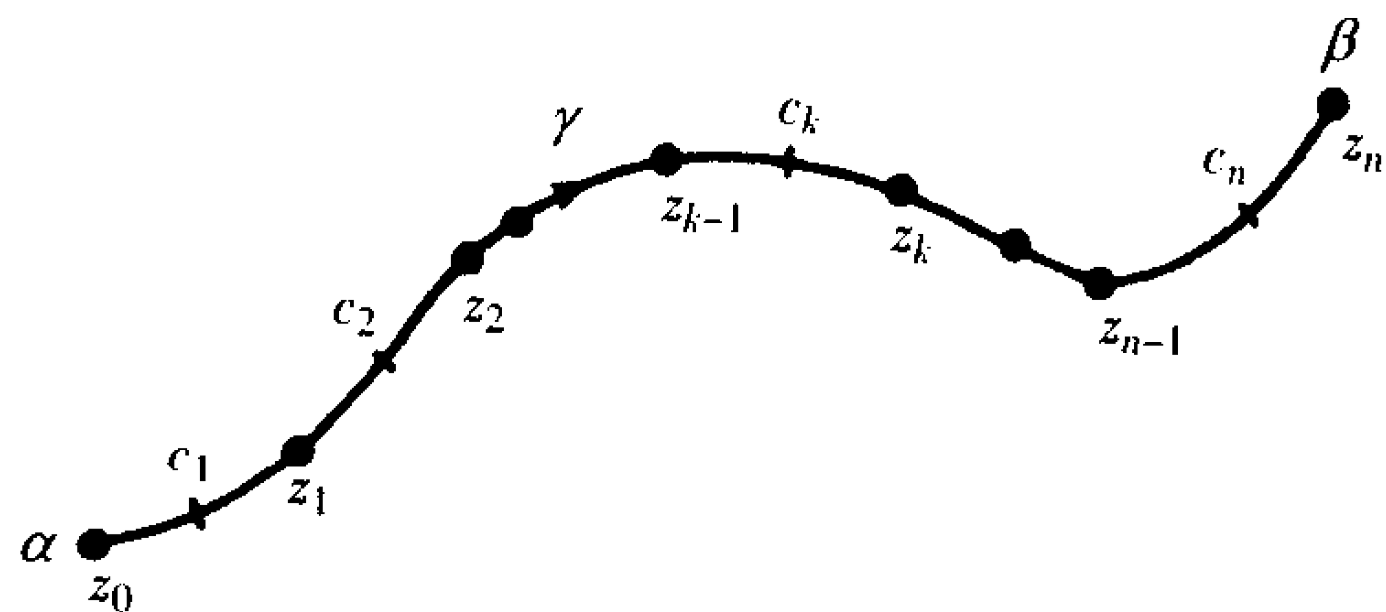


图 4-16 曲线的划分

任取 γ 上的点 c_1，c_2，…，c_n，使 c_1 在 z_0 与 z_1 间的弧段上，c_2 在 z_1 与 z_2 间的弧段上，依次类推. 在此情况下，定义和 $S(\mathcal{P}_n)$：

$$S(\mathcal{P}_n):=f(c_1)(z_1-z_0)+f(c_2)(z_2-z_1)+\cdots+f(c_n)(z_n-z_{n-1}),$$

称之为函数 f 关于划分 $\mathcal{P}_n$ 的黎曼和. 记 $z_k-z_{k-1}=\Delta z_k$，上式化为

$$S(\mathcal{P}_n)=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta z_k.$$

现在我们可以推广微积分中定积分的定义.

定义 3 设 f 是定义在有向光滑曲线 γ 上的复值函数，如果存在一个复数 L，它是曲线 γ 的任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\mathcal{P}_n)=0$ 的划分序列所对应的黎曼和序列 $S(\mathcal{P}_1)$，$S(\mathcal{P}_2)$，…，$S(\mathcal{P}_n)$，…的极限，则称 f **沿 γ 是可积的**(integrable along γ)，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S(\mathcal{P}_n)=L$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\mathcal{P}_n)=0$.

162

常数 L 称为 f 沿 γ 的积分，记为

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta z_k=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{或} \quad L=\int_\gamma f.$$

因为定义 3 与微积分中积分的定义类似，所以复积分也有一些与其类似的性质. 例如，如果 f 和 g 都沿 γ 可积，则

$$\int_\gamma[f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\pm\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\int_\gamma cf(z)\,\mathrm{d}z=c\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \quad (\text{其中 } c \text{ 为任何复常数}) \tag{2}$$

以及

$$\int_{-\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{3}$$

其中 $-\gamma$ 表示与 γ 方向相反的曲线.

据我们所知，微积分中并非所有的函数 f 都可积. 但是如果 f 是连续的，那么它的积分肯定存在.

定理 2 若函数 f 沿有向光滑曲线 γ 连续[⊖]，则 f 沿 γ 可积.

定理 2 的证明见本章末的参考文献[2].

定理 2 虽然有重要的理论意义，但对如何计算积分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ 并没有提供任何信息. 不过我们对定积分的计算已经非常熟练，如果能够将复积分表示为实积分，那么对于它的计算无疑是有益的.

163 首先考虑当 γ 是方向从左到右的实线段 $[a,b]$ 的特殊情况. 注意到如果 f 为定义在 $[a,b]$ 上的实值函数时，定义 3 正是实积分 $\int_a^b f(t)\,dt$ 的定义. 因此，即使当 f 是复值函数时，我们仍用记号 $\int_a^b f(t)\,dt$ 表示 f 沿有向实线段 $[a,b]$ 上的积分. 在这种情况下，当 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的复值连续函数时，可以记 $f(t) = u(t) + iv(t)$，其中 u,v 是 $[a,b]$ 上的实值连续函数. 由性质(1)和(2)我们有

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b [u(t) + iv(t)]\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt; \tag{4}$$

即复积分可由两个实积分来表示.

如果 $f(t)$ 有原函数 $F(t) = U(t) + iV(t)$，则 $U' = u$，$V' = v$. 由(4)式立刻得到下面推广的微积分基本定理：

定理 3 如果复值函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，且对 $[a, b]$ 上的所有 t，$F'(t) = f(t)$，则

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

下面举个例子说明定理 3.

例 1 计算 $\int_0^\pi e^{it}\,dt$.

解 由于 $F(t) = e^{it}/i$ 是 $f(t) = e^{it}$ 的一个原函数，由定理 3 得

$$\int_0^\pi e^{it}\,dt = \left.\frac{e^{it}}{i}\right|_0^\pi = \frac{e^{i\pi}}{i} - \frac{e^{i0}}{i} = \frac{-2}{i} = 2i. \qquad \blacksquare$$

现在我们考虑一般情况，即 γ 是任意有向光滑曲线，函数 f 沿着 γ 连续. 由 γ 的可允许参数函数 $z = z(t)\ (a \leqslant t \leqslant b)$（与 γ 的方向一致）可以得到计算积分 $\int_\gamma f(z)\,dz$ 的公式. 事实上，如果 $\mathcal{P}_n = \{z_0, z_1, \cdots, z_n\}$ 是 γ 的一个细分，则可记

164
$$z_0 = z(t_0), \quad z_1 = z(t_1), \cdots, z_n = z(t_n),$$

其中

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

此外，因为函数 $z(t)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导函数，所以 $\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1})$ 近似等于 $z'(t_k)(t_k - t_{k-1}) = z'(t_k)\Delta t_k$，它们的误差较 Δt_k 更快地趋于 0. 因此 f 沿曲线 γ 的黎曼和

⊖ 函数 f 在以任意作为它的定义域的集合 S 上连续是指对 S 上的任意一点 z_0，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 z 属于 S 且 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(z(t_k))\Delta z_k$$

近似等于连续函数 $f(z(t))z'(t)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼和

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(t_k))z'(t_k)\Delta t_k,$$

这就引出了下面的定理(上述分析为定理 4 的主要证明思想).

定理 4 设 f 是有向光滑曲线 γ 上的连续函数，如果 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是 γ 的任一与其方向一致的可允许参数函数，则

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

定理 4 的严格证明不困难但比较繁琐，对于我们的主要结论影响不大，因此略去. 它的严格证明可参见参考文献[2].

因为(5)式对 γ 的所有合适的参数函数都成立，并且 f 沿 γ 的积分与参数函数的选择无关，于是我们立即得到下述推论.

推论 1 设 f 在有向光滑曲线 γ 上连续，如果 $z=z_1(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 和 $z=z_2(t)(c\leqslant t\leqslant d)$ 是 γ 的任意两个与其方向一致的可允许参数函数，则

$$\int_{a}^{b} f(z_1(t))z_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c}^{d} f(z_2(t))z_2'(t)\,\mathrm{d}t.$$

165

例 2 计算积分 $\int_{C_r}(z-z_0)^n\mathrm{d}z$，其中 n 是整数，C_r 是以逆时针方向绕圆周 $|z-z_0|=r$ 旋转一周的曲线[⊖]，如图 4-17 所示.

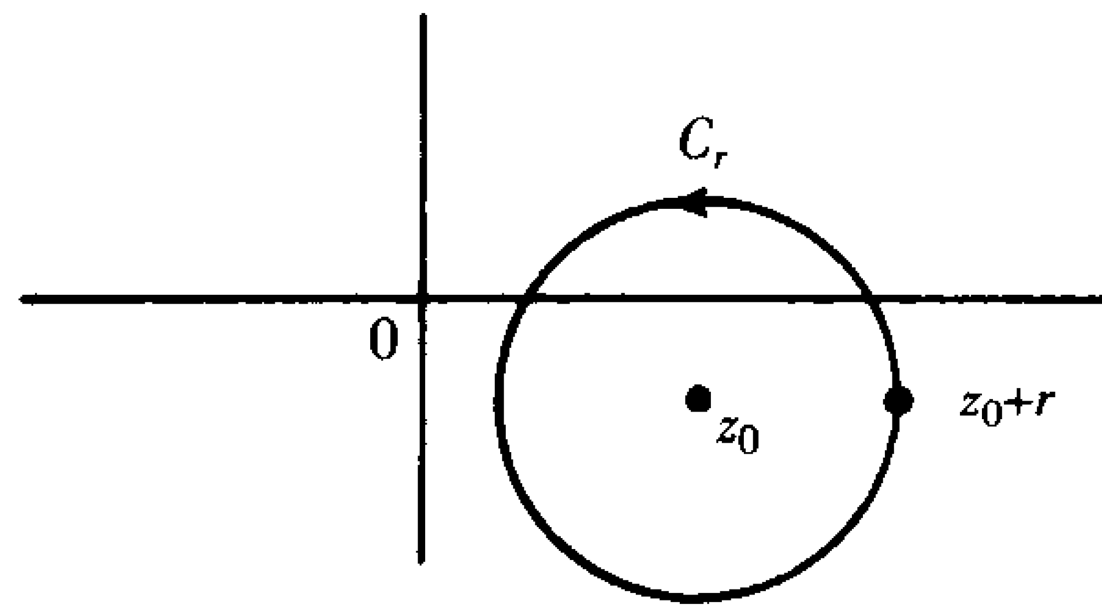


图 4-17 例 2 的有向光滑曲线 γ

解 取 C_r 的一个合适的参数函数：$z(t)=z_0+re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 令 $f(z)=(z-z_0)^n$. 我们有

$$f(z(t)) = (z_0+re^{it}-z_0)^n = r^n e^{int}$$

和

$$z'(t) = ire^{it}.$$

因此，由(5)式，

$$\int_{C_r}(z-z_0)^n\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}(r^n e^{int})(ire^{it})\,\mathrm{d}t = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\mathrm{d}t.$$

对上式最后一个积分分两种情况讨论. 当 $n\neq -1$ 时，有

$$ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\mathrm{d}t = ir^{n+1}\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = ir^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)}-\frac{1}{i(n+1)}\right] = 0,$$

⊖ 有时用符号

$$\oint_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

强调沿 Cr 的正方向取积分.

而当 $n=-1$ 时,

$$ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = i\int_0^{2\pi}dt = 2\pi i.$$

这样(无论 r 取何值)

$$\int_{C_r}(z-z_0)^n dz = \begin{cases}0 & n\neq -1,\\ 2\pi i, & n=-1.\end{cases} \qquad (6)$$

■

166 下面给出沿一条周线的积分的定义.

定义 4 设 Γ 是由有向光滑曲线 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 组成的周线, f 是 Γ 上的连续函数. 则 **f 沿 Γ 的周线积分** (contour integral of f along Γ) 记为 $\int_\Gamma f(z)dz$, 定义如下:

$$\int_\Gamma f(z)dz := \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz. \qquad (7)$$

若 Γ 由一个单点构成, 显然有

$$\int_\Gamma f(z)dz := 0.$$

例 3 计算

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-z_0}dz,$$

其中 Γ 是以逆时针方向绕圆周 $|z-z_0|=r$ 两周的周线, 起点是 z_0+r.

解 令 C_r 表示以逆时针方向绕圆周一周的周线, 则 $\Gamma=(C_r, C_r)$. 因此, 由例 2 中的公式(6)得到

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_{C_r}\frac{dz}{z-z_0} + \int_{C_r}\frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

■

167 **例 4** 计算 $\int_\Gamma \bar{z}^2 dz$, 其中 Γ 是图 4-18 中的简单闭周线.

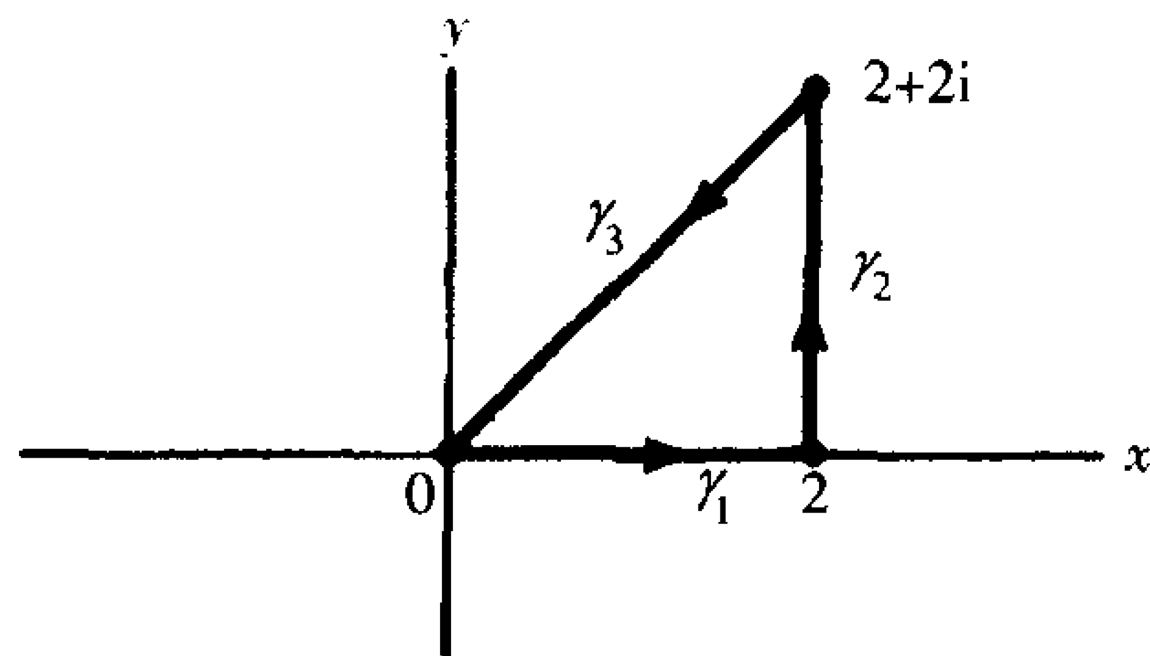


图 4-18 例 4 中的周线

解 由定义 4, 我们有

$$\int_\Gamma \bar{z}^2 dz = \int_{\gamma_1}\bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_2}\bar{z}^2 dz + \int_{\gamma_3}\bar{z}^2 dz.$$

对线段 γ_k 取适当的参数函数:

$$\gamma_1: z_1(t) = t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2),$$

$$\gamma_2: z_2(t) = 2+ti \qquad (0\leqslant t\leqslant 2),$$

$$\gamma_3: z_3(t) = -t(1+i) \qquad (-2\leqslant t\leqslant 0),$$

再由定理 4, 我们有

$$\int_{\gamma_1}\bar{z}^2 dz = \int_0^2 \overline{z_1(t)}^2 z_1'(t)dt = \int_0^2 t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3},$$

$$\int_{\gamma_2}\bar{z}^2 dz = \int_0^2 \overline{z_2(t)}^2 z_2'(t)dt = \int_0^2 (2-ti)^2 i dt$$

$$= \frac{\mathrm{i}(2-t\mathrm{i})^3}{-3\mathrm{i}}\bigg|_0^2 = \frac{-(2-2\mathrm{i})^3}{3} + \frac{8}{3},$$

及

$$\int_{\gamma_3} \bar{z}^2 \mathrm{d}z = \int_{-2}^{0} \overline{z_3(t)}^2 z_3'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{0} [-t(1-\mathrm{i})]^2[-(1+\mathrm{i})]\,\mathrm{d}t$$

$$= -(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^2\int_{-2}^{0} t^2 \mathrm{d}t = -(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^2\,\frac{8}{3}.$$

因此

$$\int_{\Gamma} \bar{z}^2 \mathrm{d}Z = \frac{8}{3} + \left[\frac{-(2-2\mathrm{i})^3}{3} + \frac{8}{3}\right] + \left[-(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^2\,\frac{8}{3}\right],$$

通过计算得最后结果为 $16/3 + 32\mathrm{i}/3$. ■

由定义 4 易知，前面一些沿有向光滑曲线积分的结果在周线积分上也是成立的．特别地，我们有

$$\int_{\Gamma} [f(z) \pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_{\Gamma} g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{8}$$

$$\int_{\Gamma} c f(z)\,\mathrm{d}z = c\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \quad (c\text{ 为任一复常数}) \tag{9}$$

和

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{10}$$

其中 f, g 是周线 Γ 上的连续函数. [168]

此外，若整个周线 $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$ 有参数函数 $z = z(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$，则存在一个细分

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$$

使函数 $z(t)$ 在第 k 个子区间 $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ 上的限制是 γ_k 适合的参数函数．因此由公式(5)得

$$\int_{\gamma k} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

从而

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau k} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

即

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

利用上式不难证明，沿一条简单闭周线的积分与周线的起点-终点的选择无关(参见习题 18)．因此，在计算沿这种周线的积分时，不必关心周线的起点-终点，只需明确其方向就可以了.

在许多理论和实践中，往往不必计算出周线积分的确切值，而只需知道它的值的一个合适的上界就可以了．下面我们来研究周线积分的估计问题.

设 f 是有向光滑曲线 γ 上的连续函数，常数 M 是 f 在 γ 上的一个上界，即 $|f(z)| \leqslant M\ (\forall z \in \gamma)$.

如果考虑 γ 的一个划分$\mathcal{P}_n$所对应的黎曼和$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k$,则由一般的三角不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)||\Delta z_k| \leqslant M\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|.$$

另外,注意到弦长之和$\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$不超过 γ 的长度. 因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta z_k\right| \leqslant M\ell(\gamma). \tag{11}$$

由于不等式(11)对$f(z)$的所有黎曼和都成立，通过取极限(当$\mu(\mathcal{P}_n)\to 0$)，得到

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\ell(\gamma). \tag{12}$$

169 把这个结果及三角不等式应用到定义周线积分的(7)式，我们有：

定理 5 若函数f在周线Γ上连续，且$|f(z)|\leqslant M(\forall z\in\gamma)$，则

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\ell(\Gamma), \tag{13}$$

其中$\ell(\Gamma)$定义为Γ的长度. 特别地，有

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \max_{z\in\Gamma}|f(z)|\cdot\ell(\Gamma). \tag{14}$$

例 5 求$\left|\int_\Gamma \mathrm{e}^z/(z^2+1)\,\mathrm{d}z\right|$的一个上界,其中$\Gamma$是逆时针方向绕圆周$|z|=2$一周的周线.

解 首先注意到积分路径的长度是$\ell=4\pi$. 下面求函数$\mathrm{e}^z/(z^2+1)$在$|z|=2$上的一个上界M. 设$z=x+\mathrm{i}y$，当$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=2$时，我们有

$$|\mathrm{e}^z|=|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}|=\mathrm{e}^x\leqslant \mathrm{e}^2,$$

利用三角不等式，当$|z|=2$时，

$$|z^2+1|\geqslant|z|^2-1=4-1=3,$$

所以当$|z|=2$时，$|\mathrm{e}^z/(z^2+1)|\leqslant \mathrm{e}^2/3$，故由定理5得

$$\left|\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{3}\cdot 4\pi. \qquad \blacksquare$$

最后指出，尽管一些实的定积分可被看作一个区域的面积，而周线积分却没有相应的直观几何解释. 不过，在后面的几章中我们将看到，周线积分在一些实际问题中非常有用.

练习 4.2

1. 设γ是一条有向光滑曲线,起点和终点分别是α,β. 由定义3直接证明$\int_\gamma c\,\mathrm{d}z=c(\beta-\alpha)$,其中$c$是任意复常数.

   上式对于沿连接α,β的任意一条周线的积分都成立吗?
2. 利用定义3证明性质(1)、(2)和(3).

170

3. 计算下列积分.

   (a)$\int_0^1(2t+\mathrm{i}t^2)\,\mathrm{d}t$ (b)$\int_{-2}^0(1+\mathrm{i})\cos(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t$ (c)$\int_0^1(1+2\mathrm{i}t)^5\,\mathrm{d}t$ (d)$\int_0^2\frac{t}{(t^2+\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}t$

4. 写出定理 3 的详细证明.

5. 利用例 2 的结果计算

$$\int_C\left[\frac{6}{(z-i)^2}+\frac{2}{z-i}+1-3(z-i)^2\right]dz,$$

其中 C 是逆时针绕圆周 $|z-i|=4$ 一周的周线.

6. 计算 $\int_\Gamma \bar{z}dz$,其中

(a) Γ 是以逆时针方向绕圆周 $|z|=2$ 一周的周线.

(b) Γ 是以顺时针方向绕圆周 $|z|=2$ 一周的周线.

(c) Γ 是以顺时针方向绕圆周 $|z|=2$ 三周的周线.

7. 计算 $\int_\Gamma \mathrm{Re}z dz$,其中 Γ 是 $z=0$ 到 $z=1+2i$ 的有向线段.

8. 对于以 $z=0$, $z=1$, $z=1+i$, $z=i$ 为顶点的正方形,设 C 为从 $z=0$ 出发以逆时针方向绕正方形一周的周界. 证明

$$\int_C e^z dz=0.$$

9. 计算 $\int_\Gamma (x-2xyi)dz$,周线 $\Gamma: z=t+it^2 (0\leqslant t\leqslant 1)$,其中 $x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}\,z$.

10. 计算 $\int_C \bar{z}^2 dz$,其中 C 是 8 题中正方形的周界.

11. 计算 $\int_\Gamma (2z+1)dz$,其中 Γ 是起点为 $z=-i$ 终点为 $z=1$ 的下列周线:

(a) 简单的线段.

(b) 两条简单线段,一条从 $z=-i$ 到 $z=0$,另一条从 $z=0$ 到 $z=1$.

(c) 圆弧 $z=e^{it}$, $-\pi/2\leqslant t\leqslant 0$.

12. 判断对错: $\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz$.

13. 计算 $\int_\Gamma (|z-1+i|^2-z)dz$,其中 Γ 为半圆周 $z=1-i+e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

14. 应用定理 5 验证下列估计.

(a) 若 C 为绕圆周 $|z|=3$ 一周的周线,则

$$\left|\int_C\frac{dz}{z^2-i}\right|\leqslant\frac{3\pi}{4}.$$

171

(b) 若 γ 为从 $z=R(>0)$ 到 $z=R+2\pi i$ 的垂线段,则

$$\left|\int_\gamma\frac{e^{3z}}{1+e^z}dz\right|\leqslant\frac{2\pi e^{3R}}{e^R-1}.$$

(c) 若 Γ 为圆周 $|z|=1$ 在第一象限的圆弧,则

$$\left|\int_\Gamma \mathrm{Log}\,z dz\right|\leqslant\frac{\pi^2}{4}.$$

(d) 若 γ 为从 $z=0$ 到 $z=i$ 的线段,则

$$\left|\int_\gamma e^{\sin z}dz\right|\leqslant 1.$$

15. 设 f 是实区间 $[a, b]$ 上的复值连续函数. 证明

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|dt.$$

[提示：考虑f在$[a, b]$上的黎曼和.]

16. 设γ是起点为α终点为β的有向光滑曲线. 利用(5)式及定理3证明

$$\int_\gamma z\mathrm{d}z = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}.$$

17. 利用16题结果，证明对任意闭周线Γ有

$$\int_\Gamma z\mathrm{d}z = 0.$$

18. 设Γ_1是一条闭周线，参数函数为$z = z_1(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$. 在区间$(a, b)$上选择一点$c$，令$c$为这条周线的新的起点-终点，这样得到的闭周线记为$\Gamma_2$，它的参数函数为

$$z_2(t) = \begin{cases} z_1(t) & c \leqslant t \leqslant b, \\ z_1(t - b + a) & b \leqslant t \leqslant b - a + c. \end{cases}$$

对任何Γ_1上的连续函数f，证明

172

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

4.3 积分与路径的无关性

复分析理论中的一个重要结果是把微积分基本定理推广到周线积分上. 这意味着在某些条件下函数的积分与连接起点与终点的路径无关. 事实上，周线积分基本定理完全刻画了复积分上述性质成立的条件. 在本节，我们将主要研究复积分的这种性质. 首先介绍基本定理，利用它，不用参数函数就能由被积函数的原函数计算出积分.

定理 6 设函数$f(z)$在区域D内连续，$F(z)$是$f(z)$在D内的一个原函数，即对任意$z \in D$，$\mathrm{d}F(z)/\mathrm{d}z = f(z)$，则对于$D$上任意起点为$z_I$，终点为$z_T$的周线$\Gamma$，有

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = F(z_T) - F(z_I). \tag{1}$$

[注意到定理的条件蕴涵$F(z)$在区域D内解析，从而在区域D内连续. 例如函数$\operatorname{Log} z$，它在任意包含负实轴上的点的区域内都不是$1/z$的原函数.]

定理6能使某些周线积分的计算变得简便，定理证明之前，我们先看一个例子.

例 1 计算积分$\int_\Gamma \cos z\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是图4-19所示的周线.

解 由于对任意z，被积函数有一个原函数$F(z) = \sin z$，所以不必再求Γ的参数函数. 因此由定理6，这个积分的值仅由Γ的两个端点就可计算出来：

173

$$\int_\Gamma \cos z\mathrm{d}z = \sin z\Big|_{-1}^{2+\mathrm{i}} = \sin(2 + \mathrm{i}) - \sin(-1). \qquad \blacksquare$$

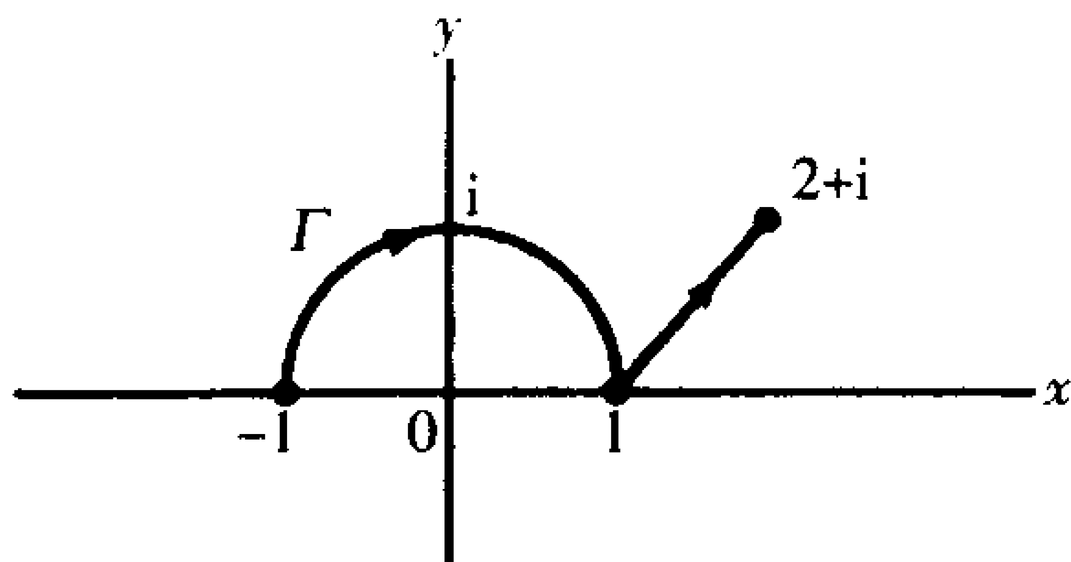


图 4-19 例1的周线

定理 6 的证明 证明十分简捷，先写出$f(z)$的参数函数的积分，再根据链式法则及上一节的定理3即可.

设Γ是D内连接z_I与z_T的一条周线. 选取Γ的一个参数函数$z = z(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$，像上一节那样，令$\{\tau_k\}_0^n$为$\Gamma$的光滑弧段$\{\gamma_j\}_1^n$的端点所对应的$t$值[特别地，$z(\tau_0) = z_I$，$z(\tau_n) = z_T$]，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

应用 F 是 f 的一个原函数这一事实，可以改写(2)式中的被积函数. 为此，注意到在每个分区间 $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ 上的微分 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 存在且连续，因此由链式法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(z(t))] = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(z(t))z'(t) \quad (\tau_{j-1} \leqslant t \leqslant \tau_j),$$

又由定理 3，所以

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[F(z(t))]\,\mathrm{d}t = F(z(\tau_j)) - F(z(\tau_{j-1})).$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^{n} [F(z(\tau_j)) - F(z(\tau_{j-1}))] \\ &= [F(z(\tau_1)) - F(z(\tau_0))] + [F(z(\tau_2)) - F(z(\tau_1))] \\ &\quad + \cdots + [F(z(\tau_n)) - F(z(\tau_{n-1}))].\end{aligned} \tag{3}$$

即

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z(\tau_n)) - F(z(\tau_0)) = F(z_T) - F(z_I).$$ ■

174

例 2 计算 $\int_{\Gamma} 1/z\mathrm{d}z$,其中(a) Γ 是图 4-20 所示的周线. (b) Γ 是图 4-21 所示的周线.

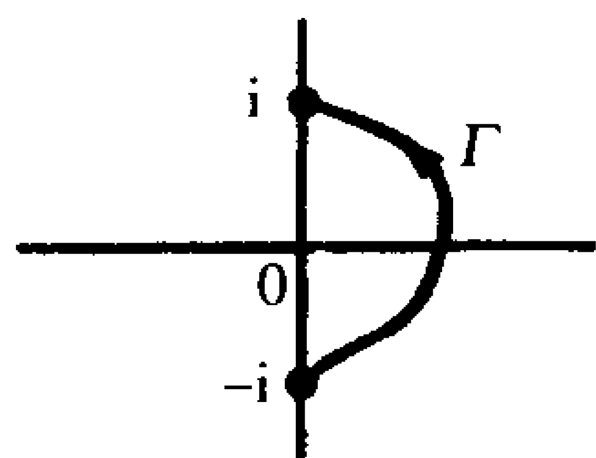


图 4-20 例 2(a)中的周线

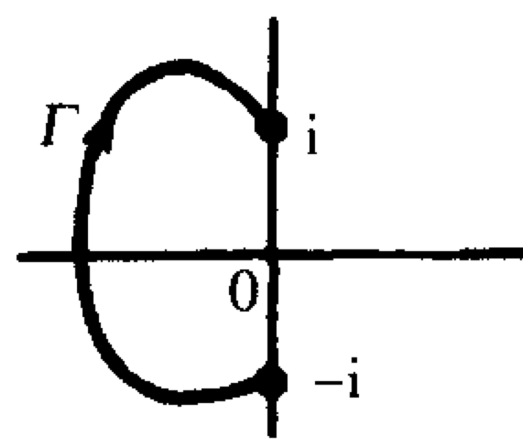


图 4-21 例 2(b)中的周线

解 (a)在图 4-20 中周线 Γ 的每一点处，函数 $1/z$ 都是 $\log z$ 的主值分支的导函数(见 3.3 节). 因此

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}\, z\Big|_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right) = \pi\mathrm{i}.$$

(b)对于图 4-21 中的周线 Γ，由于它的分支割线与周线 Γ 相交，从而不能利用函数 $\mathrm{Log}\, z$. 用函数 $\mathcal{L}_0(z) = \mathrm{Log}|z| + \mathrm{i}\arg z$，$0 < \arg z < 2\pi$ 代之，它是在沿着非负 x 轴割开的 z 平面上对数函数的一个分支. 这样

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathcal{L}_0(z)\Big|_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i} - \frac{3\pi}{2}\mathrm{i} = -\pi\mathrm{i}.$$ ■

因为环线即闭周线的端点重合，由定理 6 立即得到下面的推论.

推论 2 若 f 在区域 D 内连续且在 D 内有一个原函数，则对 D 内的任意环线 Γ 有

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

推论 2 提供了 4.2 节例 2 中 当 $n \neq -1$ 时积分$\int_{C_r}(z-z_0)^n dz$ 的另外一种求法. 设 $f(z)=(z-z_0)^n$,则 $f(z)$ 是函数 $F(z)=(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ 的导函数,它在复平面上除去点 $z=z_0$ 的任意区域 D 内是解析的.(事实上只有在 n 为负数的情况需要除去 z_0. 为什么?) 由于 C_r 是 D 内的闭周线,由推论我们得到$\int_{C_r}(z-z_0)^n dz=0, n\neq -1$.

由(1)式还可以得到的一个重要结论是:当函数f在区域 D 内有一个原函数时,它沿着 D 内的周线积分只依赖于周线的端点 z_I, z_T,即积分与连接这两点的路径无关!例如,如图 4-22 所示,在上述条件下,积分$\int_{\Gamma_1} f(z)dz$, $\int_{\Gamma_2} f(z)dz$, $\int_{\Gamma_3} f(z)dz$ 是相等的. 基于这样的事实,对于连续函数 $f(z)$,我们将建立本节已经讨论过的三个性质的等价性.

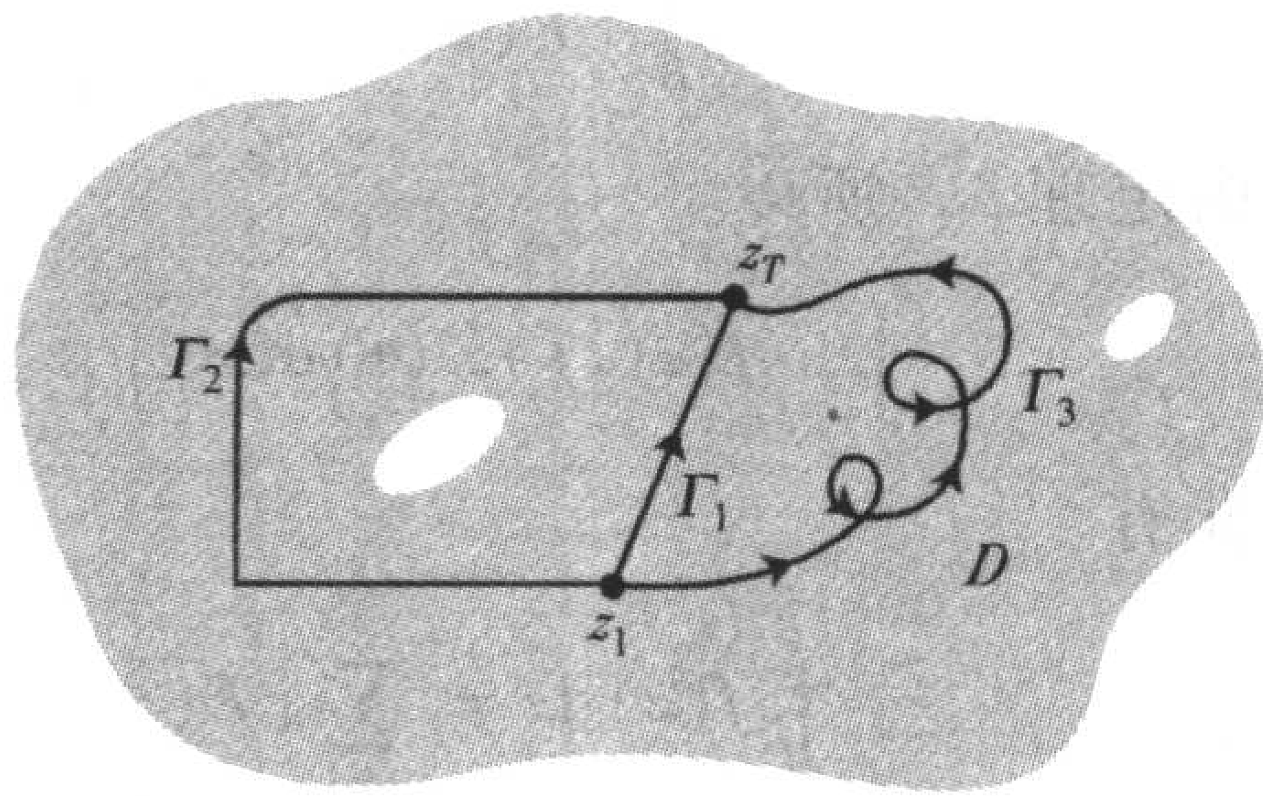


图 4-22 路径无关性

175

定理 7 设 f 是区域 D 内的连续函数,则以下结论是等价的:

(i) f 在 D 内有原函数.

(ii) f 沿 D 内任意环线的积分等于 0. [即若 Γ 是 D 内任意环线,则$\int_{\Gamma} f(z)dz=0$].

(iii) f 沿 D 内的周线积分与路径无关[即若 Γ_1, Γ_2 是 D 内任意两条有公共的起点和终点的周线,则$\int_{\Gamma_1} f(z)dz=\int_{\Gamma_2} f(z)dz$].

证 由定理 6 知(i)蕴涵(ii)[也蕴涵(iii)]. 为了完成定理 7 的证明,只需证明(ii)蕴涵(iii)及(iii)蕴涵(i)即可.

假设(ii)成立. 设 Γ_1, Γ_2 是 D 内任意两条有公共的起点 z_I 及终点 z_T 的周线,定义 Γ 为先沿 Γ_1 从 z_I 到 z_T,然后再沿 $-\Gamma_2$ 由 z_T 到 z_I 的周线,则由 4.2 节的(10)式,我们有

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{-\Gamma_2} f(z)dz$$

$$=\int_{\Gamma_1} f(z)dz-\int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

另一方面,由于 Γ 是闭曲线,由(ii)知

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0.$$

从而(iii)成立.

176

现在证明只要(iii)成立,(i)也成立. 为证明 f 有原函数,我们需要定义一个函数 $F(z)$ 并证明它的导数就是 $f(z)$. 前面的定理 6 为我们寻找函数 $F(z)$ 提供了线索:如果已知 f 有一个原函数,则(1)式成立,所以利用(1)式来定义函数 $F(z)$ 然后证明它确实是 f 的一个原函数.

因此,固定 D 内一点 z_0,然后对 D 内任意一点 z,设 $F(z)$ 为 f 沿 D 内连接 z, z_0 两点的某一周线 Γ 的积分. 因为 D 是连通的,至少存在一条这样的周线 Γ(例如有向多边形路径),

由条件(iii)知积分与周线的选择无关，即对于所有可能的连接 z，z_0 的路径，$F(z)$ 的值都相同. 因此 $F(z)$ 是在 D 上合理定义的一个单值函数. 为了证明(i)，我们计算$F(z+\Delta z)-F(z)$.

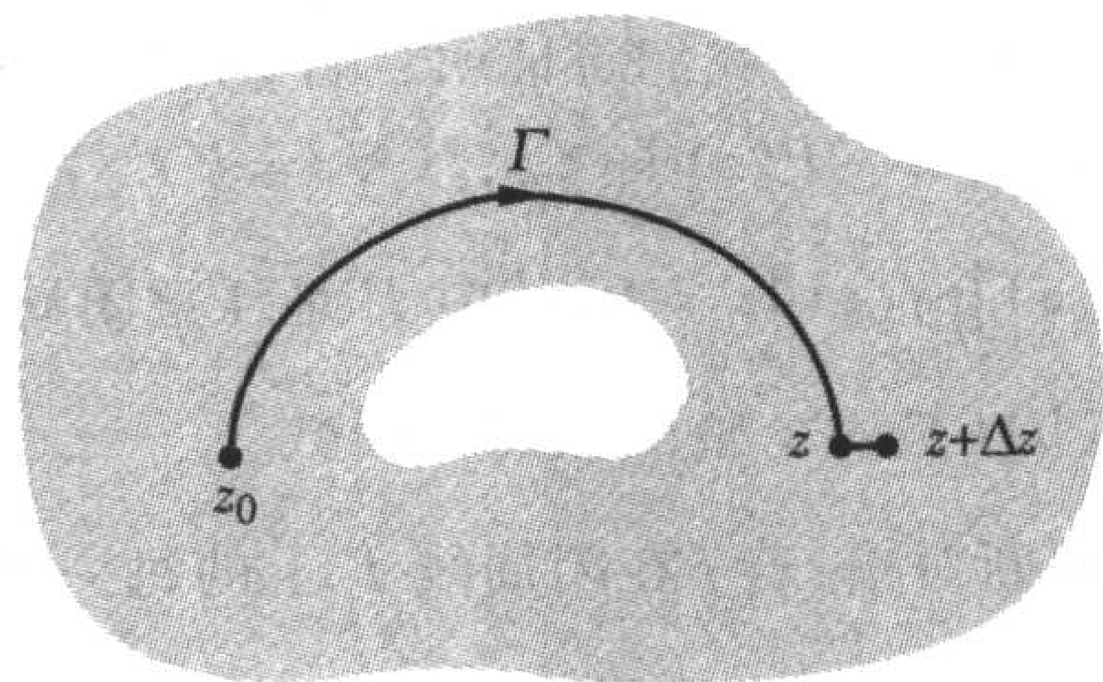


图 4-23 定理 7 中的积分路径

为计算 $F(z+\Delta z)$，先沿周线 Γ 从 z_0 到 z，再沿从 z 到 $z+\Delta z$ 的直线段对 f 进行积分. 因为 D 是一个开集，可取 Δz 充分小使连接 z 与 $z+\Delta z$ 的线段落在 D 内，如图 4-23 所示. 而差值$F(z+\Delta z)-F(z)$正是 f 沿这条线段的积分. 设这条线段的参数函数为 $z(t)=z+t\Delta z$，$0\leqslant t\leqslant 1$，我们有

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z\mathrm{d}t,$$

从而

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\int_0^1 f(z+t\Delta z)\mathrm{d}t.$$

由 f 的连续性,容易看出(参见习题 10),当 $\Delta z\to 0$ 时,最后一个积分趋于$\int_0^1 f(z)\mathrm{d}t=f(z)$. 因此 $F'(z)$ 存在且等于 $f(z)$. 这样就完成了等价性的证明. ■

现在看来定理 7 或许作用不大，我们甚至怀疑是否能够去验证一个函数沿着任何闭曲线的积分为 0. 在下一节中我们将得到一个令人惊讶的定理：柯西定理，它给出了使上述性质成立的一个简单条件. 现将本节结论总结如下：连续函数 f 在 D 内有一个原函数当且仅当它沿 D 内任意环线的积分为 0. 177

练习 4.3

1. 计算下列积分. (可参照基本积分表，想一想为什么.)

(a) $\int_\Gamma (3z^2-5z+\mathrm{i})\mathrm{d}z$,其中 Γ 是从 $z=\mathrm{i}$ 到 $z=1$ 的线段.

(b) $\int_\Gamma \mathrm{e}^z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是 $|z|=1$ 上从 $z=1$ 到 $z=-1$ 的上半圆周.

(c) $\int_\Gamma 1/z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是右半平面上从 $z=-3\mathrm{i}$ 到 $z=3\mathrm{i}$ 的任意周线.

(d) $\int_\Gamma \csc^2 z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是不经过点 $0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$ 的任意闭周线.

(e) $\int_\Gamma \sin^2 z\cos z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是图 4-24 中的周线.

(f) $\int_\Gamma \mathrm{e}^z\cos z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是图 4-24 中的周线.

(g) $\int_\Gamma z^{1/2}\mathrm{d}z$,取 $z^{1/2}$ 的主值分支,其中 Γ 是图 4-24 中的周线.

(h) $\int_\Gamma (\mathrm{Log}\, z)^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是从 $z=1$ 到 $z=\mathrm{i}$ 的线段.

(i) $\int_\Gamma 1/(1+z^2)\mathrm{d}z$,其中 Γ 是从 $z=1$ 到 $z=1+\mathrm{i}$ 的线段.

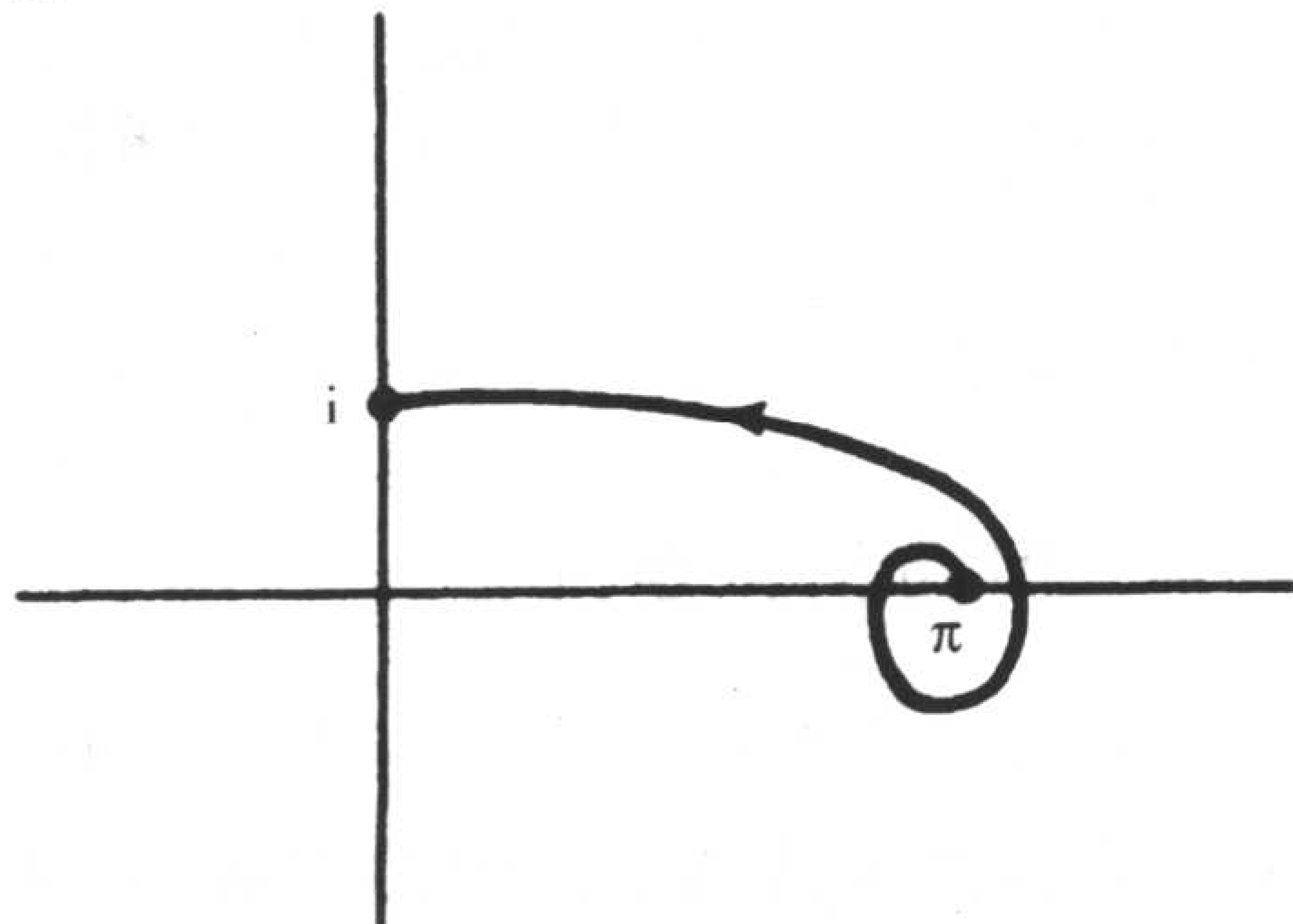


图 4-24 习题 1 中(e)、(f)、(g) 的周线

2. 若 $P(z)$ 是一个多项式，Γ 是任意闭周线，解释为何$\int_\Gamma P(z)\,dz = 0$.
3. 在第 5 章中我们将证明：若 f 是一个整函数，Γ 是任意周线，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个多项式 $P(z)$ 使得 $|f(z) - P(z)| < \varepsilon$，$(\forall z \in \Gamma)$. 利用这个事实证明：若 $f(z)$ 是整函数，则

   (a) $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$，其中 Γ 是任意闭周线. [提示：利用习题 2 的结论.]

   (b) f 是一个整函数的导函数.
4. 判断对错：若 f 在闭周线 Γ 上的每一点都解析，则$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

178

5. 解释例 2，说明函数 $f(z) = 1/z$ 在有孔平面 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 上无原函数的原因.
6. 虽然在有孔平面 $\mathbf{C}\setminus\{z_0\}$ 上，函数 $1/(z-z_0)$ 不能应用推论 2，但定理 6 能用来证明

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

   其中 C 是绕以 z_0 为心的任意正向圆周一周的圆. 思路如下：引入从 z_0 到∞的一条水平分支割线，如图 4-25 所示. 在割开的 z 平面上，函数 $1/(z-z_0)$ 有原函数 $\mathrm{Log}(z-z_0)$. 应用定理 6 计算 $1/(z-z_0)$ 沿图 4-25 所示的 C 上由 α 到 β 部分的积分. 现在令 α，β 沿割线趋于点 τ 从而得到被积函数沿 C 的积分.

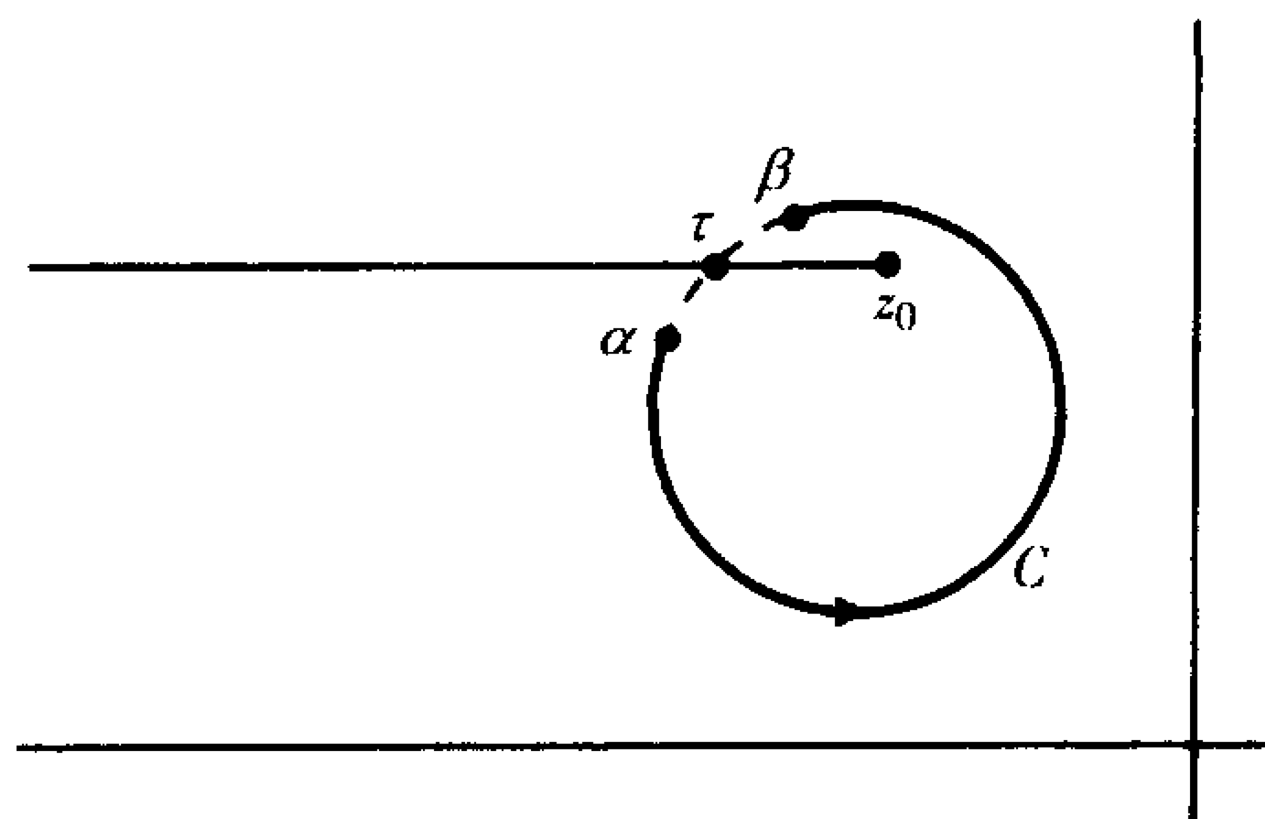


图 4-25　习题 6 的周线

7. 证明：若 C 是一正向圆周，z_0 是 C 外一点，则

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 0.$$

8. 直接证明定理 7 中的(iii)蕴涵(ii).
9. 我们知道，原函数在相差一个常数的意义下是唯一确定的. 这种性质在定理 7(iii)蕴涵(i)的证明中是怎样体现的？
10. 证明：若 f 在 z 点连续，则 $\Delta z \to 0$ 时，

$$\int_0^1 f(z + t\Delta z)\,dt \to f(z).$$

   [提示：估计差值

$$\int_0^1 f(z + t\Delta z)\,dt - f(z) = \int_0^1 [f(z + t\Delta z) - f(z)]\,dt.\ ]$$

11. 证明分部积分公式：若 f，g 在包含周线 Γ 的区域内具有连续的一阶导数，则

179

$$\int_\Gamma f'(z)g(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_{z_I}^{z_T} - \int_\Gamma f(z)g'(z)\,dz,$$

   其中 z_I，z_T 分别是 Γ 的起点和终点. [提示：对函数$d(fg)/dz$应用定理 6.]
12. 设解析函数 f 在区域 D 内有连续导函数，且对圆盘 D：$|z| < 1$ 内的所有 z 满足 $|f'(z)| \leq M$. 证明

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1| \quad (z_1, z_2 \text{ 在 } D \text{ 内}).$$

   [提示：观察到 $f(z_2) - f(z_1) = \int f'(z)\,dz$，积分路径可取从 z_1 到 z_2 的线段.]

4.4　柯西积分定理

本节的主要内容是柯西积分定理[1]. 由一条周线到另一条周线的连续形变概念为这个定理的证明提供了清晰、直观的方法. 一些人可能认为，应用人们感兴趣的向量分析法，特别是格

[1] 事实上，柯西(Cauchy)发表此定理之前高斯于 1811 年已经发现了此定理.

林定理来证明会更加得心应手．因此，我们给读者提供了两种可供选择的方法，即4.4.1节和4.4.2节，掌握其中的任一种方法，都不会对后面的学习造成影响．

为了4.4.1节和4.4.2节内容的独立完整性，有一些内容是重复的．例如4.4.2节中的定理12是4.4.1节定理9的复述，而且两节中有些相同的例子(尽管解决方法不同)．

练习4.4分为三部分，分别针对4.4.1节、4.4.2节以及4.4.1节和4.4.2节的内容．

4.4.1 周线形变法

上一节中已经证明：如果连续函数f在区域D内有一个(解析的)原函数，则它沿D内任意环线上的积分等于零，反之亦然．现在我们来研究这个性质与f的解析性之间的关系．首先介绍一些必要的几何知识．

在平面上给定区域内环线到环线的连续形变是一个重要的概念．形变看起来很显然，但难于用精确的数学语言表达．在大多数情况下，仅靠观察就够了．为此，我们首先给出一个直观的形变定义．

如果环线Γ_0(将Γ_0看作有方向的带弹性的细绳)可以在平面上连续移动，且不跑出区域D，以这种方式最终能与Γ_1(在位置和方向上)一致，则称环线Γ_0可在区域D内连续形变到环线Γ_1．

180

下面举例说明这个概念．

(a)设D是如图4-26a所示的环形域，Γ_0，Γ_1是D内的两个同心的圆形周线．因为两个圆周的方向都是正向，将Γ_0的半径由1伸长到2，则"弹性"圆周Γ_0在D内能够连续形变到Γ_1，即我们形象化了当半径由1变为2时同心圆的一个连续统．图4-26b中的虚线描述了形变过程中的一些圆周，注意到它们都在区域D内．

(b)设D是如图4-27所示的环形域，Γ_0是D内的三角形周线，Γ_1是D内的圆形周线．通过扩张Γ_0的半径使它的边同时变得越来越圆，Γ_0在D内可连续形变到Γ_1．图4-27给出了变化过程中的一些环线，它们也都含在区域D内．

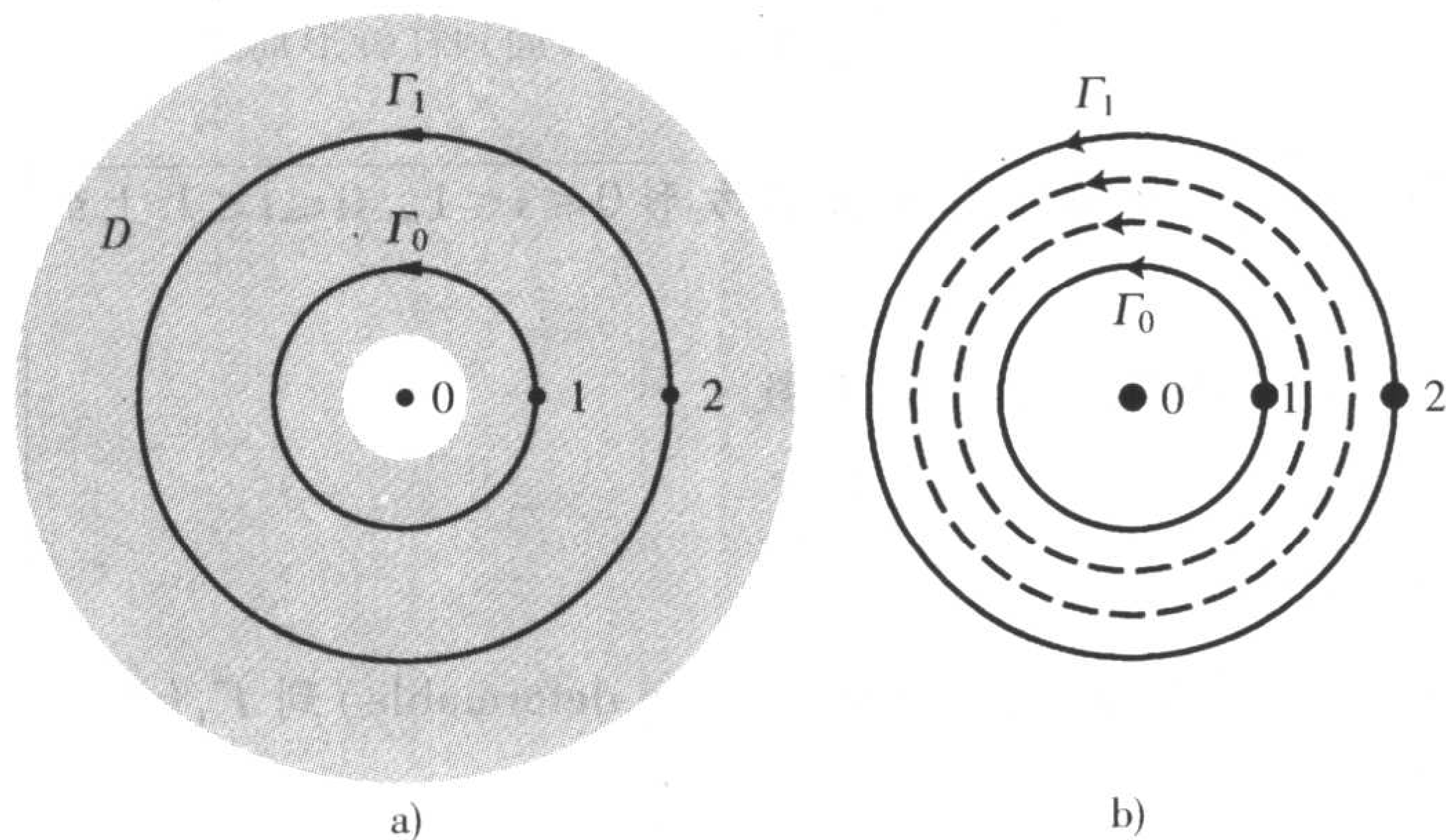


图4-26 圆形周线的扩展

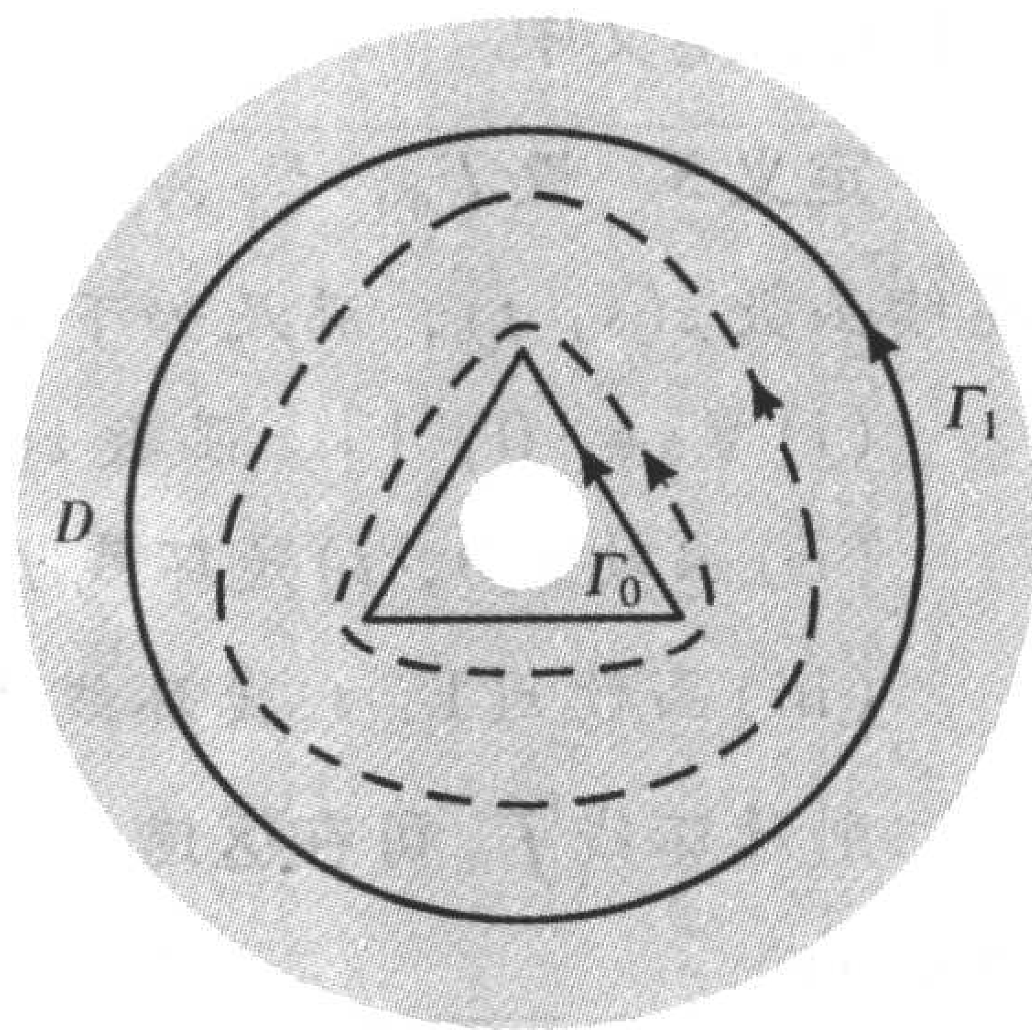


图4-27 三角形的形变

(c)设 D 是整个复平面，Γ_0 是如图 4-28 所示的环线，Γ_1 是单点周线 $z=0$. 如图 4-28 所示，通过简单的收缩和平移，在 D 内 Γ_0 能够连续形变到 Γ_1.

181

(d)设 D 是复平面的第一象限，Γ_0，Γ_1 是图 4-29a 中的圆形周线. 注意到仅将 Γ_0 向右平移并不能得到我们想要的形变，因为 Γ_0 与 Γ_1 虽然位置重合，但方向不同. 为此，先将 Γ_0 收缩成一个点(没有方向)，再将这点扩张为 Γ_1，且总保持形变在 D 内进行. 如图 4-29b 所示.

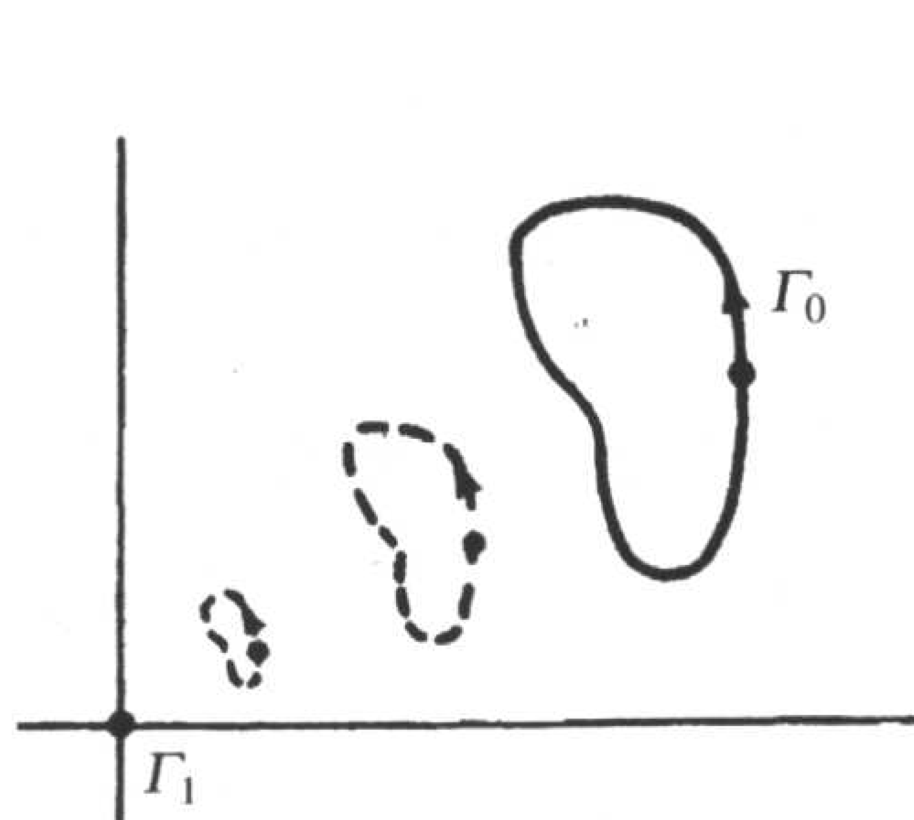
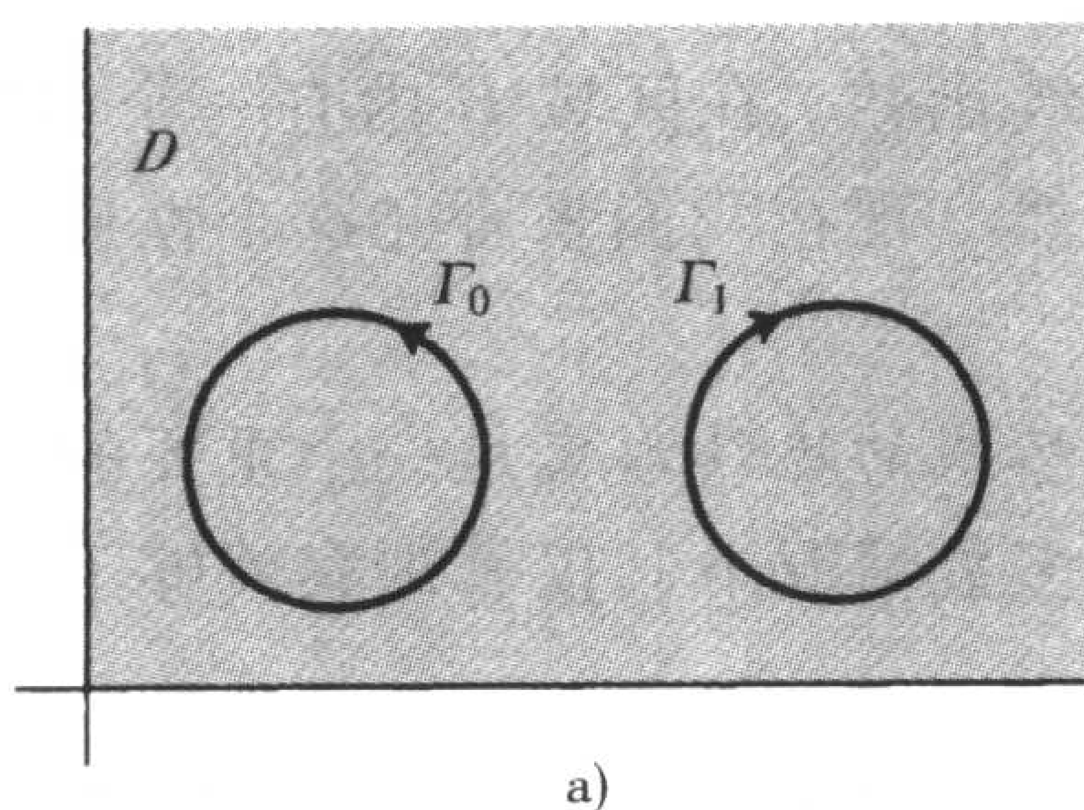


图 4-28 周线到一点的收缩



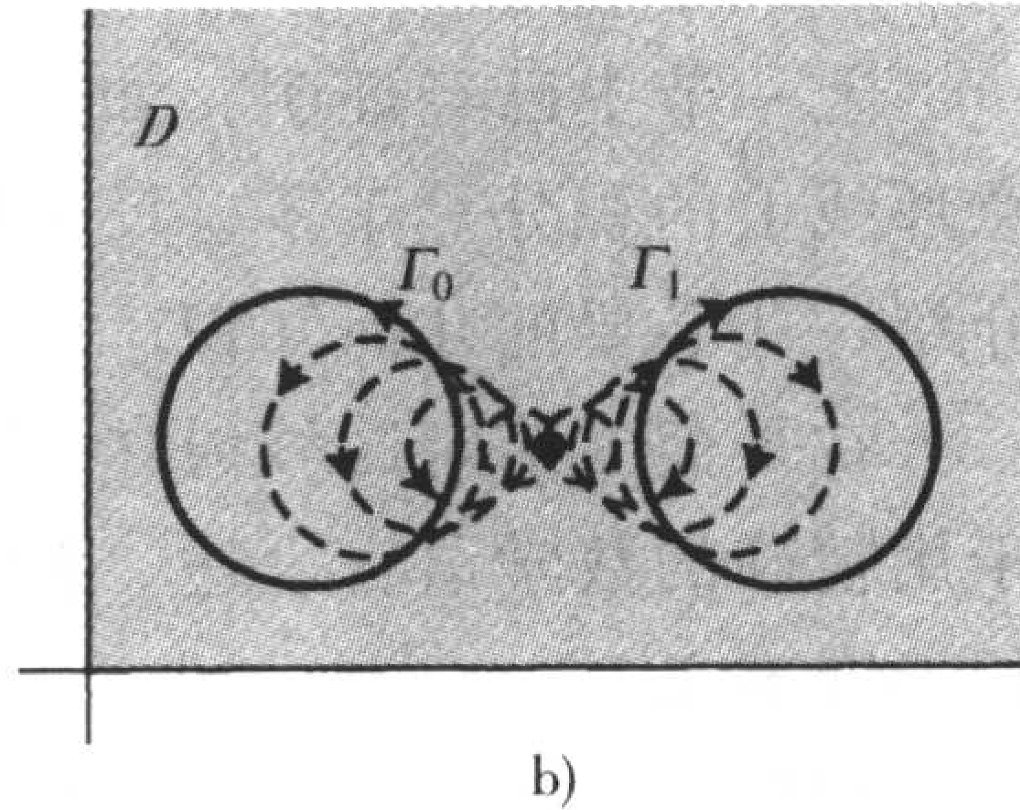


图 4-29 通过将周线收缩到一点来使周线的方向反向

(e)设 D 是复平面去掉两个点 $\pm i$ 的区域，Γ_0 是圆形周线，Γ_1 是"杠铃"形周线，如图 4-30 所示，则 Γ_0 可以在 D 内连续形变到 Γ_1，图 4-30 中的虚线表示了形变过程中的一些环线.

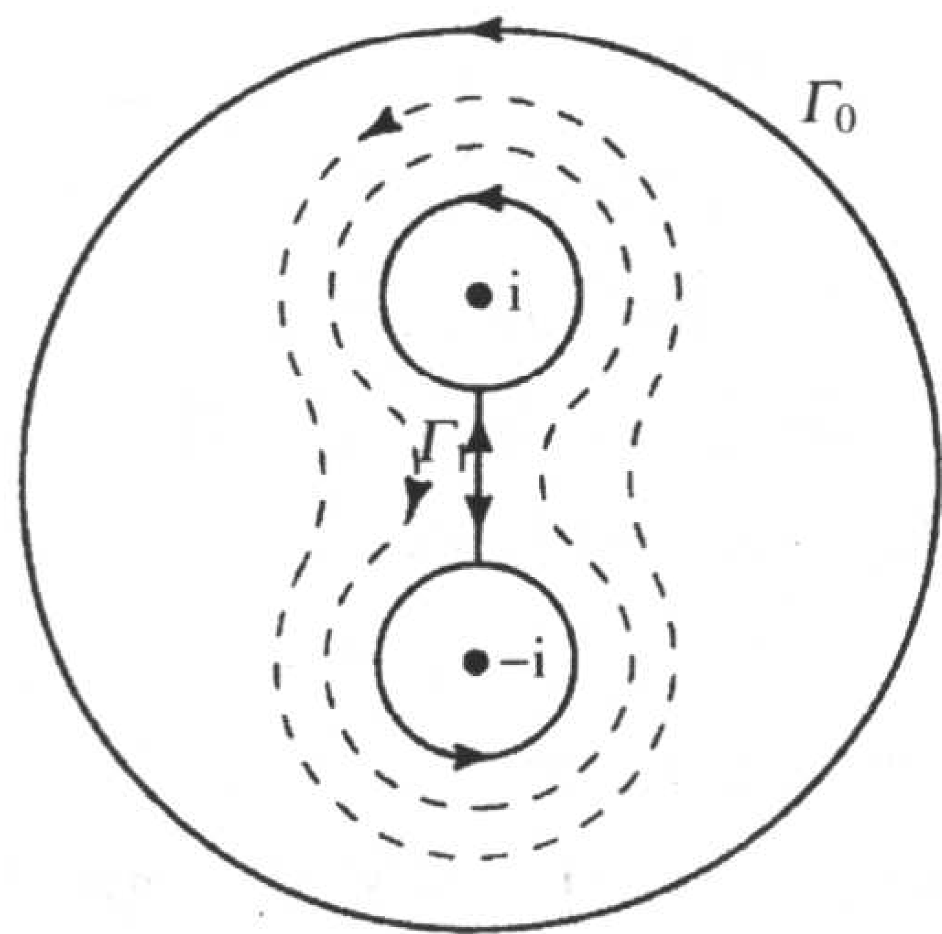


图 4-30 圆周到杠铃形周线的形变

现在我们用严谨的数学语言描述形变的概念. 前面的例子说明：如果环线 Γ_0，Γ_1 属于 D 内的一个连续统 $\{\Gamma_s\}$，$0\leqslant s\leqslant 1$，使得对于 D 内任何一对环线 $\Gamma_{s'}$，$\Gamma_{s''}$，当 s' 充分接近 s'' 时，$\Gamma_{s'}$，$\Gamma_{s''}$ 可以任意接近，则称 Γ_0 可以在 D 内连续形变到 Γ_1. 这就要求周线 $\{\Gamma_s\}$ 的参数函数 $\{z_s(t)\}$ 关于变量 s 连续. 利用环线的标准参数区间 $[0, 1]$，记 $z_s(t)$ 为 $z(s, t)$，我们把以上想法归结在下面的定义中.

定义 5 设 Γ_0，Γ_1 为区域 D 内的两条环线，若存在在单位正方形 $0\leqslant s\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 上的连续函数 $z(s, t)$，满足如下条件：

(i) $\forall s\in[0, 1]$，函数 $z(s, t)$ 在 D 内是一条环线的参数函数.

(ii) 函数 $z(0, t)$ 是环线 Γ_0 的参数函数.

(iii) 函数 $z(1, t)$ 是环线 Γ_1 的参数函数.

则称环线 Γ_0 **可在区域** D 内(in the domain)**连续形变**[㊀](continuously deformable)到 Γ_1(参见图 4-31).

㊀ 有时也称同伦.

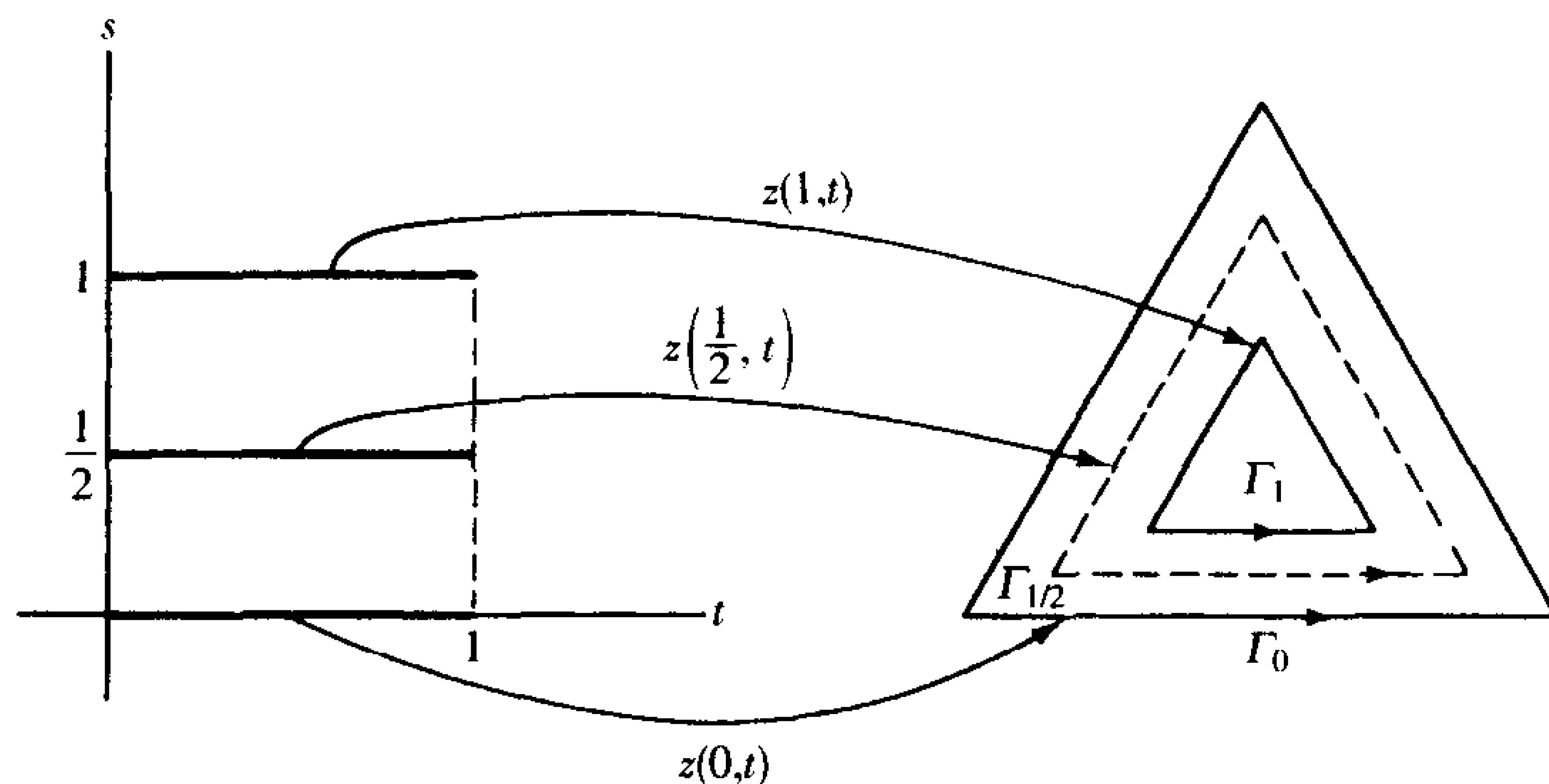


图 4-31 形变的参数化

例 1 通过建立形变函数 $z(s,\ t)$，证明在环域 D：$1/2<|z|<3$ 内环线 Γ_0：$z=e^{2\pi i t}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 可连续形变为环线 Γ_1：$z=2e^{2\pi i t}$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

解 此形变可参见图 4-26. 中间环线 $\Gamma_s(0\leqslant s\leqslant 1)$ 是半径在[1，2]间的一族同心圆. 因此函数 $z(s,\ t)=(1+s)e^{2\pi i t}(0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$ 实现了这个形变. ■

例 2 建立一个形变函数，证明整个平面组成的区域上任意环线都能收缩为单点周线 $z=0$.

解 此即为图 4-28 的情形. 设 Γ_0 的参数函数是 $z=z_0(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 $z_0(t)$ 乘以一个从 0 变到 1 的缩放因子即可实现收缩形变. 这个形变函数可由下式给出：

$$z(s,t)=(1-s)z_0(t)\quad(0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1).$$ ■

对连续形变的初步观测在于它的序性. 首先注意到如果 $z(s,\ t)$ 实现了环线 Γ_0 到 Γ_1 的形变，则 $z(1-s,\ t)$ 是 Γ_1 到 Γ_0 的形变. 而且，如果在一个给定区域内 Γ_0 和 Γ_1 都能被形变为单个点，则在这个区域内 Γ_0 可形变到 Γ_1(见习题 2).

正如例 2 中我们看到的，在整个复平面组成的区域 D 内，任意环线都能形变为单个点 $z=0$.（因此，在这个区域内任意两个环线都可以相互形变.）许多其他的区域也有这样的性质，例如，圆的内部，正多边形的内部，半平面等. 下面将这样的区域归类如下.

定义 6 对于任一区域 D，若 D 内的任意环线都能在 D 内连续形变为一个点，则称 D 为**单连通区域**.

182～184

粗略地说，单连通区域是没有任何"洞"的区域. 如果 D 内有一个洞，则围绕这个洞的环线在 D 内不能收缩为一个点. 拓扑学中已经证明：若 γ 是任意一条简单闭周线，则它的内部是单连通区域. 事实上，这个结论常被看作是若尔当曲线定理的一部分. 以上所述提供了判断某个区域是否单连通的一个简便方法(参见图 4-32).

如果一个区域不是单连通的(这种区域称为*多连通的*)，这时会出现一些有趣的情形. 例如，设 D 是复平面去掉原点的区域，Γ 是以 $z=1$ 为起点绕单位圆周 $|z|=1$ 逆时针旋转一周的周线. 下面我们列举一些不能在 D 内连续形变到 Γ 的环线.



图 4-32　单连通区域与多连通区域的例子

(a) 参数函数为 $z(t)=4+e^{2\pi i t}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的圆周不能形变到 Γ，因为形变过程中总会有圆周通过点 $z=0$（参见图 4-33）.

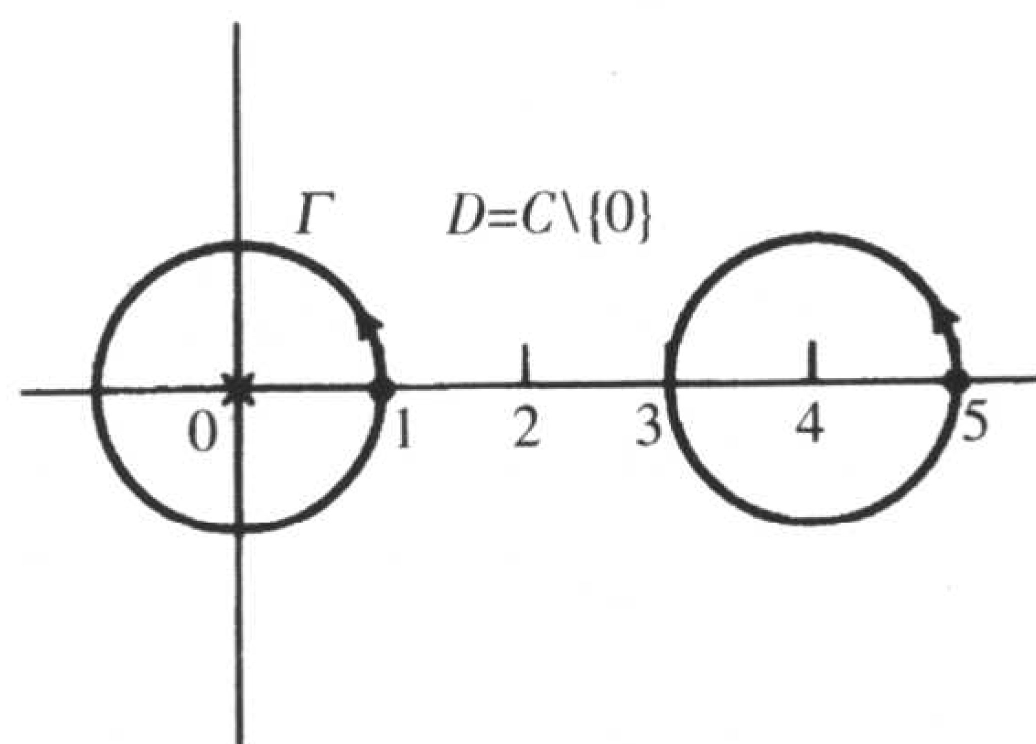


图 4-33　有孔平面上不可形变的环线

(b) Γ 不能收缩为 D 内的一点.［但(a)中的圆周可以做到.］

(c) Γ 不能连续形变为它的反向周线 $-\Gamma$.（读者应该尝试找一族联系 Γ 与 $-\Gamma$ 的环线，弄清楚孤立的原点阻止形变的原因.）

185

(d) Γ 不能形变为以正向绕单位圆周两周的周线.

这里我们想插上几句话安慰读者，大家可能正在为自己构造形变函数 $z(s, t)$ 的能力感到惴惴不安. 下面的定理 8 说明，实际上，只有连续形变的存在性才是重要的（至少对于解析函数理论来说是这样）. 因此，大多数情况下，我们可直接在直观上判断形变的存在性而不必证明.

下面叙述本节的主要定理.

定理 8（形变不变性定理）　*设 f 在包含环线 Γ_0 和 Γ_1 的区域 D 内解析. 若其中任一条环线在 D 内可以形变为另一条，则*

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

定理 8 的严格证明需要的知识已远远超出复分析的范围. 这里我们仅就 Γ_0 和 Γ_1 的形变函数 $z(s, t)$ 具有连续二阶偏导数的情形给出定理的一个非严格证明. 我们还要假定 $f'(z)$ 连续（注意到 f 解析仅要求 f' 存在）.

事实上不必要求 $f'(z)$ 连续，因为对此数学家古萨（Edouard Goursat）首先给出了证明，可参见参考文献 2. 将定理的受限制情形扩展到定理 8 的一般情形是受逼近论技巧的影响（参考文献 5）.

定理 8 非严格情形的证明　如前面所讲，假设形变函数 $z(s, t)(0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$ 具有连续的二阶偏导数，并且 $f'(z)$ 是连续的. 现在，对任意固定的 s，方程 $z=z(s, t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 定义了 D 内的一条环线 Γ_s. 设 $I(s)$ 为 f 沿 Γ_s 的积分，从而

$$I(s) := \int_{\Gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(z(s,t))\,\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

我们希望求出 $I(s)$ 关于 s 的导函数. 由假设，(1)中的被积函数关于 s 是连续可微的，所以由积分的莱布尼茨法则(见参考文献7)，可在积分号下求微分. 应用链式法则，得

$$\frac{\mathrm{d}I(s)}{\mathrm{d}s} = \int_0^1 \left[f'(z(s,t))\,\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + f(z(s,t))\,\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}\right]\mathrm{d}t. \tag{2}$$

另一方面，

186

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f(z(s,t))\,\frac{\partial z}{\partial s}\right] = f'(z(s,t))\,\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} + f(z(s,t))\,\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}.$$

由连续条件知，$z(s,\ t)$ 的混合偏导数相等，因此上述表达式与(2)中的被积函数相等. 这样，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I(s)}{\mathrm{d}s} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[f(z,(s,t))\,\frac{\partial z}{\partial s}\right]\mathrm{d}t \\ &= f(z(s,1))\,\frac{\partial z}{\partial s}(s,1) - f(z(s,0))\,\frac{\partial z}{\partial s}(s,0).\end{aligned}$$

但是，因为每条 Γ_s 都是闭的，所以对所有的 s，我们有 $z(s,\ 1)=z(s,\ 0)$，从而这些函数 $I(s)$ $(\forall s\in[0,\ 1])$ 的导函数都相等. 因此 $I(s)$ 是一个常数. 特别地，$I(0)=I(1)$，即

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$ ■

下面是定理8的一个简单推论，常称为柯西积分定理.

定理9 *若 f 在单连通区域 D 内解析，Γ 是 D 内的任意环线(闭周线)，则*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

证 证明很直接，在单连通区域内的任意环线都可收缩为一点，从而在一条收缩环线上连续函数的积分收敛到零. ■

应用拓扑方法可以证明：如果 Γ 是一条简单闭周线，f 在 Γ 内及 Γ 上的每一点都解析，则 f 一定在包含 Γ 的某个单连通区域内解析. 这样，由定理9，**只要被积函数"在 Γ 上及其内部"解析，它沿 Γ 的积分必为零**.

将柯西定理与上一节的内容和函数的解析性质联系起来，可以推出如下定理：

定理10 *在单连通区域内的解析函数有原函数，它的周线积分与路径无关，且沿环线的积分为零.*

在上一节我们证明了：若 C 是以 z_0 为心的任意圆周，n 为一整数，则

$$\oint_C (z-z_0)^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & n = -1 \end{cases} \tag{4}$$

187

(参见 4.2 节例 2). 在(4)式中取 $z_0=0$ 作为我们要讨论的例子. 当 n 为正整数或零时，z^n 在整个复平面上是解析的，复平面是单连通区域，由定理 10，z^n 有一个原函数$[z^{n+1}/(n+1)]$，且它沿环线的积分为 0.

当 n 为负数时，z^n 仅在不含原点的有孔平面内解析. 这个区域不是单连通的，所以不能再应用定理 10. 事实上，当 $n=-1$ 时，z^n 在有孔平面内甚至没有原函数(因为 $\log z$ 的任意分支在分支割线上是不连续的)，且它的环线积分(4)肯定不为零. 另一方面，当 $n\leqslant -2$ 时，z^n 在有孔平面内的原函数仍是$z^{n+1}/(n+1)$，它的环线积分(4)为 0. 这两种情况的每一种都能出现在多连通区域内.

形变不变性定理的主要价值在于计算积分时可以用我们熟悉的周线代替复杂的周线. 下面用几个例子来说明.

例 3 计算 $\int_\Gamma 1/z\mathrm{d}z$,其中 Γ 是沿椭圆 $x^2+4y^2=1$ 逆时针旋转一周的周线. 如图 4-34 所示.

解 被积函数 $1/z$ 在除去原点外的复平面内解析. 此外，Γ 可以不通过原点连续形变为单位圆周 Γ_0，且方向为正向. 因此，由形变不变性定理及公式(4)得

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_0}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}.$$ ■

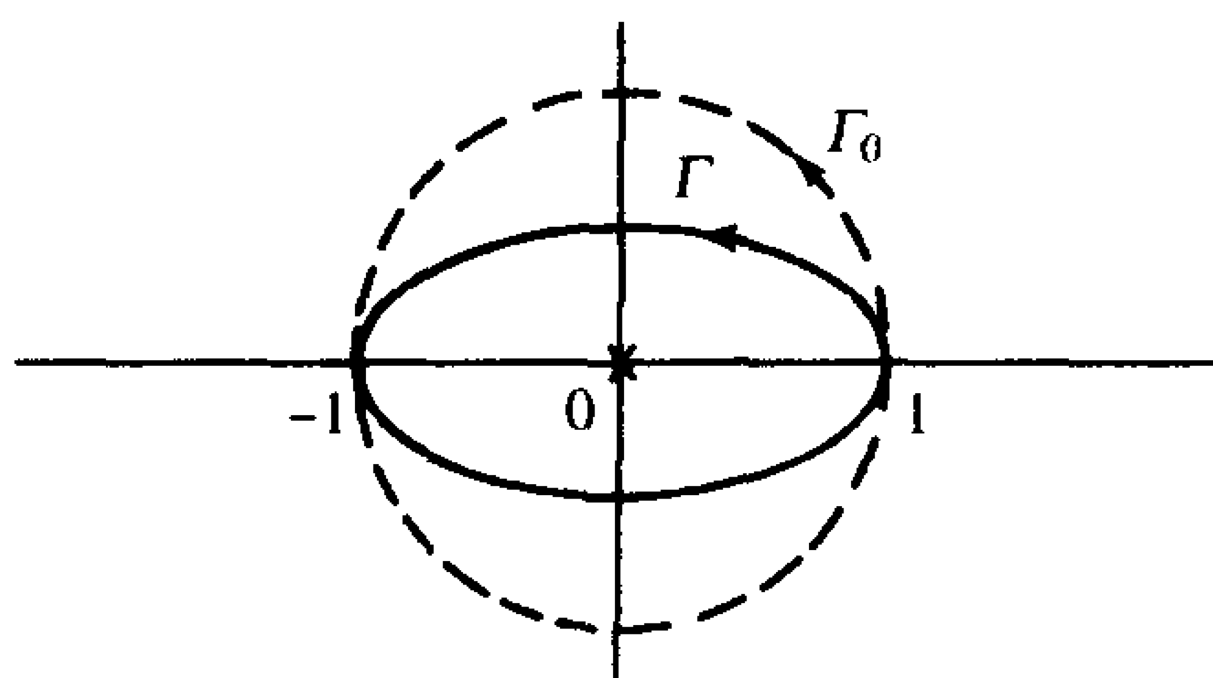


图 4-34 例 3 的周线

例 4 计算

188

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-9}\mathrm{d}z.$$

解 上式中的符号表示积分路径是绕圆周 $|z|=2$ 逆时针旋转一周的周线. 被积函数$\mathrm{e}^z/(z^2-9)$在除分母为零的点 $z=\pm 3$ 外都解析. 由图 4-35 可知周线可收缩为解析区域内的一点，从而积分为零. (这个例子也可以应用柯西定理.) ■

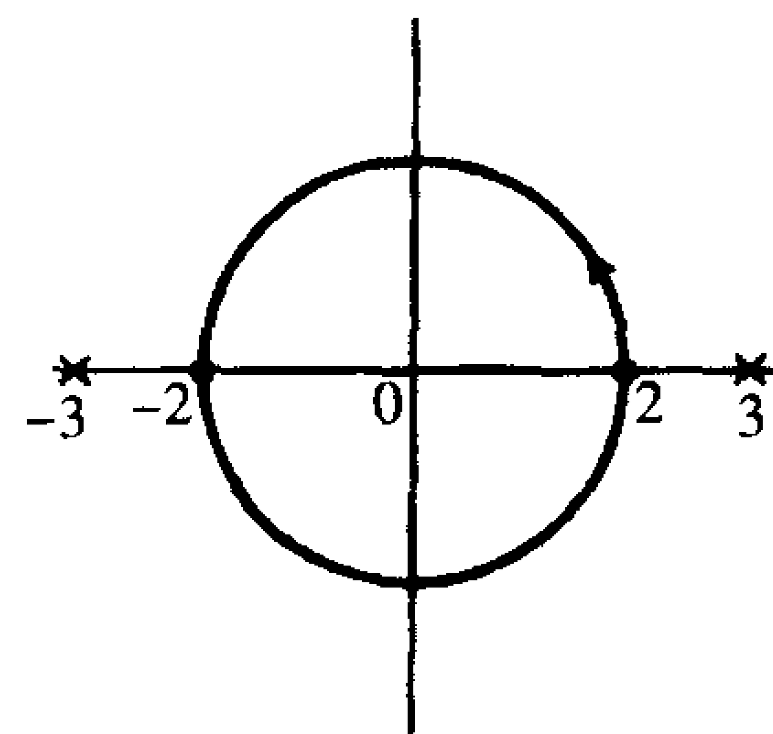


图 4-35 例 4 的周线

例 5 写出 $\int_\Gamma 1/(z-a)\mathrm{d}z$所有可能的值,其中 Γ 是以逆时针方向绕不通过点 $z=a$ 的任意圆一周的周线.

解 被积函数在由去掉点 $z=a$ 的复平面得到的区域 D 内是解析的. 如果 a 在 Γ 的外部，则 Γ 在 D 内可连续形变为一点，从而积分为零. 如果 a 在 Γ 的内部，Γ 在 D 内可连续形变为以 a 为心的正向旋转的圆周，这时由(4)式知积分为 $2\pi\mathrm{i}$. 综上所述，我们得到

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\begin{cases}0 & a\text{ 在 }\Gamma\text{ 外部},\\ 2\pi\mathrm{i} & a\text{ 在 }\Gamma\text{ 内部}.\end{cases} \tag{5}$$ ■

例 6 计算

$$\int_{\Gamma}(3z-2)/(z^{2}-z)\,dz,$$

其中 Γ 是如图 4-36 所示的简单闭周线.

189

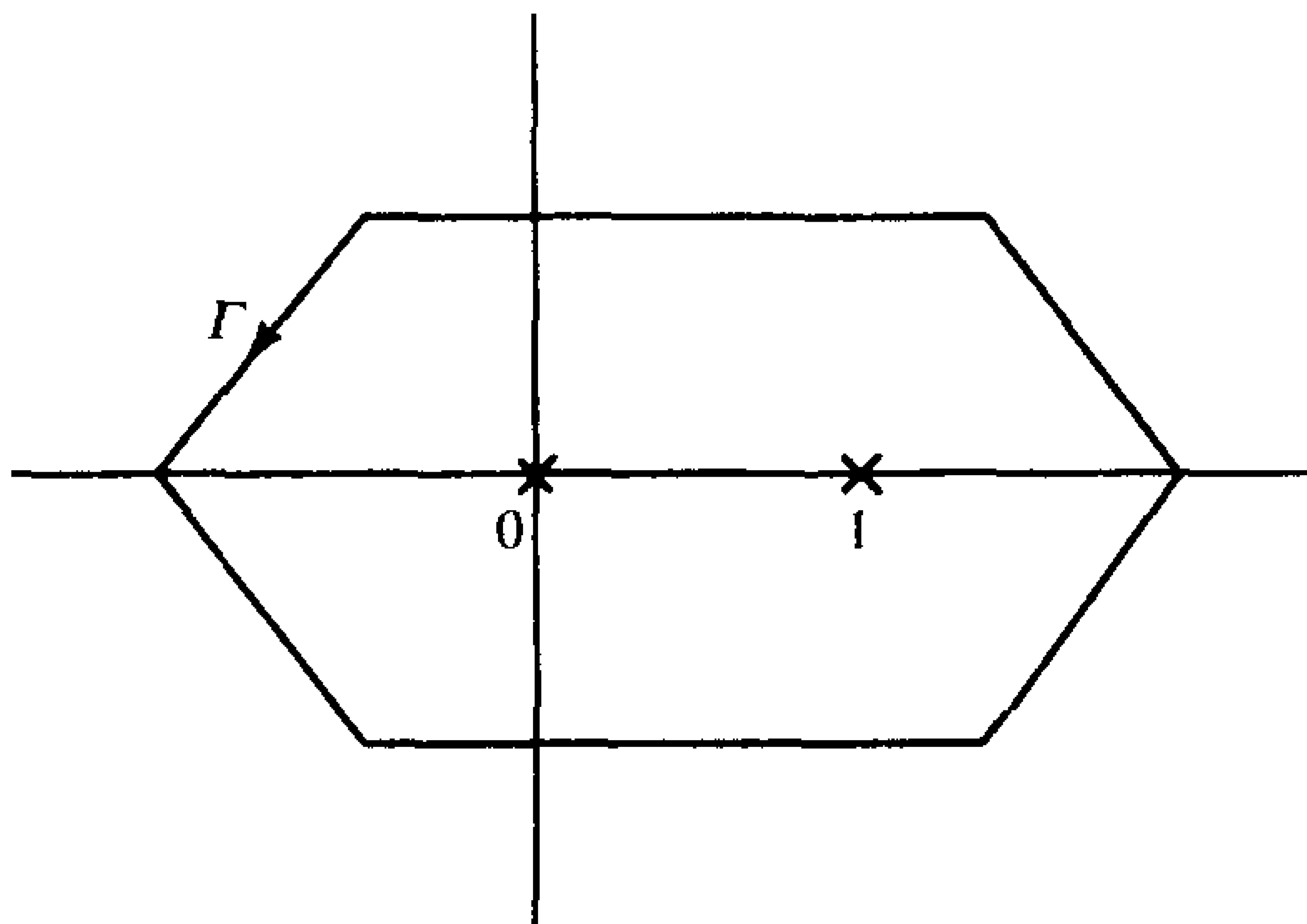


图 4-36 例 6 的周线

解 我们不必写出 Γ 的精确表达式，因为被积函数 $f(z)=(3z-2)/(z^{2}-z)$ 除去 $z=0$，$z=1$ 外是解析的. 这条周线可形变为如图 4-37 所示的"杠铃"形周线而不影响积分值. 通过观察可知沿水平线段积分两次，但方向相反，从而两个结果抵消了. 因此

$$\int_{\Gamma}f(z)\,dz=\int_{C_{0}}f(z)\,dz+\int_{C_{1}}f(z)\,dz,$$

其中圆 C_0，C_1 如图 4-37 所示.

我们将在 6.1 节介绍计算上述积分的方法. 现在由部分分式展开法将被积函数写为

$$\frac{3z-2}{z^{2}-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}. \qquad (6)$$

(6)式中的常数 A，B 可由 3.1 节公式(21)给出：

$$A=\lim_{z\to 0}z\frac{3z-2}{z^{2}-z}=2,\quad B=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^{2}-z}=1.$$

这样

$$\int_{\Gamma}\frac{3z-2}{z(z-1)}dz=\int_{C_{0}}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz+\int_{C_{1}}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz.$$

上式右端可看作是四个积分之和，它们都是例 5 类型的积分. 因此由(5)式，积分等于

$$2(2\pi i)+0+2\cdot 0+2\pi i=6\pi i.$$ ■

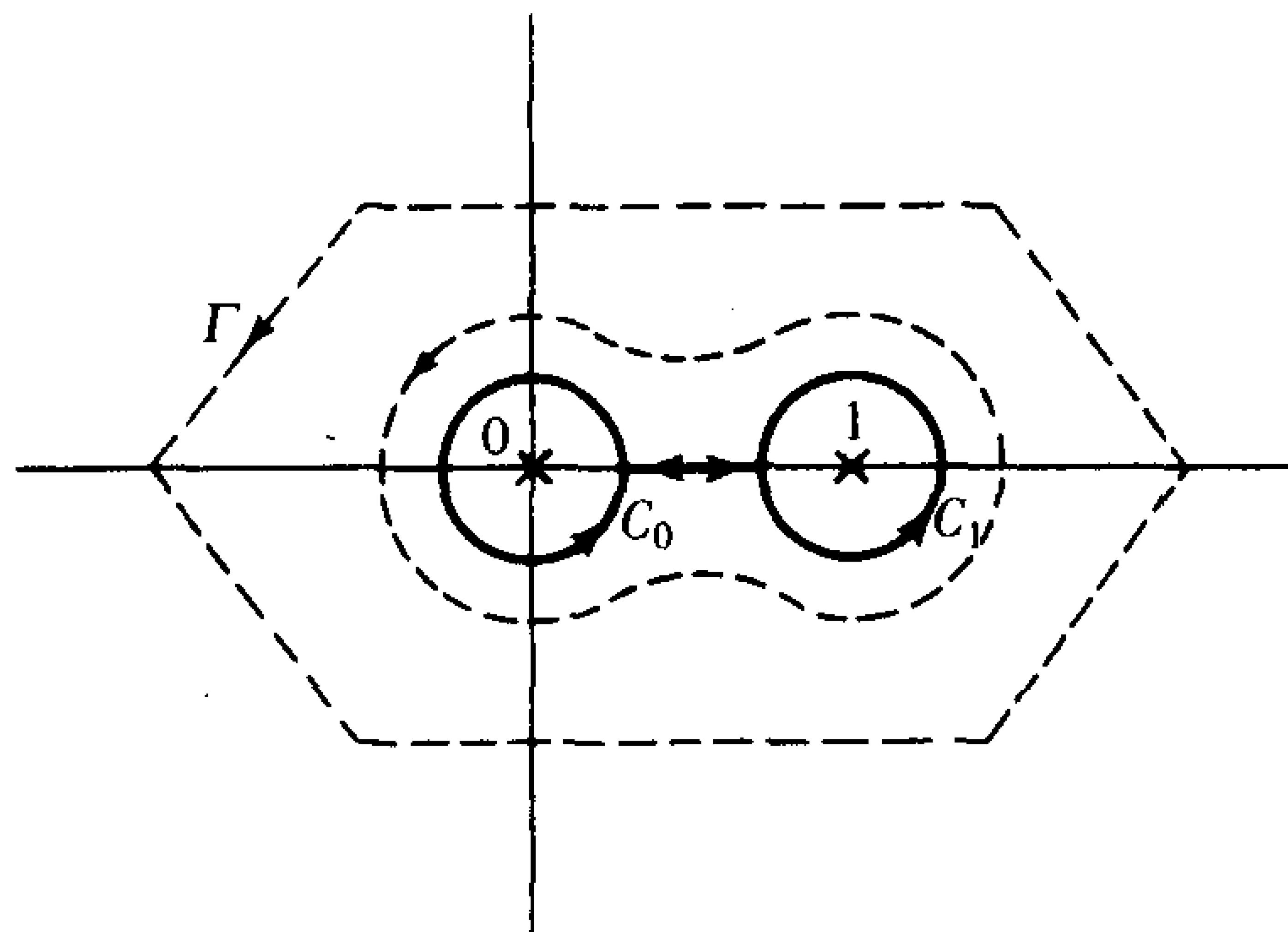


图 4-37 图 4-36 的周线的形变

190

例 7 计算 $\int_{\Gamma}1/(z^{2}-1)\,dz$，其中 Γ 如图 4-38 所示.

解 观察到 $1/(z^{2}-1)$ 只有两个不解析点 $z=\pm 1$，因此 Γ 可不通过这两点连续形变为一个绕 $z=-1$ 逆时针旋转的小圆周 C. 由部分分式展开得

$$\frac{1}{z^{2}-1}=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}.$$

因此

$$\int_{\Gamma}\frac{1}{z^{2}-1}dz=\int_{C}\left[\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}\right]dz,$$

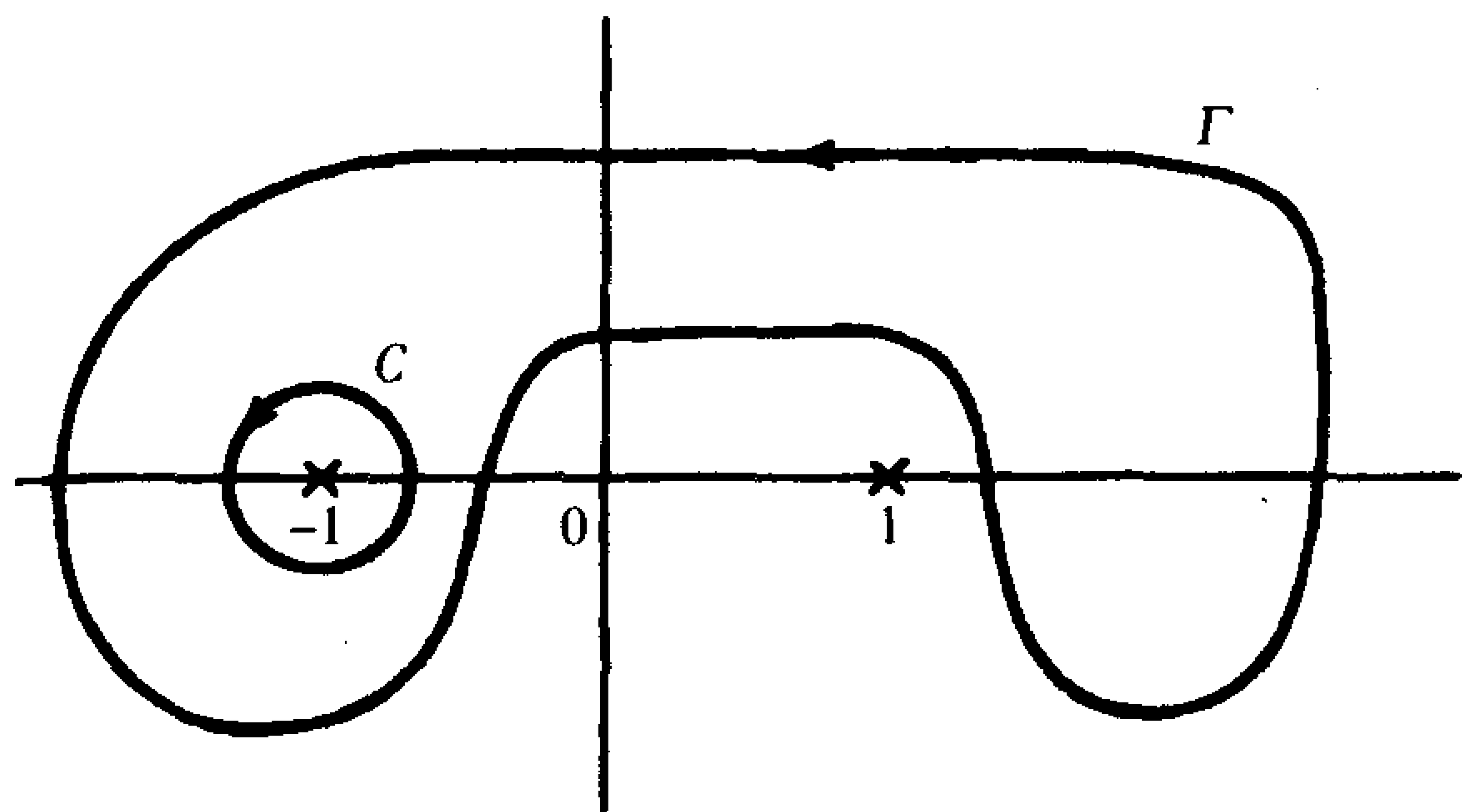


图 4-38 例 7 周线的形变

再应用例 5，它等于

$$\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}(2\pi \mathrm{i})=-\pi \mathrm{i}.$$

■

注：习题在 4.4b 节后.

4.4.2 向量分析法

在 4.3 节中我们证明了连续函数 $f(z)$ 在区域 D 内有一个(解析的)原函数当且仅当它沿 D 内任意环线的积分等于零. 现在我们研究这一性质与 $f(z)$ 的解析性之间的关系. 为此，要引用一些向量分析(参考文献 9)的概念和定理. 首先，我们说明 $f(z)$ 在周线 Γ 上积分的定义与线积分的向量概念有关.

设 $\mathbf{V}=(V_1, V_2)$ 是在平面上某区域 D 内每一点 (x, y) 都有定义的二维向量，即 $\mathbf{V}$ 是一个向量场

191

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}(x,y)=(V_1(x,y),V_2(x,y)).$$

我们要求 $V_1(x, y)$ 和 $V_2(x, y)$ 是连续函数. 进一步假定 D 内的(有向)周线 Γ 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b). \tag{7}$$

则 $\mathbf{V}$ 沿 Γ 的线积分用记号

$$\int_\Gamma (V_1\mathrm{d}x+V_2\mathrm{d}y)$$

来表示，定义为

$$\int_\Gamma (V_1\mathrm{d}x+V_2\mathrm{d}y):=\int_a^b\left[V_1(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+V_2(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t.$$

物理系的学生可将上式理解为力 $\mathbf{V}(x, y)$ 使物体沿周线 Γ 移动时所做的功.

为得到线积分与复积分的关系，我们利用参数方程(7)，将 $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ 写为实部与虚部之和的形式. 注意到 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z&=\int_a^b f(z(t))\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\&=\int_a^b[u(x(t),y(t))+\mathrm{i}v(x(t),y(t))]\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b\left[u(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-v(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&\quad+\mathrm{i}\int_a^b\left[v(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+u(x(t),y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t;\end{aligned}$$

即

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\Gamma(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_\Gamma(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y). \tag{8}$$

由上式看出$\int_\Gamma f(z)\,dz$的实部等于向量场$(u,-v)$沿Γ的线积分,虚部等于向量场(v,u)沿Γ的线积分[㊀].

既然复积分可由线积分来表示，向量分析的许多定理就可以转移到复分析中. 在这个思路下，习题6、7和8将引导读者重新去证明一些早期的定理. 下面我们证明格林定理在复积分中的一个推论.

为了应用格林定理，先介绍一个新的几何概念——单连通区域. 粗略地说，如果一个区域没有洞，即它是一条简单闭周线的内部(回忆若尔当曲线定理)，则称其为单连通的. 下面的定义7提供了一种判断单连通区域的方法.

192

定义7[㊁] 具有以下性质的区域称为**单连通区域**(a simply connected domain)：如果Γ是D内的任意一条简单闭周线，则Γ的内部也完全含在D内. (参见图4-39.)



图4-39 单连通区域与多连通区域

下面给出格林定理的一种叙述(参考文献[8]).

定理11 设$\mathbf{V}=(V_1,V_2)$是定义在单连通区域D内连续可微[㊂]的向量场，Γ是D内一条正向简单闭周线，则$\mathbf{V}$沿Γ的线积分等于$(\partial V_2/\partial x-\partial V_1/\partial y)$在$\Gamma$的内部区域$D'$上的积分，即

$$\int_\Gamma (V_1\,dx+V_2\,dy)=\iint_{D'}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

将定理11应用到线积分$\int_\Gamma f(z)\,dz$. 利用(8)式,我们有

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_\Gamma (u\,dx-v\,dy)+i\int_\Gamma (v\,dx+u\,dy)$$
$$=\iint_{D'}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_{D'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (9)$$

注意到已经假设u，v是连续可微的.

㊀ 观察到向量$(u,-v)$对应复数$u-iv=\bar{f}$，(v,u)对应$i\bar{f}$.

㊁ 定义7与定义6等价.

㊂ 这意味着偏微分$\partial V_1/\partial x$，$\partial V_1/\partial y$，$\partial V_2/\partial x$，$\partial V_2/\partial y$存在且连续.

现在我们作进一步讨论. 若$f(z)$在D内解析，则由柯西-黎曼方程知(9)式中的两个积分
193 都为0! 换句话说，我们已经证明了若函数在一个单连通区域内解析且导函数$f'(z)$连续(回想解析只说明f'存在)，则它沿此区域内任意简单闭周线的积分等于零. 这个结果的更一般的形式即是著名的柯西积分定理.

定理 12[1] 若函数f在单连通区域D内解析，Γ是D上任意环线(闭周线)，则

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

可见定理12在两处进行了推广. 第一，只要求Γ是一条环线，而不必是简单闭曲线. 从几何上的一个显然事实可知，沿一条环线的积分总是可以分解为沿几条简单闭曲线的积分，参见图4-40.

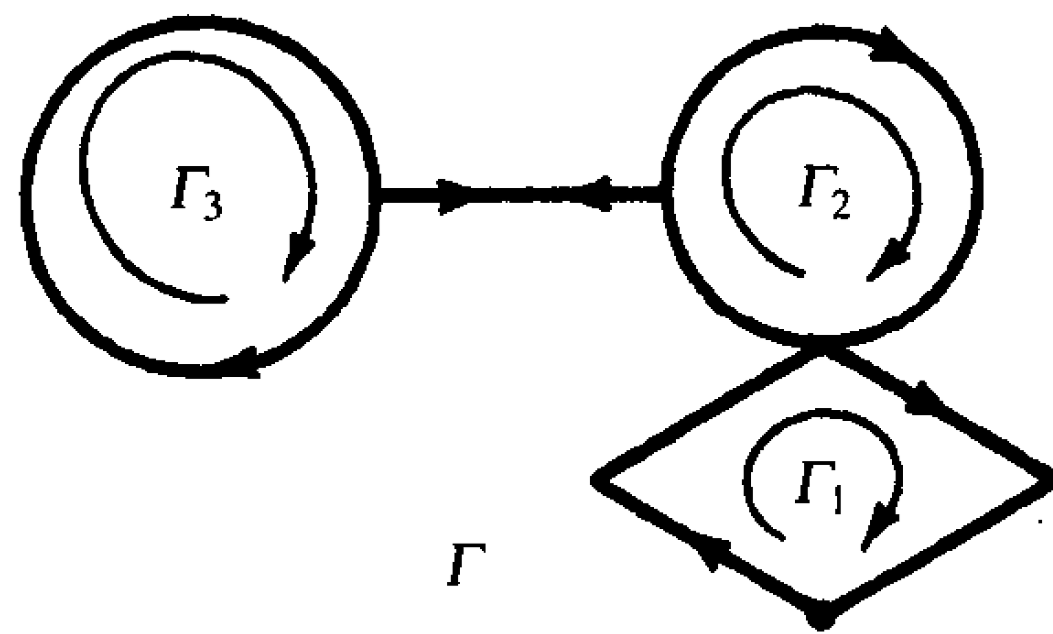


图 4-40 环线的分解

第二，去掉了$f'(z)$连续的假设条件. 数学家古萨(Edouard Goursat)首先作出了证明. 参见参考文献2.

我们注意到，用拓扑方法可以证明：如果Γ是一条简单闭周线，f在Γ上及其内部解析，则f一定在包含Γ的某个单连通区域内解析. 因此，由定理12，**只要被积函数在Γ上及其内部解析，则它沿Γ的积分必为零**.

柯西定理将4.3节的内容与f的解析性联系起来了. 结合定理7和定理12，立即有下述定理.

194 **定理 13**[2] 单连通区域内的解析函数f有原函数，f的周线积分与路径无关，且沿环线的积分为零.

在上一节中我们证明了：如果C是以z_0为心的圆周，n为一整数，则

$$\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \tag{10}$$

(参见4.2节例2). (10)式中令$z_0=0$作为我们要讨论的一个例子. 当n为正整数或零时，z^n在整个复平面上是解析的，复平面是单连通区域，应用定理13，z^n有一个原函数$[z^{n+1}/(n+1)]$，且它的环线积分为0.

当n为负整数时，z^n在不含原点的有孔平面内解析. 这个区域不是单连通的，所以不能再应用定理13. 事实上，当$n=-1$时，z^n在有孔平面内甚至没有原函数(因为$\log z$的任意分支在分支割线上是不连续的)，它的环线积分也一定不为零. 另一方面，当$n\leq -2$时，z^n在有孔平面内仍有原函数$z^{n+1}/(n+1)$，它的环线积分(10)为0. 这两种情况中的每一种都能出现在非单连通区域内(这样的区域称为多连通区域).

---

[1] 定理12与定理9等价.

[2] 定理13与定理10等价.

例 1　计算

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-9}dz.$$

解　上式中的符号表示积分路径是绕圆周 $|z|=2$ 逆时针旋转一圈的周线. 被积函数 $e^z/(z^2-9)$ 在除分母为零的点 $z=\pm 3$ 外都解析. 因为这两个点都在周线的外部，由柯西积分定理，该积分等于零. ■

定理 12 和定理 13 常常能用来改变积分周线，下例说明了这一点.

例 2　计算 $\int_\Gamma 1/z\,dz$,其中 Γ 是绕椭圆 $x^2+4y^2=1$ 逆时针旋转一周的周线,如图 4-41a 所示.

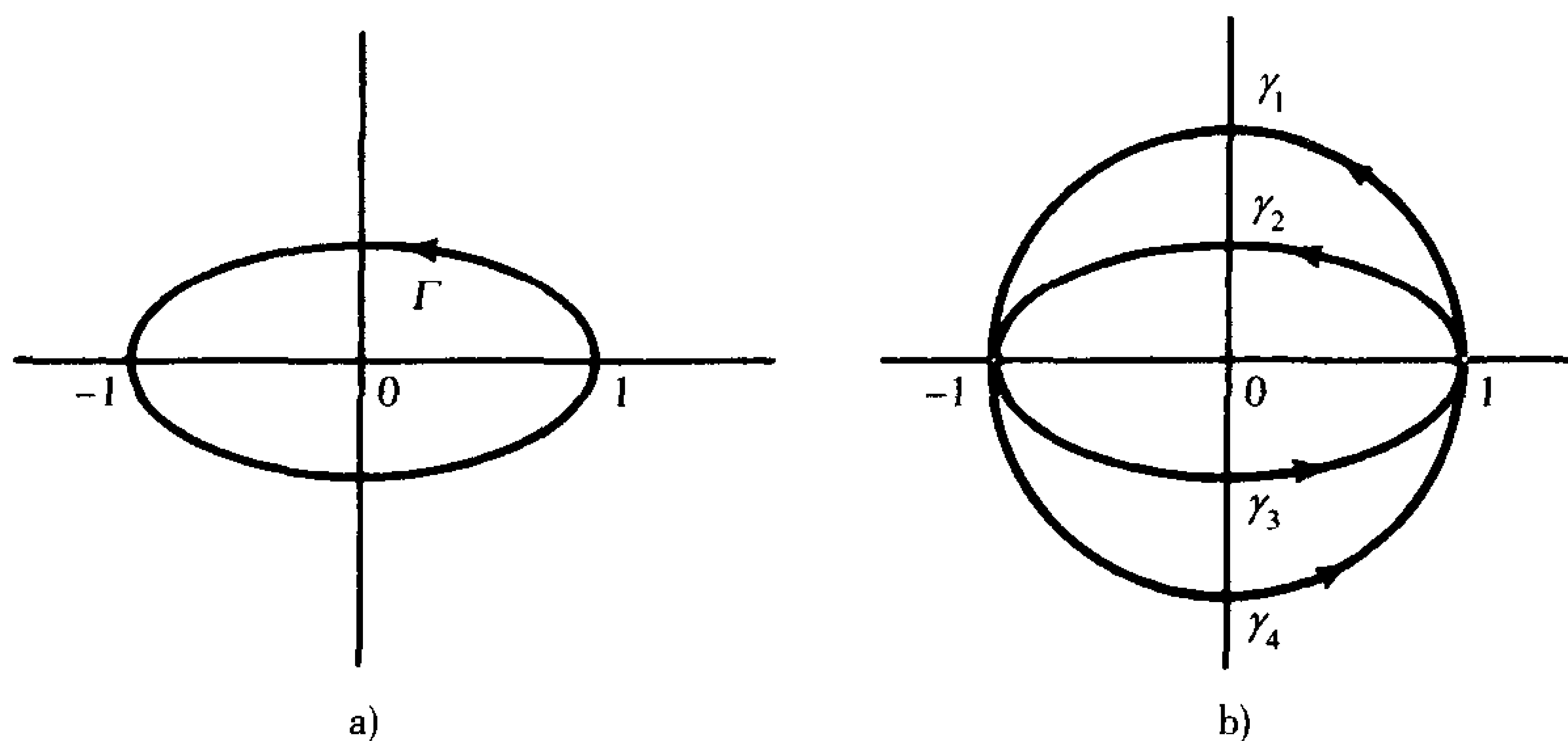


图 4-41　例 2 的周线

解　我们将证明：若把周线 Γ 换为正向单位圆周，则积分值不变. 参见图 4-41b，在复平面上，从原点起割开负 y 轴，形成了一个单连通区域，函数 $1/z$ 在这个区域内解析. 因此由定理 13，

$$\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz.$$

同理，沿正 y 轴割开复平面，得到

$$\int_{\gamma_3}\frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_4}\frac{1}{z}dz.$$

195

因此

$$\int_\Gamma\frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_2+\gamma_3}\frac{1}{z}dz=\int_{\gamma_1+\gamma_4}\frac{1}{z}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{z}dz.$$

由(10)式知它的积分值为 $2\pi i$. ■

下面的例子也用到了这种技巧.

例 3　写出$\int_\Gamma 1/(z-a)\,dz$ 所有可能的值,其中 Γ 是以逆时针方向绕任意不通过点 $z=a$ 的简单闭周线.

解 注意到被积函数在除去 $z=a$ 外的任意点都解析. 从而，如果 a 在 Γ 的外部，由柯西积分定理知其积分为 0. 如果 a 在 Γ 的内部，选择以 a 为圆心的小圆周 C_r 并使之含在 Γ 的内部. 在 Γ 与 C_r 之间作两条线段，如图 4-42 所示. 线段的端点 P_1 和 P_2 将 Γ 分成了两条周线 Γ_1 和 Γ_2，端点 P_3，P_4 将 C_r 分成了 γ_1，γ_2 两部分. 注意到周线 Γ_1 和由有向线段 P_1P_3，γ_1 及有向线段 P_4P_2 所组成的复周线围成一个不包含 a 点的单连通区域. 这样由定理 13 得

图 4-42 例 3 的周线

196

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\left(\int_{P_1P_3}+\int_{\gamma_1}+\int_{P_4P_2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

同理，

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\left(\int_{P_2P_4}+\int_{\gamma_2}+\int_{P_3P_1}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}.$$

将两式相加，消去沿线段上的积分，得

$$\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\oint_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi\mathrm{i}$$

(回忆公式(10)).

综上所述，我们有

$$\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\begin{cases}0 & a\text{ 在 }\Gamma\text{ 外部},\\ 2\pi\mathrm{i} & a\text{ 在 }\Gamma\text{ 内部}.\end{cases} \tag{11}$$

■

例 4 计算 $\int_{\Gamma}(3z-2)/(z^2-z)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是如图 4-43a 所示的简单闭周线.

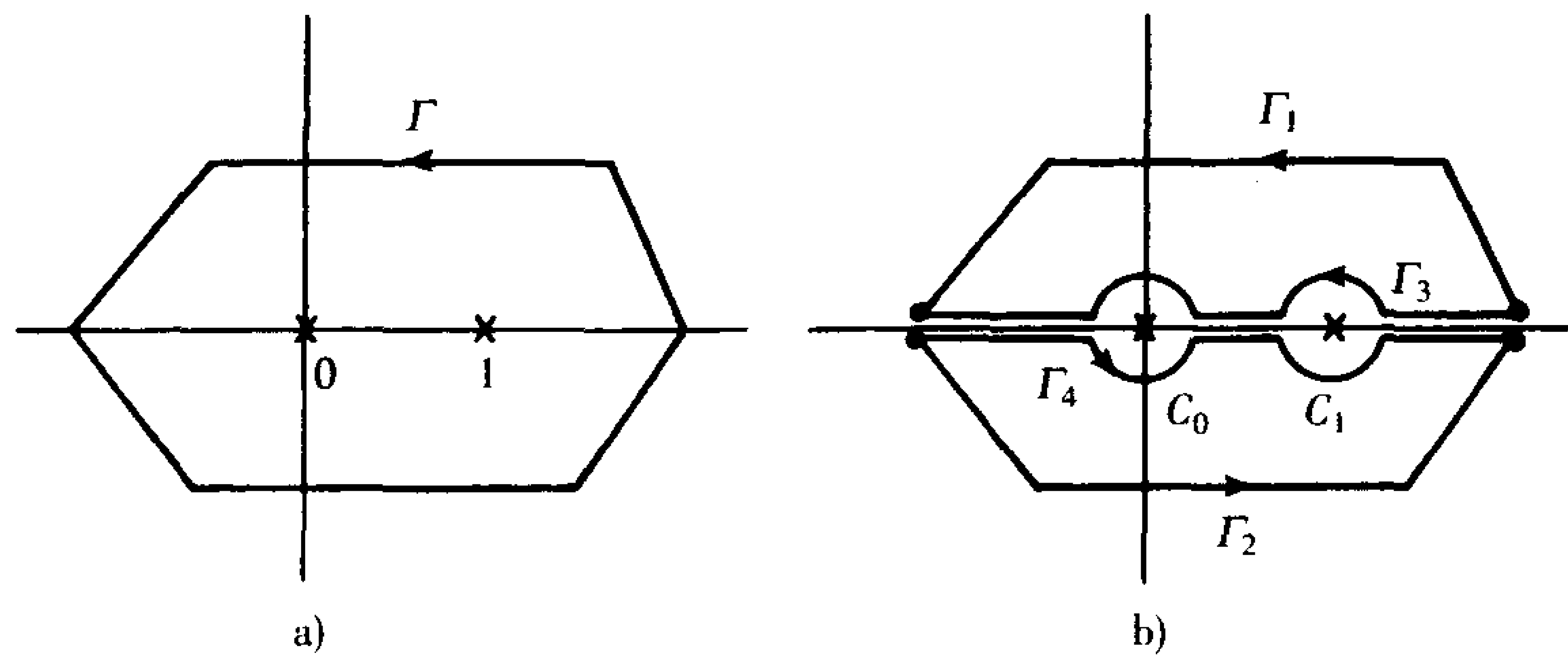


图 4-43 例 4 的周线

解 被积函数 $f(z)=(3z-2)/(z^2-z)$ 在复平面上除分母为零的点 $z=0$ 和 $z=1$ 外都解析. 如图 4-43b 所示，将这两点分别用小圆周 C_0，C_1 围住. 由定理 13，沿周线 Γ 的上半部分 Γ_1 的积分等于沿周线 Γ_3 的积分. 同理，沿 Γ_2 的积分能被沿 Γ_4 的积分来替换. 由这些事实并消去沿实轴线段上的积分，我们得到 [197]

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}\right)f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{C_0}f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}z.$$

我们将在 6.1 节中介绍计算上述积分的有效方法. 现在由部分分式展开法将被积函数写为

$$\frac{3z-2}{z^2-z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}. \tag{12}$$

(12)式中的常数 A，B 由 3.1 节的公式(21)确定：

$$A=\lim_{z\to 0}z\frac{3z-2}{z^2-z}=2,\quad B=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2-z}=1.$$

这样

$$\int_{\Gamma}\frac{3z-2}{z(z-1)}\mathrm{d}z=\oint_{C_0}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z.$$

上式右端可看作四个积分之和，它们都是例 3 类型的积分. 因此由公式(11)，积分等于

$$2(2\pi i)+0+2\cdot 0+2\pi i=6\pi i.$$ ■

例 5 计算 $\int_{\Gamma}1/(z^2-1)\,\mathrm{d}z$,其中 Γ 如图 4-44a 所示.

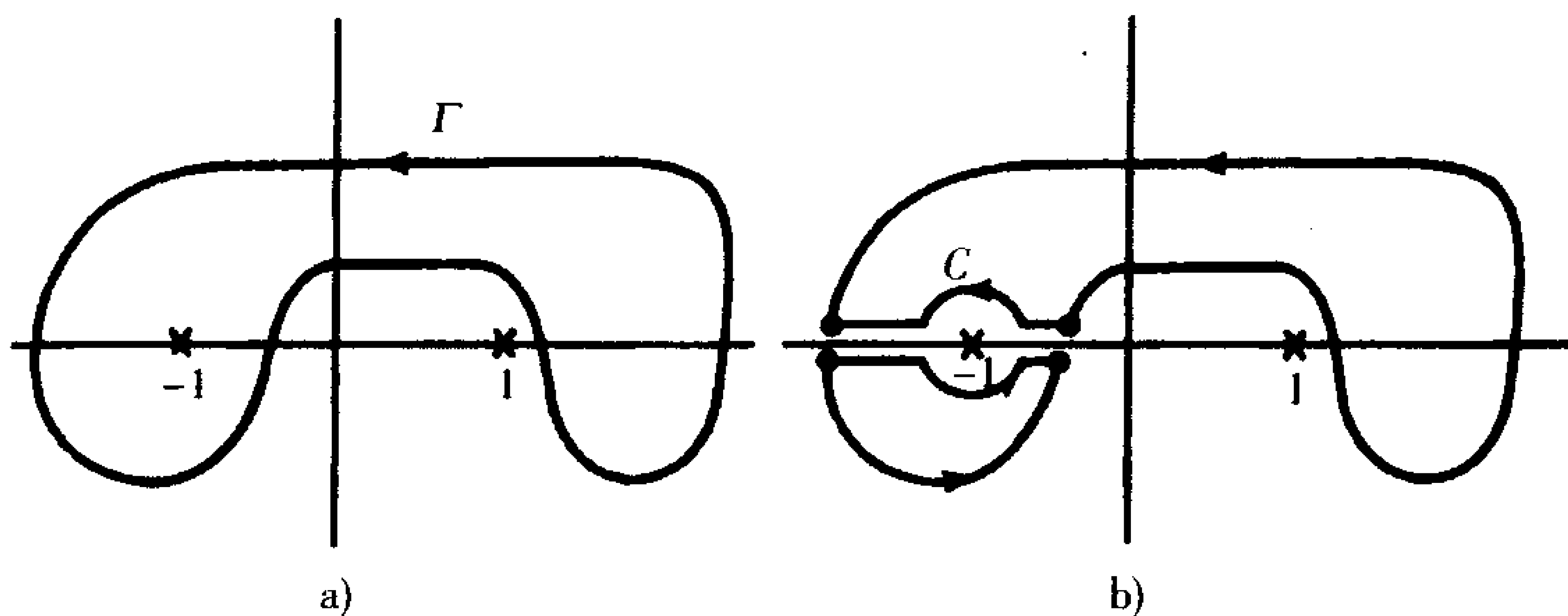


图 4-44 例 5 的周线

解 注意到$1/(z^2-1)$仅在 $z=\pm 1$ 处不解析. 由图4-44b 所示的周线，我们可以证明沿 Γ 的积分等于沿以 -1 为心的小圆 C 的积分. 再由部分分式得 [198]

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}.$$

因此

$$\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{C}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-1}=\int_{C}\left[\frac{1}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}\right]\mathrm{d}z,$$

又由例 3，所求积分等于$\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}(2\pi i)=-\pi i.$ ■

练习 4.4

习题 1 ~ 5 适用于 4.4a 节.

1. 设 D 为复平面去掉三点 0，2i，4 的区域，Γ 为图 4-45 所示的周线（实线）. 判断下列周线能否在 D 内连续形变为 Γ.

   (a) 图 4-45 所示的虚线周线 Γ_0.

   (b) 以正向绕圆周 $|z|=3$ 旋转一周的周线，起点为 $z=3$.

   (c) 以正向绕圆周 $|z|=10^4$ 旋转一周的周线，起点为 $z=10^4$.

   199

   (d) 以正向绕圆周 $|z-2|=1$ 旋转一周的周线，起点为 $z=3$.

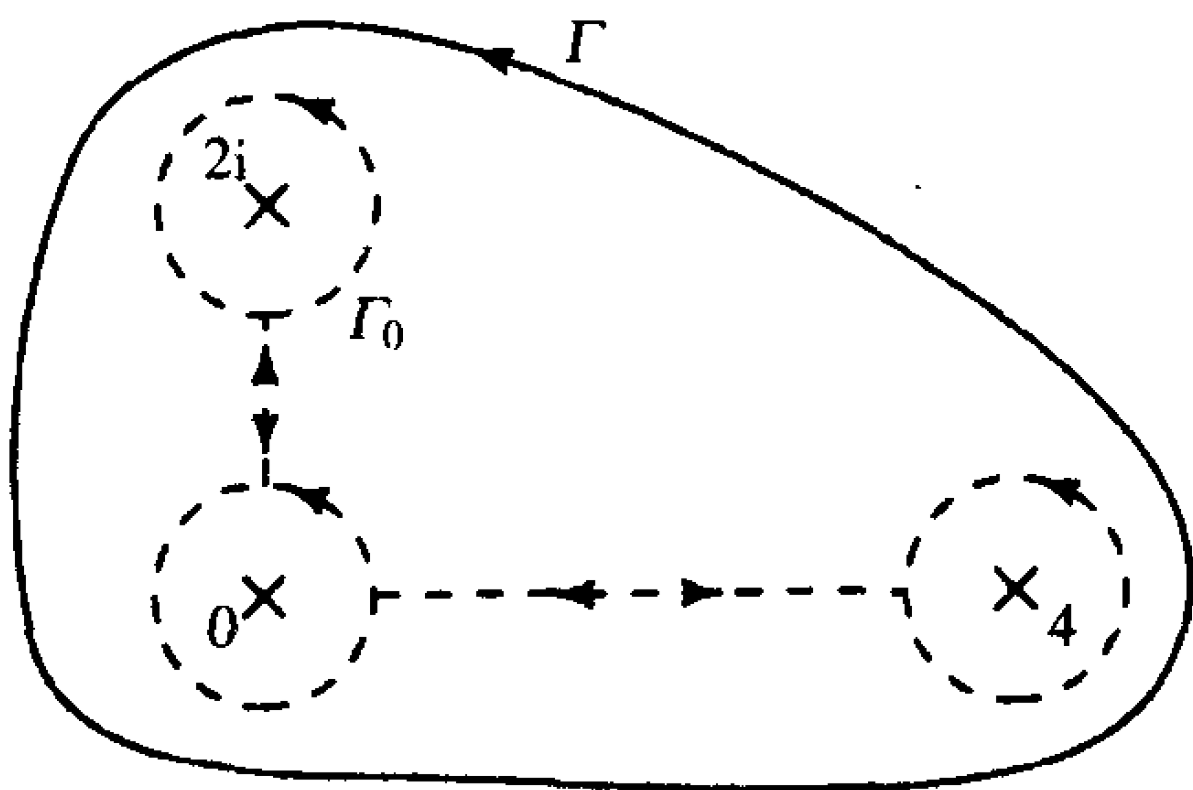


图 4-45　习题 1 的周线

2. 证明课文中的一个结论：如果周线 Γ_0，Γ_1 在区域 D 内都可收缩形变为一点，则在 D 内 Γ_0 可以连续形变到 Γ_1.（Γ_0，Γ_1 不一定收缩为同一个点）.

3. 设 D 为圆环 $1<|z|<5$，Γ 是以正向绕圆周 $|z-3|=1$ 旋转一周的周线，起点为 $z=4$. 判断下列周线能否在 D 内连续形变为 Γ.

   (a) 以正向绕圆周 $|z-3|=1$ 旋转一周的周线，起点为 $z=2$.

   (b) 点 $z=3i$.

   (c) 以正向绕圆周 $|z|=2$ 旋转一周的周线，起点为 $z=2$.

   (d) 以正向绕圆周 $|z+3|=1$ 旋转一周的周线，起点为 $z=-2$.

   (e) 以负向绕圆周 $|z-3|=1$ 旋转两周的周线，起点为 $z=4$.

4. 设 Γ_0 是以 $z=1$ 为起点逆时针绕单位圆周 $|z|=1$ 旋转一周后再顺时针旋转一周的周线. 求使 Γ_0 在包含单位圆的任意区域 D 内形变为单点 $z=1$ 的形变函数 $z(s,t)$. 证明对这两条周线定理 8 的结论成立.

5. 写出区域 D 内 Γ_0 到 Γ_1 的形变函数 $z(s,t)$，其中 Γ_0 是以 (2，0) 为起点逆时针绕椭圆 $x^2/4+y^2/9=1$ 旋转一周的周线，Γ_1 是以 $z=(1,0)$ 为起点逆时针绕单位圆周 $|z|=1$ 旋转一周的周线，区域 D 为圆环 $1/2<|z|<4$. [提示：设 Γ_0 的参数化函数为 $x(t)=2\cos 2\pi t$，$y(t)=3\sin 2\pi t$，$0\leqslant t\leqslant 1$.]

习题 6 ~ 8 适用于 4.4b 节.

6. 由位势理论知：若向量场 $\mathbf{V}(x,y)$ 的线积分与路径无关（即 $\mathbf{V}$ 是"守恒"场），则存在一个位置标量函数 $\phi(x,y)$ 使得 $V_1=\partial\phi/\partial x$ 和 $V_2=\partial\phi/\partial y$（这时称 ϕ 为 $\mathbf{V}$ 的位势）. 将上述结论应用到向量场 $\overline{f(z)}$ 和 $i\,\overline{f(z)}$ 以证明定理 7 中的性质 (iii) 蕴涵性质 (i).（解析的）原函数 $F(z)$ 与位势之间有什么关系？

7. 向量分析中向量场 $\mathbf{V}=(V_1,V_2)$ 称为无旋形的，如果它的分量满足

$$\frac{\partial V_1}{\partial y}=\frac{\partial V_2}{\partial x};$$

   它称为螺线形的，如果它的分量满足

200

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}=-\frac{\partial V_2}{\partial y}.$$

   (a) 证明：如果 $f(z)$ 是解析函数，则 $\overline{f(z)}$ 所对应的向量场既是无旋形的也是螺线形的.

(b)假设向量场是连续可微的，证明(a)的逆命题也成立.

8. 位势理论的一个重要结果是：如果单连通区域 D 内的向量场 **V** 是无旋形的(参见习题7)，则在 D 内存在 $\boldsymbol{V}(x, y)$ 的位势函数. 将这个事实应用到 $\overline{f(z)}$ 和 $\mathrm{i}\overline{f(z)}$，证明定理13的第一个论断.

习题9～19适用于4.4a节及4.4b节.

9. 下面哪些区域是单连通的？

(a)水平带形 $|\operatorname{Im} z|<1$.

(b)环域 $1<|z|<2$.

(c)复平面上除去非负 x 轴的点集.

(d)椭圆 $4x^2+y^2=1$ 的内部.

(e)椭圆 $4x^2+y^2=1$ 的外部.

(f)如图4-46所示的区域 D.

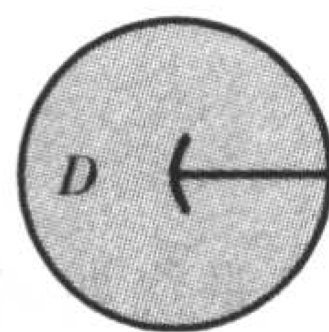


图4-46 D 是单连通的吗

10. 确定下列函数的解析区域并说明

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

的原因.

(a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+25}$ (b) $f(z)=\mathrm{e}^{-z}(2z+1)$ (c) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2-6z+10}$

(d) $f(z)=\operatorname{Log}(z+3)$ (e) $f(z)=\sec\left(\dfrac{z}{2}\right)$

11. 解释函数 e^{z^2} 在整个复平面上有原函数的原因.

12. 设 D 是一个含有闭周线 Γ 的区域，z_0 是不在 D 内的点，且 $\int_\Gamma (z-z_0)^{-1}\mathrm{d}z\neq 0$，试解释 D 不是单连通区域的原因.

201

13. 计算 $\int 1/(z^2+1)\,\mathrm{d}z$，它的积分路径分别沿如图4-47所示的周线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

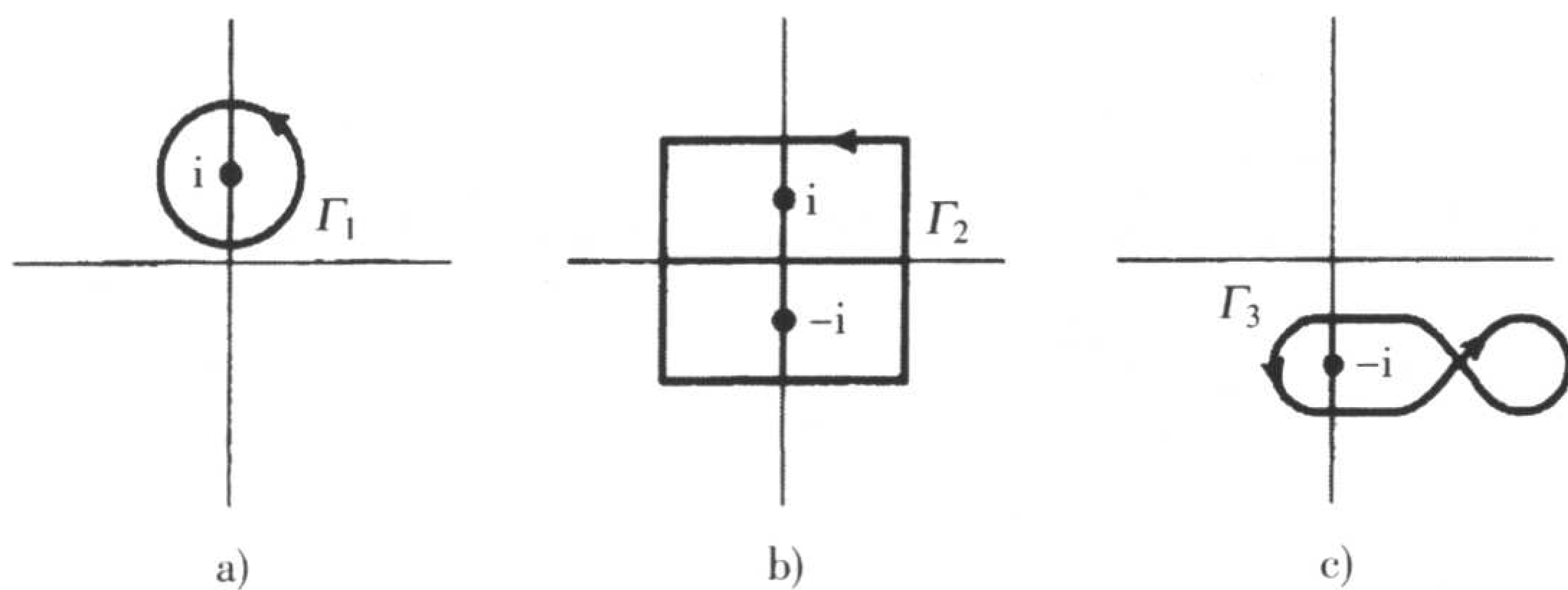


图4-47 习题13的周线

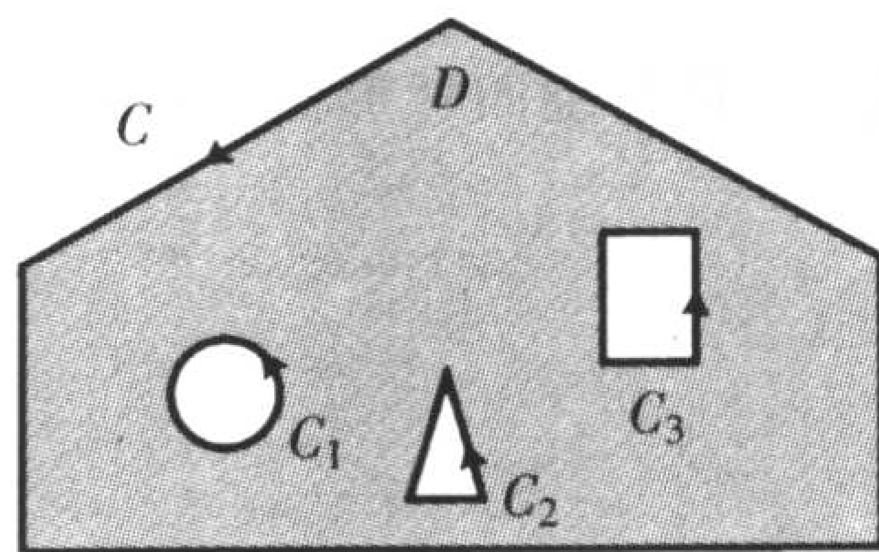


图4-48 习题14的周线

14. 考虑图4-48中由正向简单闭周线 C，C_1，C_2 和 C_3 围成的阴影区域. 设 $f(z)$ 在区域 D 及其边界上解析，解释

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z$$

的原因.

15. 计算

$$\int_\Gamma \frac{z}{(z+2)(z-1)}\mathrm{d}z,$$

其中 Γ 为以顺时针方向绕 $|z|=4$ 旋转两周的周线.

16. 证明：若 f 有以下形式：

$$f(z)=\frac{A_k}{z^k}+\frac{A_{k-1}}{z^{k-1}}+\cdots+\frac{A_1}{z}+g(z)\quad(k\geqslant 1),$$

其中 g 在 $|z|=1$ 的边界及内部解析，则

202

$$\oint_{|z|=1}f(z)\,dz=2\pi iA_1.$$

17. 计算

$$\int_\Gamma\frac{2z^2-z+1}{(z-1)^2(z+1)}dz,$$

其中 Γ 是绕如图 4-49 所示的 8 字形旋转一周的周线. [提示：利用部分分式展开式 $\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{C}{(z+1)}$，参见 3.1 节.]

18. 设

$$I:=\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2(z-1)^3}.$$

下面是证明 $I=0$ 的步骤. 验证每一步都是正确的.

(a) 对任意 $R>2$，有 $I=I(R)$，其中

$$I(R):=\oint_{|z|=R}\frac{1}{z^2(z-1)^3}dz.$$

(b) 对于 $R>2$，有 $|I(R)|\leqslant\frac{2\pi}{R(R-1)^3}$.

(c) $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$.

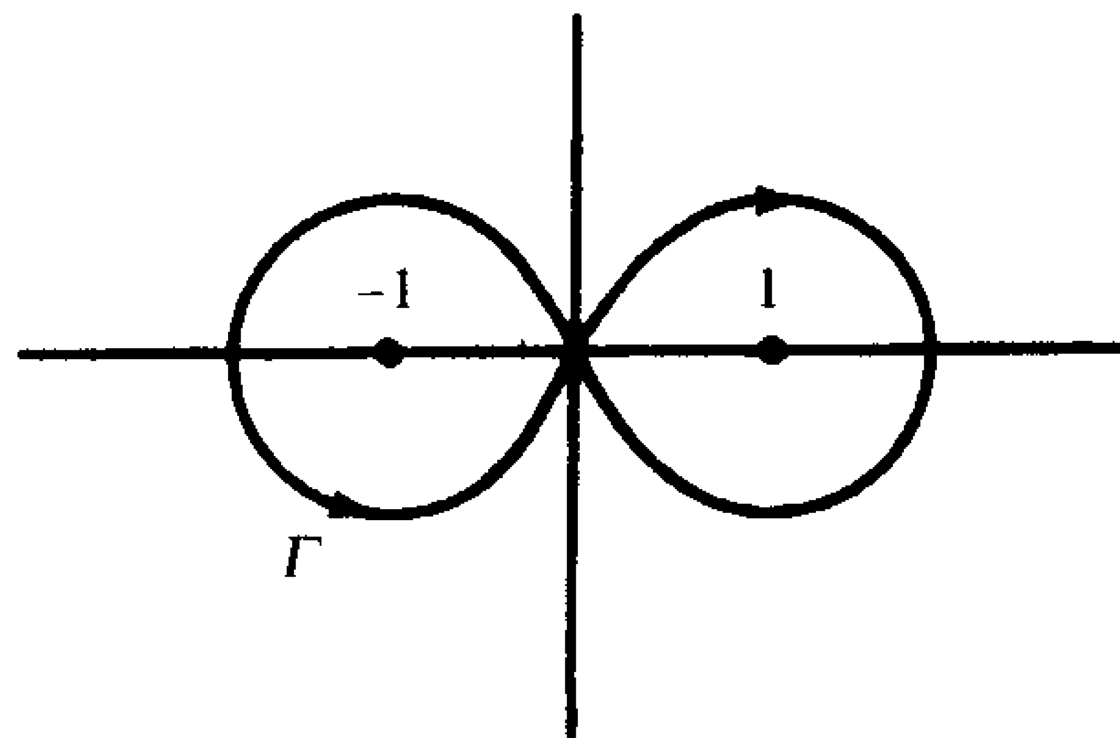
(d) $I=0$.

19. 应用习题 18 的证明方法建立如下定理：设 P 是一个关于 z 的次数至少为 2 的多项式，其零点都在圆 $|z|=r$ 内，则

$$\oint_{|z|=r}\frac{1}{P(z)}dz=0.$$

20. 设 Γ 为绕四叶形曲线(如图 4-50 所示)一周的周线，分别应用部分分式展开法和习题 19 的结论证明

$$\int_\Gamma\frac{1}{z^4-1}dz=0.$$



203

图 4-49　习题 17 的周线

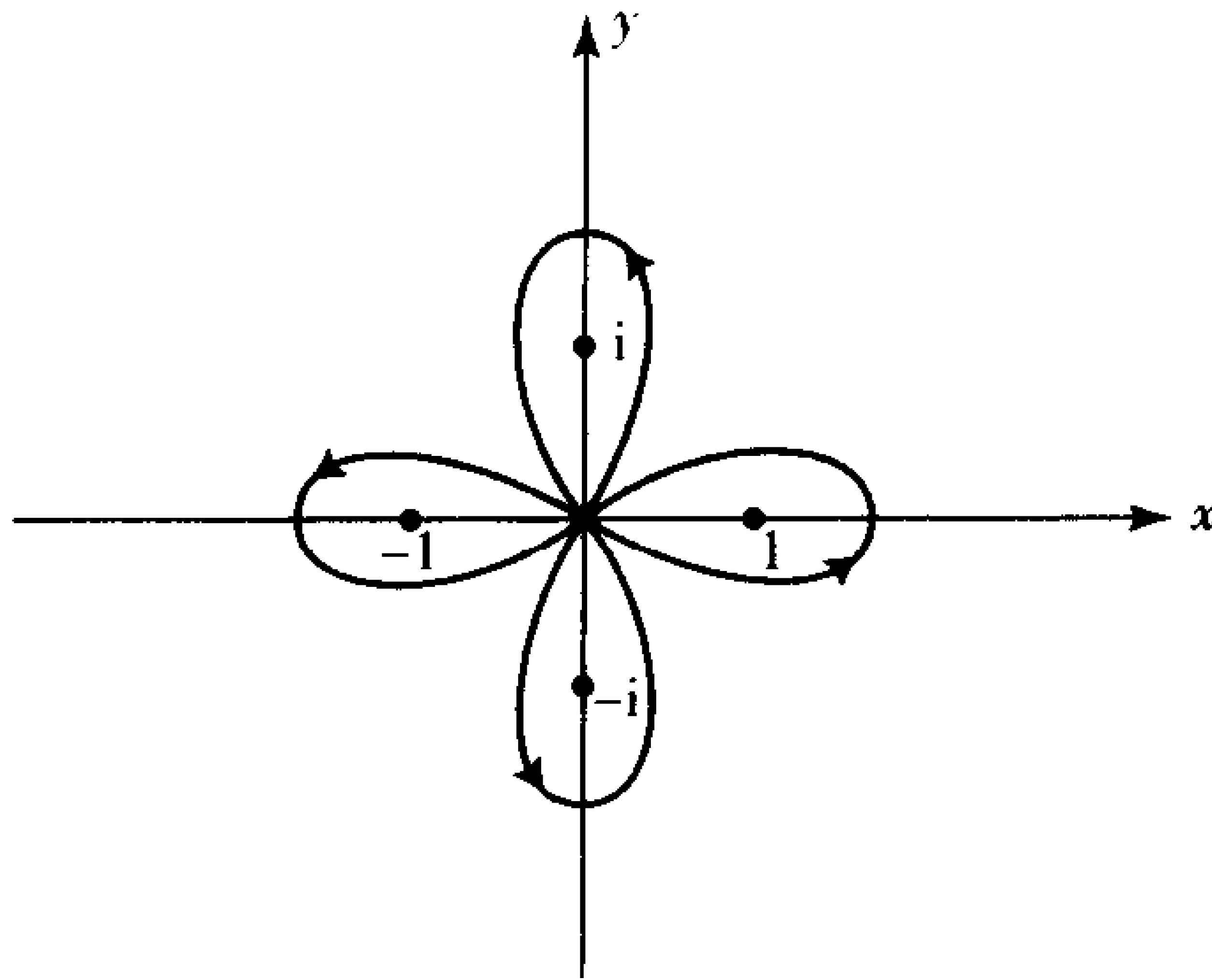


图 4-50　习题 20 的周线

4.5 柯西积分公式及其推论

设 f 在简单闭周线 Γ 及其内部解析，由柯西积分定理知 $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$. 然而，如果考虑积分 $\int_\Gamma f(z)/(z-z_0)\,dz$，其中 z_0 是 Γ 内部的点，则由于被积函数在 Γ 的内部有一个奇点，从而就没有理由期望它的积分值为 0. 作为这一节的主要结果，我们将证明对于 Γ 内的任意点 z_0，上述积分值与 $f(z_0)$ 之比是一个常数.

定理 14（柯西积分公式） 设 Γ 是一条正向简单闭周线，若 f 在包含 Γ 的某个单连通区域 D 内解析，z_0 为 Γ 内任意一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz. \tag{1}$$

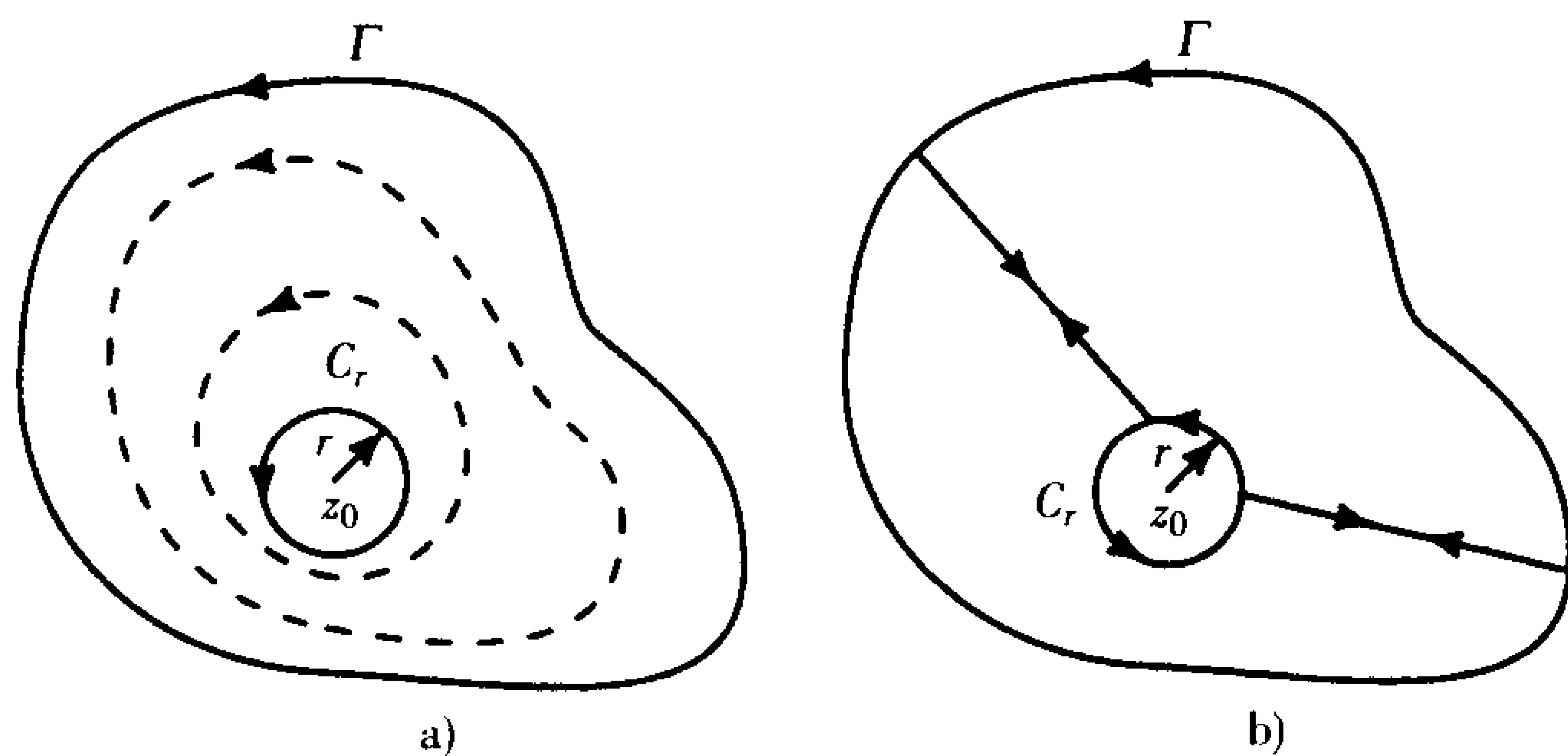


图 4-51 柯西积分公式中的周线

证 函数 $f(z)/(z-z_0)$ 在 D 内除去点 z_0 外处处解析. 从而由 4.4 节中的方法，沿周线 Γ 上的积分等于沿 Γ 内某个小的正向圆周 C_r：$|z-z_0|=r$ 的积分. 图 4-51a 说明的是 4.4a 节中的连续形变法，而图 4-51b 给出的则是 4.4b 节中的一个方法. 因此

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

将上式右端表示为两个积分之和：

$$\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$

204

因为

$$\int_{C_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_{C_r}\frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)2\pi i;$$

从而

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)2\pi i + \int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz. \tag{2}$$

注意到(2)式中的前两项是与 r 无关的常数，因此当 r 趋于 0 时(2)式最后一项的值不变，即

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = f(z_0)2\pi\mathrm{i} + \lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \tag{3}$$

因此，只要能够证明(3)式中的极限等于0，则柯西积分公式成立.

为此，令 $M_r := \max\{|f(z)-f(z_0)| : z\in C_r\}$，则对 C_r 上的点 z，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{r} \leqslant \frac{M_r}{r},$$

因此由 4.2 节定理 5,

$$\left|\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M_r}{r}\ell(C_r) = \frac{M_r}{r}2\pi r = 2\pi M_r.$$

又由于 f 在 z_0 点连续可知 $\lim\limits_{r\to 0^+} M_r = 0$. 所以

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0,$$

这样由(3)推出了(1). ■

柯西积分公式的重要之处在于，只要知道了解析函数 f 在 Γ 上的值，那么通过计算(1)式中的积分，就可以得到 f 在 Γ 的内部的全部值. 换句话说，解析函数在区域内的性质完全由它在边界上的性质所决定.

下面我们给出一些应用柯西积分公式计算某些积分的例子，在第 6 章中我们还将介绍计算积分更加有效的方法和技巧.

例 1 计算积分

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^z + \sin z}{z}\mathrm{d}z,$$

[205] 其中 Γ 是以逆时针方向绕 $|z-2|=3$ 旋转一周的周线.

解 注意到函数 $f(z)=\mathrm{e}^z+\sin z$ 在 Γ 上及其内部解析，点 $z_0=0$ 在 Γ 的内部. 从而这个积分满足公式(1)的形式，它的值等于

$$2\pi\mathrm{i} f(0) = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{e}^0 + \sin 0] = 2\pi\mathrm{i}.$$ ■

例 2 计算积分

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2-4}\mathrm{d}z,$$

周线 Γ 如图 4-52 所示.

解 首先注意到被积函数的不解析点是 $z=\pm 2$，但只有 $z=2$ 在周线 Γ 的内部. 记

$$\frac{\cos z}{z^2-4} = \frac{(\cos z)/(z+2)}{z-2},$$

利用公式(1)，积分等于

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2-4}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cos z/(z+2)\Big|_{z=2} = \frac{2\pi\mathrm{i}\cos 2}{4}.$$ ■

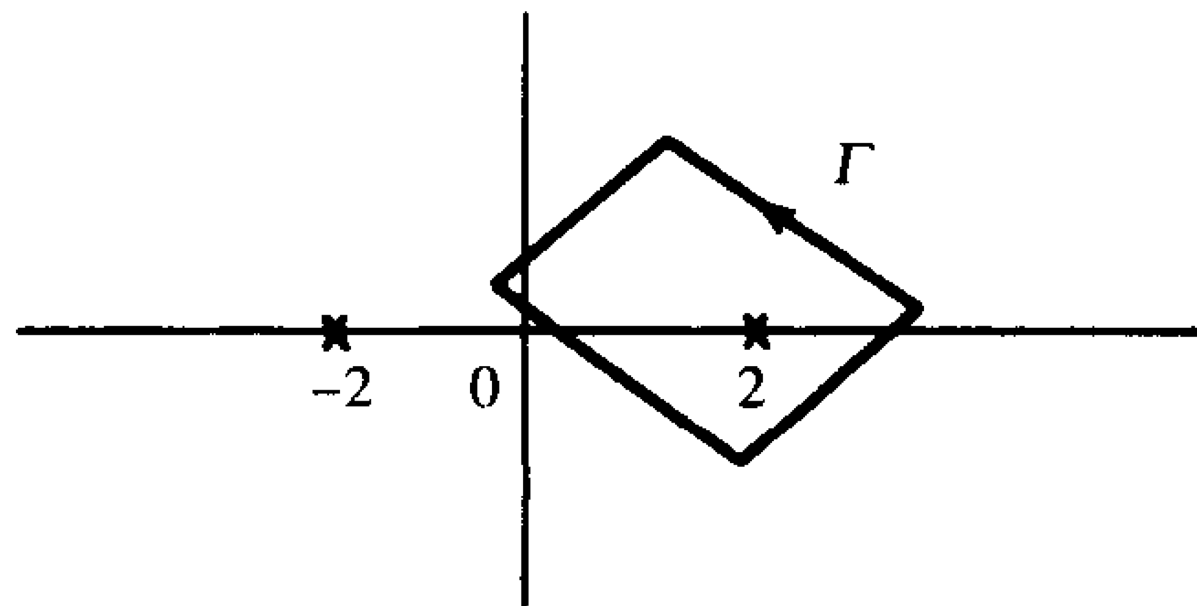


图 4-52 例 2 的周线

例 3 计算

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{2z+i} dz,$$

其中 C 是以顺时针方向绕单位圆周 $|z|=1$ 旋转一周的周线.

解 本题不能直接应用柯西公式. 首先，分母不是 $z-z_0$ 的形式. 其次，周线是负向的. 因此我们先将被积函数变形为(注意到奇点 $z=-\frac{i}{2}$ 在 C 的内部)

$$\frac{z^2 e^z}{2z+i} = \frac{\frac{1}{2}z^2 e^z}{z+i/2}.$$

206

为了解决 C 的负向问题，我们必须在公式(1)中加上一个负号，于是

$$\int_C \frac{z^2 e^z}{2z+i} dz = \int_C \frac{\frac{1}{2}z^2 e^z}{z+i/2} dz = -2\pi i \cdot \frac{1}{2}z^2 e^z \bigg|_{z=-i/2} = \frac{\pi i}{4} e^{-i/2}. \quad \blacksquare$$

在柯西公式(1)中用 ζ 代替 z，用 z 代替 z_0，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ (z \text{ 在 } \Gamma \text{ 的内部}). \tag{4}$$

上式的优点在于它暗示导数公式 $f'(z)$ 可形式地在积分号下关于 z 微分后得到. 所以我们猜想:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \ (z \text{ 在 } \Gamma \text{ 的内部}). \tag{5}$$

为验证这个等式，我们给出如下一个更加一般性的定理.

定理 15 设 g 在周线 Γ(见图 4-53)上连续，且对不在 Γ 上的任一点 z，令

$$G(z) := \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{6}$$

则函数 G 在 Γ 外的任一点上解析，且它的导数为

$$G'(z) = \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \tag{7}$$

(定理 15 在两个方面有所推广：其一，不必假设 Γ 是闭的或 g 是解析的；此外，当 $z \to \zeta \in \Gamma$ 时对 $G(z)$ 的极限值没做任何要求(参见习题 13).)

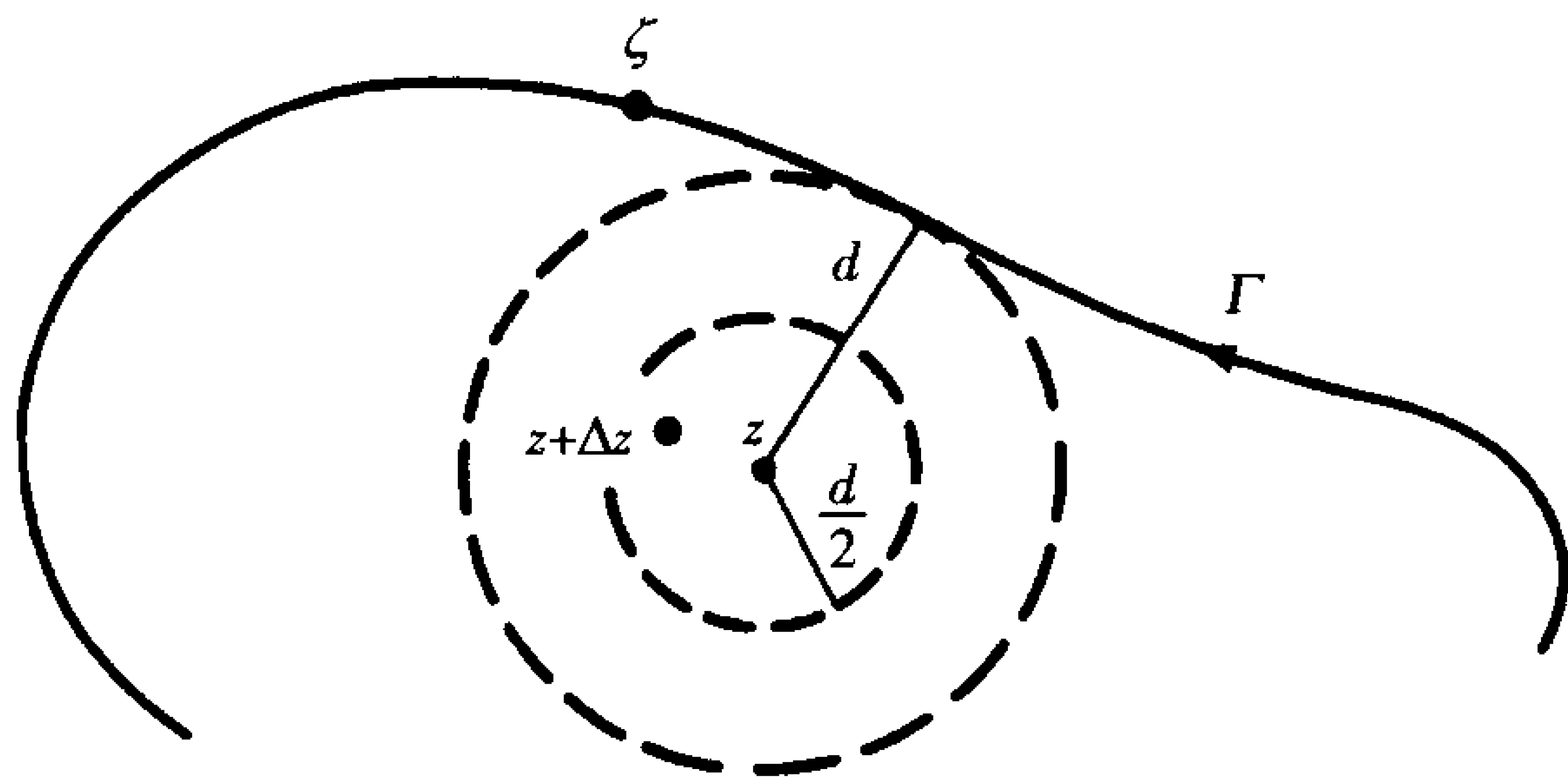


图 4-53 定理 15 的周线

定理 15 的证明 设 z 为 Γ 外任一固定点. 为了证明 $G'(z)$的存在性及公式(7)，我们需要证明

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{G(z+\Delta Z)-G(z)}{\Delta z}=\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta,$$

即要证当 $\Delta z\to 0$ 时，差值

$$J:=\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z}-\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta \tag{8}$$

207

也趋于 0. 为此，首先把 J 写为一种方便我们计算的形式.

由(6)式，知

$$\begin{aligned}\frac{G(z+\Delta z)-G(z)}{\Delta z}&=\frac{1}{\Delta z}\int_\Gamma\left[\frac{1}{\zeta-(z+\Delta z)}-\frac{1}{\zeta-z}\right]g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\&=\int_\Gamma\frac{g(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)},\end{aligned}$$

其中选取 Δz 充分小，使得 $z+\Delta z$ 不在 Γ 上. 则由(8)式和一些初等代数的知识，有

$$\begin{aligned}J&=\int_\Gamma\frac{g(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}-\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\\&=\Delta z\int_\Gamma\frac{g(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

为证明当 $\Delta z\to 0$ 时 $J\to 0$，对上式进行估计. 为此，设 M 为 $|g(\zeta)|$在 Γ 上的最大值，令 d 为 z 到 Γ 的最短距离，从而对 $\forall\zeta\in\Gamma$ 有 $|\zeta-z|\geqslant d>0$. 因 Δz 趋于 0，所以可假设 $|\Delta z|<d/2$. 于是，由三角不等式，

$$|\zeta-z-\Delta z|\geqslant|\zeta-z|-|\Delta z|\geqslant d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}\quad(\zeta\in\Gamma)$$

(参见图 4-53)，从而 $\forall\zeta\in\Gamma$,

$$\left|\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\right|\leqslant\frac{M}{\frac{d}{2}\cdot d^2}=\frac{2M}{d^3}.$$

因此由 4.2 节定理 5，得

$$|J|=\left|\Delta z\int_\Gamma\frac{g(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}\right|\leqslant|\Delta Z|\frac{2m\ell(\Gamma)}{d^3},$$

其中 $\ell(\Gamma)$为 Γ 的长度. 所以 $\Delta z\to 0$ 时 J 趋于 0. 故(7)式成立，证毕. ■

我们继续前面的讨论. 考虑函数

$$H(z):=\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\quad(z\notin\Gamma), \tag{10}$$

可以证明 H 在 Γ 以外的任意点上解析，且对(10)式积分号下形式地对 z 微分得到

$$H'(z)=2\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\mathrm{d}\zeta\quad(z\notin\Gamma), \tag{11}$$

208

上式的证明与定理 15 的证明类似，留给读者完成.

这些结果的一个重要推论是解析函数的导数还是解析函数. 因为假若f在z_0解析, 我们希望f'也在z_0解析, 即f'本身在z_0的某个邻域内可导. 为此, 选择充分小的正向圆周C: $|\zeta - z_0| = r$, 使f在C上及其内部解析. 因为f有柯西积分表达式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \text{（}z\text{ 在 }C\text{ 的内部）},$$

由定理15得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta \text{（}z\text{ 在 }C\text{ 的内部）},$$

但上式右端是形如(10)式的函数, 从而f'在C内任意点可导, 所以f'必定在z_0解析.

同理得到函数f'的导数f''在z_0解析. 更一般地, 由$f^{(n)}$的解析性可推出$f^{(n+1)}$的解析性, 从而由归纳法得到如下结果.

定理16 设函数f在区域D内解析, 则它在D内的各阶导数f', f'', …, $f^{(n)}$, …存在且解析.

定理16的惊人之处在于类似的结论在微积分中是不成立的. 例如, 实函数$f(x) = x^{5/3}$对任意的x可导, 但$f'(x) = 5x^{2/3}/3$在$x = 0$不可导.

我们知道, 如果解析函数f写为$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$的形式, 由2.4节, 它的导数有如下表达式:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \text{ 和 } f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{12}$$

209

现在知道f'解析, 从而是连续的. 因此由(12)式, u, v的所有一阶偏导数必定是连续的. 同理, 由于f''存在, 由(12)式及f'的柯西-黎曼方程得到表达式

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

由f''的连续性知, u, v的所有二阶偏导数在f的解析点都是连续的. 继续这样的过程, 我们得到下面的定理:

定理17 设$f = u + iv$在区域D内解析, 则u, v的各阶偏导数在D内存在且连续.

(这个定理验证了2.5节中的一个结论, 即解析函数$f = u + iv$的实部与虚部都是调和的[1]. 把这个结论应用到函数f', f'', …, $f^{(n)}$, …, 则知u, v的所有阶偏导数也是调和的.)

导数的解析性也可用这种方法叙述: 只要函数f在区域D内有原函数, 则f在D内一定解析[2]. 由4.3节定理7, 连续函数存在原函数等价于它沿所有环线的积分等于0, 从而得到下面的莫累拉(Morera)定理:

[1] 2.5节中我们假设了u, v的二阶偏导数是连续的.

[2] 原函数之所以是解析的, 是因为它有导数!

定理 18 设 f 在区域 D 内连续，且对 D 内任意闭周线 Γ 有

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

则 f 在 D 内解析.

在推导(7)式和(11)式的过程中，我们实际上证实了对于某些积分关于 z 微分的过程可转换为关于 ζ 积分的过程. 事实上，由柯西积分公式，用数学归纳法可以证明，积分号下对 z 进行累次微分即可得到关于 f 的逐次导数公式，从而我们有一般的柯西积分公式.

210

定理 19 设 f 在正向简单闭周线 Γ 上及其内部解析，z 是 Γ 内部的任意一点，则

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{13}$$

为了使用方便，把(13)式改写为如下等价形式：

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!},(z_0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 的内部}, m = 1,2,\cdots). \tag{14}$$

例 4 计算 $\int_{\Gamma} \mathrm{e}^{5z}/z^3\mathrm{d}z$,其中 Γ 是以逆时针方向绕 $|z| = 1$ 一周的周线.

解 注意到函数 $f(z) = \mathrm{e}^{5z}$在 Γ 及其内部解析，因此，在(14)式中取 $z_0 = 0$，$m = 3$，得

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^{5z}}{z^3}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}f''(0)}{2!} = 25\pi\mathrm{i}.$$ ■

例 5 计算

$$\int_{C} \frac{2z + 1}{z(z - 1)^2}\mathrm{d}z,$$

其中 C 为沿如图 4-54 所示的 8 字形周线一周.

解 注意到沿曲线 C 的积分相当于绕 C 的右叶 Γ_1 正向一周的积分加上绕 C 的左叶 Γ_2 反向一周的积分：

211

$$\int_{C} \frac{2z + 1}{z(z - 1)^2}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} \frac{(2z + 1)/z}{(z - 1)^2}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} \frac{(2z + 1)/(z - 1)^2}{z}\mathrm{d}z,$$

这里为了把有关奇点明确表示出来，我们对上式右端的被积函数进行了改写. 由公式(14)即可计算沿 Γ_1，Γ_2 的积分，这里 m 分别等于 2 和 1. 所求的积分值为

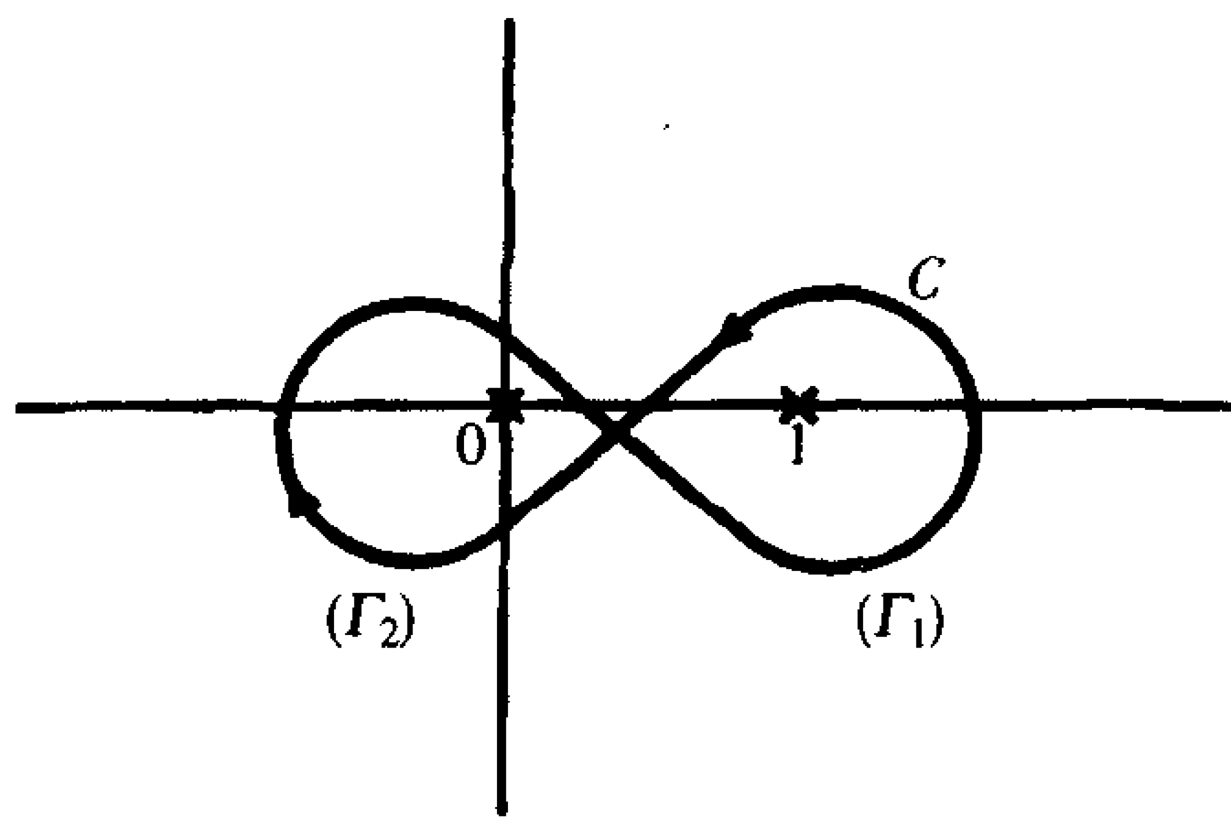


图 4-54 例 5 的周线

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2z + 1}{z}\right)\bigg|_{z=1} - 2\pi\mathrm{i}\frac{2z + 1}{(z - 1)^2}\bigg|_{z=0} = -2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i} = -4\pi\mathrm{i}.$$ ■

练习 4.5

1. 设 f 在简单闭周线 Γ 及其内部解析，当 z_0 在 Γ 的外部时，积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z$$

的值是什么？

2. 设 f，g 在简单环线 Γ 及其内部解析. 证明：若对 Γ 上的任意点 z 有 $f(z)=g(z)$，则对 Γ 内的任意点 z 也有 $f(z)=g(z)$.

3. 设 C 是以正方向绕圆周 $|z|=2$ 旋转一周的周线. 计算下列积分：

(a) $\int_C \frac{\sin 3z}{z-\frac{\pi}{2}}dz$　　(b) $\int_C \frac{2e^z}{2z-3}dz$　　(c) $\int_C \frac{\cos z}{z^3+9z}dz$

(d) $\int_C \frac{5z^2+2z+1}{(z-i)^3}dz$　　(e) $\int_C \frac{e^{-z}}{(z+1)^2}dz$　　(f) $\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}dz$

4. 计算

$$\int_C \frac{z+\mathrm{i}}{z^3+2z^2}dz,$$

其中 C 为

(a) 以逆时针方向绕圆周 $|z|=1$ 旋转一周的周线.

(b) 以逆时针方向绕圆周 $|z+2-\mathrm{i}|=2$ 旋转一周的周线.

(c) 以逆时针方向绕圆周 $|z-2\mathrm{i}|=1$ 旋转一周的周线.

5. 设 C 是以正方向绕椭圆 $x^2/4+y^2/9=1$ 旋转一周的周线，定义

$$G(z):=\int_C \frac{\zeta^2-\zeta+2}{\zeta-z}d\zeta\,(z\text{ 在 }C\text{ 的内部}).$$

求 $G(1)$，$G'(\mathrm{i})$ 和 $G''(-\mathrm{i})$.

6. 计算

$$\int_\Gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}dz,$$

其中 Γ 是以逆时针方向绕圆周 $|z|=3$ 旋转一周的周线. [提示：证明这个积分可被写为沿以它的奇点为心的两小圆周的积分之和.]

212

7. 计算

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{z^2(z-3)}dz,$$

Γ 为如图 4-55 所示的周线.

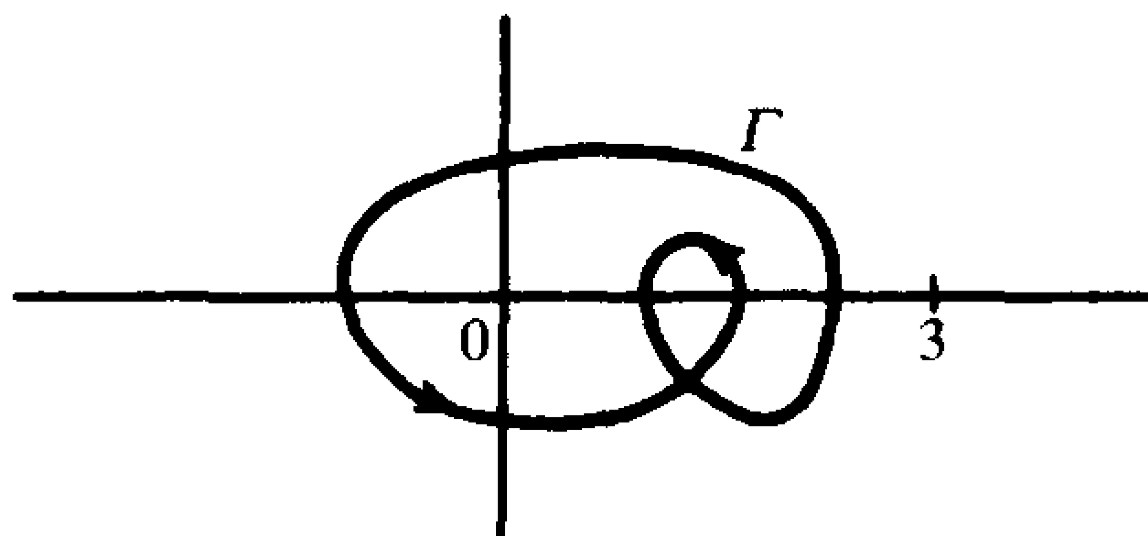


图 4-55　习题 7 的周线

8. 由柯西公式证明：若 f 在圆周 $|z-z_0|=r$ 上及其内部解析，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})d\theta.$$

证明更一般的结论：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{\mathrm{i}\theta})e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta.$$

9. 设 f 在单位圆周 $|z|=1$ 上及其内部解析，证明：如果在 $|z|=1$ 上，有 $|f(z)|\le M$，则 $|f(0)|\le M$，$|f'(0)|\le M$. 对于 $|f^n(0)|$，你能给出它的上界估计吗？

10. 设 f 在简单闭周线 Γ 及其内部解析. 由本节定理证明，当 $z_0\notin\Gamma$ 时，有

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

11. 设 $f=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析. 解释 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在 D 内调和的原因.

12. 证明由(10)式定义的函数 H 在 Γ 的内部解析且它的导函数由(11)式给出.

13. 由定理 15，若 Γ 为一简单闭周线，由

$$G(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

定义的函数 G 在以 Γ 为边界的区域内解析(只假设 g 在 Γ 上连续). 在 Γ 为正向圆周 $|z|=1$ 且 $g(z)=1/z$ 的情况下，说明当 $z\to\zeta\in\Gamma$ 时，$G(z)$ 的极限值与 $g(\zeta)$ 的值不必相同. [提示：利用部分分式展开式计算 G.] 为什么这与柯西公式不矛盾?

213

14. 设 Γ 是过点 $2+3i$ 的正向简单闭周线. 令

$$G(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\cos\zeta}{\zeta-z}d\zeta.$$

求下列极限：

(a) $\lim\limits_{z\to 2+3i}G(z)$，其中 z 从 Γ 的内部趋向 $2+3i$.

(b) $\lim\limits_{z\to 2+3i}G(z)$，其中 z 从 Γ 的外部趋向 $2+3i$.

[好奇的读者可能会思考当点 z(譬如说 $2+3i$)在 Γ 上时对这个积分的解释. 在 8.5 节中我们将介绍索霍茨基(Sokhotskyi)和普勒梅利(Plemelj)理论，它告诉我们在这种情况下，$G(z)$ 等于内部和外部极限值的平均值.]

15. 设 $f(z)$ 在闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 的每一点解析且 $f(0)=0$. 证明函数

$$F(z):=\begin{cases}f(z)/z & z\neq 0,\\ f'(0) & z=0\end{cases}$$

在 $|z|\leqslant 1$ 上解析. [提示：为了证明 F 在 $z=0$ 解析，注意到由定理 15 知函数

$$G(z):=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)/\zeta}{\zeta-z}d\zeta$$

在 $z=0$ 解析. 利用部分分式展开式推出，对于 $|z|<1$ 有 $G(z)=F(z)$.]

16. 设 $f(z)$ 为单连通区域 D 内永不为零的任一解析函数，则在 D 内存在 $\log f(z)$ 的一个单值解析分支. 下面是此命题的证明要点，证明以下各条.

(a) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内解析.

(b) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 内有(解析的)原函数，譬如说 $H(z)$.

(c) 函数 $f(z)e^{-H(z)}$ 在 D 内是常数，所以 $f(z)=ce^{H(z)}$.

(d) 令 α 是 $\log c$ 的一个值，则函数 $H(z)+\alpha$ 是 $\log f(z)$ 在 D 内的一个解析分支.

17. 利用 16 题结果证明单位圆盘 $|z|<1$ 内存在 $(z^3-1)^{1/2}$ 的一个单值解析分支.

4.6 解析函数的界

关于解析函数模的上界的估计有很多有趣的结论，在这方面，我们已经有了一个结果，即 4.2 节定理 5 的积分估计. 下面应用柯西积分公式推导解析函数导数的柯西估计.

214

定理 20 设 f 在以 z_0 为心，R 为半径的圆周 C_R 上及其内部解析. 若对 $\forall z\in C_R$，有 $|f(z)|\leqslant M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1}$$

证 在图 4-56 中，C_R 的方向为正向，由一般的柯西公式(定理 19)，我们有

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

对于$\zeta \in C_R$，被积函数有上界M/R^{n+1}，C_R的长度为$2\pi R$. 因此由4.2节定理5

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R,$$

从而得到(1). ■

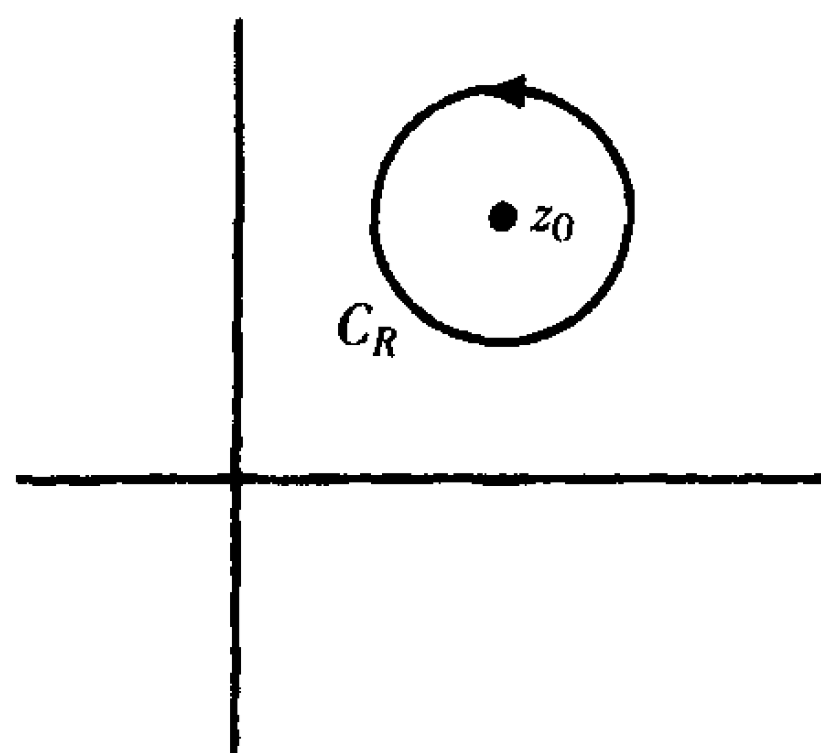


图4-56 用于柯西估计的圆周

这一看上去无关紧要的定理实际上对于解析函数的性质加上了相当严格的限制. 例如，假定f在整个复平面$\mathbf{C}$上解析且有上界M，则对任意的z_0和R，f满足定理20的条件. 在(1)式中取$n=1$，令$R\to\infty$，得$f'=0(\forall z \in \mathbf{C})$，即$f$必是一个常数. 这个令人震惊的结果称为刘维尔定理.

定理21 有界整函数必为常数.

显然，非常数的多项式(在整个复平面上)是无界的. 粗略地说，由于次数为n的多项式的首项对于次数较低的幂起着支配的作用，因此对于大的$|z|$，我们希望此多项式与z^n有同样的性质. 事实上，如果$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0(a^n\neq 0)$，则 215

$$P(z) = z^n(a_n + a_{n-1}/z + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n).$$

所以当$|z|\to\infty$时，

$$P(z)/z^n \to a_n. \tag{2}$$

由此及刘维尔定理可证明代数学基本定理，如3.1节所允诺的那样.

定理22 任意非常数的复系数多项式至少有一个零点.

证 假设$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0(a^n\neq 0)$没有零点，从而$f(z)=1/P(z)$是整函数. 下面证明它在整个平面上是有界的.

(i)由(2)，当$|z|$充分大，不妨设$|z|\geqslant\rho$时，有$|P(z)/z^n|\geqslant|a_n|/2$. 从而

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leqslant \frac{2}{|z^n||a_n|} \leqslant \frac{2}{\rho^n|a_n|} \quad (|z|\leqslant\rho).$$

(ii)当$|z|\leqslant\rho$时，$|f(z)|$为这个闭圆盘上的连续函数，由微积分理论知道它必然有界(事实上，它可在闭圆盘上取到最大模).

然而，如果$1/P(z)$有界且是整函数，则它一定是常数. 所以$P(z)$也是常数(次数n为0的多项式). 换句话说，只有没有零点的多项式才是常数. ■

现在我们再回来看柯西公式. 设函数f在以z_0为圆心，半径为R的圆C_R上及其内部解析，它的柯西公式为

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{3}$$

将C_R参数化：$z=z_0+Re^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，把(3)式写为

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} dt,$$

或

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\,dt. \tag{4}$$

216

即 $f(z_0)$ 等于 f 在 C_R 上的值的算术平均数，称(4)式为平均值性质. 显然，若在 C_R 上有 $|f(z)|\leqslant M$，则 $|f(z_0)|\leqslant M$(这就是定理20中 $n=0$ 的情况，其中 $0!=1$). 但更加重要的是，我们可以利用(4)式证实下述结论.

引理 1 设 f 在以 z_0 为心的圆盘内解析，且有最大值 $|f(z_0)|$，则 $|f(z)|$ 在圆盘内是常数.

证 假设 $|f(z)|$ 不是常数，则圆盘内一定存在一点 z_1 使得 $|f(z_0)|>|f(z_1)|$. 设 C_R 是以 z_0 为圆心通过 z_1 的圆. 由假设，对 C_R 上的任意点 z，有 $|f(z_0)|\geqslant|f(z)|$. 又由 f 的连续性，在 C_R 的包含 z_1 的一段圆弧上有严格不等式 $|f(z_0)|>|f(z)|$. 这与(4)式矛盾，这是因为 f 在这段圆弧上的值小于(4)式中的平均值，而这个“亏值”又不能由 C_R 上其他点处的值补上.(习题9中，请读者给出这段讨论的一个严格的证明.) ■

引理1表明解析函数的模不能在圆盘中心达到最大值，除非 $|f|$ 是常数. 下面应用这个引理证明最大模原理.

定理 23 若 f 在区域 D 内解析且 $|f(z)|$ 在 D 内一点 z_0 达到最大值，则 f 在 D 内是常数.

证 只需证明 $|f|$ 在 D 内是常数，因为由练习2.5中的习题12知 f 也是常数.

假设 $|f(z)|$ 不是常数，那么在 D 内必然存在点 z_1 使 $|f(z_0)|>|f(z_1)|$. 设 γ 是 D 内连接由 z_0 到 z_1 的一条路径，如图4-57所示. 以 z_0 为起点，考虑 $|f(z)|$ 在 γ 上的值. 那么在 γ 上一定存在一点 w，从这点起 $|f(z)|$ 在 γ 上的值开始减少，即在 γ 上存在一点 w 具有以下性质：

(i) 对于 γ 上 w 之前的所有点 z，有 $|f(z)|=|f(z_0)|$；

(ii) 存在 γ 上任意接近 w 的点 z，使 $|f(z)|<|f(z_0)|$.

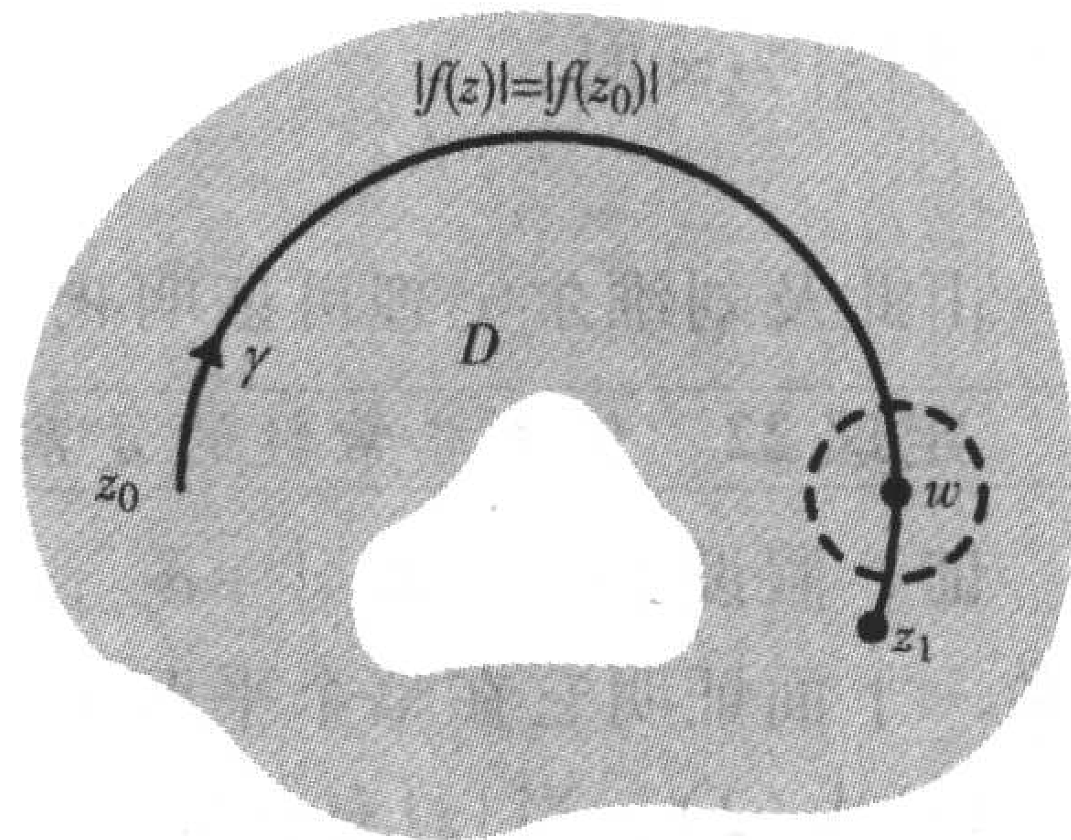


图 4-57 用于定理23证明的图形

(w 可能与 z_0 重合.) w 的存在性可由实数系公理严格证明，这里不再赘述. 由性质(i)及 f 的连续性，我们有 $|f(\omega)|=|f(z_0)|$.

217

由于区域内的任何点都是内点，从而一定存在一个以 w 为心的圆盘含在 D 内. 由引理1可知 $|f|$ 在此圆盘内是常数，这与性质(ii)相矛盾. 所以我们开始的关于 z_1 的假设是错误的. 因此，$|f|$ 在 D 上是常数. 从而 f 在 D 上是常数. ■

下面考虑在有界区域 D 内解析且在 D 上及其边界连续的函数 $f(z)$. 由微积分理论知连续函数 $|f(z)|$ 在这个闭有界区域内必然达到最大值；另一方面，定理23又指出这个最大值不可能在 D 的内部取得，除非 f 是一个常数. 这样，我们得到如下最大模原理的改进形式：

定理 24 如果函数在有界区域内解析，在区域内及边界上连续，则它的最大模在边界上达到.

例 1 求 $|z^2+3z-1|$ 在圆盘 $|z|\leqslant 1$ 上的最大值.

解 由三角不等式，

$$|z^2+3z-1|\leqslant |z^2|+3|z|+1\leqslant 5\quad (对|z|\leqslant 1). \tag{5}$$

下面分析证明它的最大值确实小于5.

$|z^2+3z-1|$的最大值一定在圆盘的边界$|z|=1$上取得. 设$|z|=1$的参数函数为：$z=e^{it}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 由此得

$$|z^2+3z-1|^2=(e^{i2t}+3e^{it}-1)(e^{-i2t}+3e^{-it}-1).$$

展开并合并同类项得到$(11-2\cos 2t)$. 所以$|z^2+3z-1|$的最大值为$\sqrt{13}$，在$z=\pm i$取得. $|z^2+3z-1|$的函数图像如图4-58所示. 218

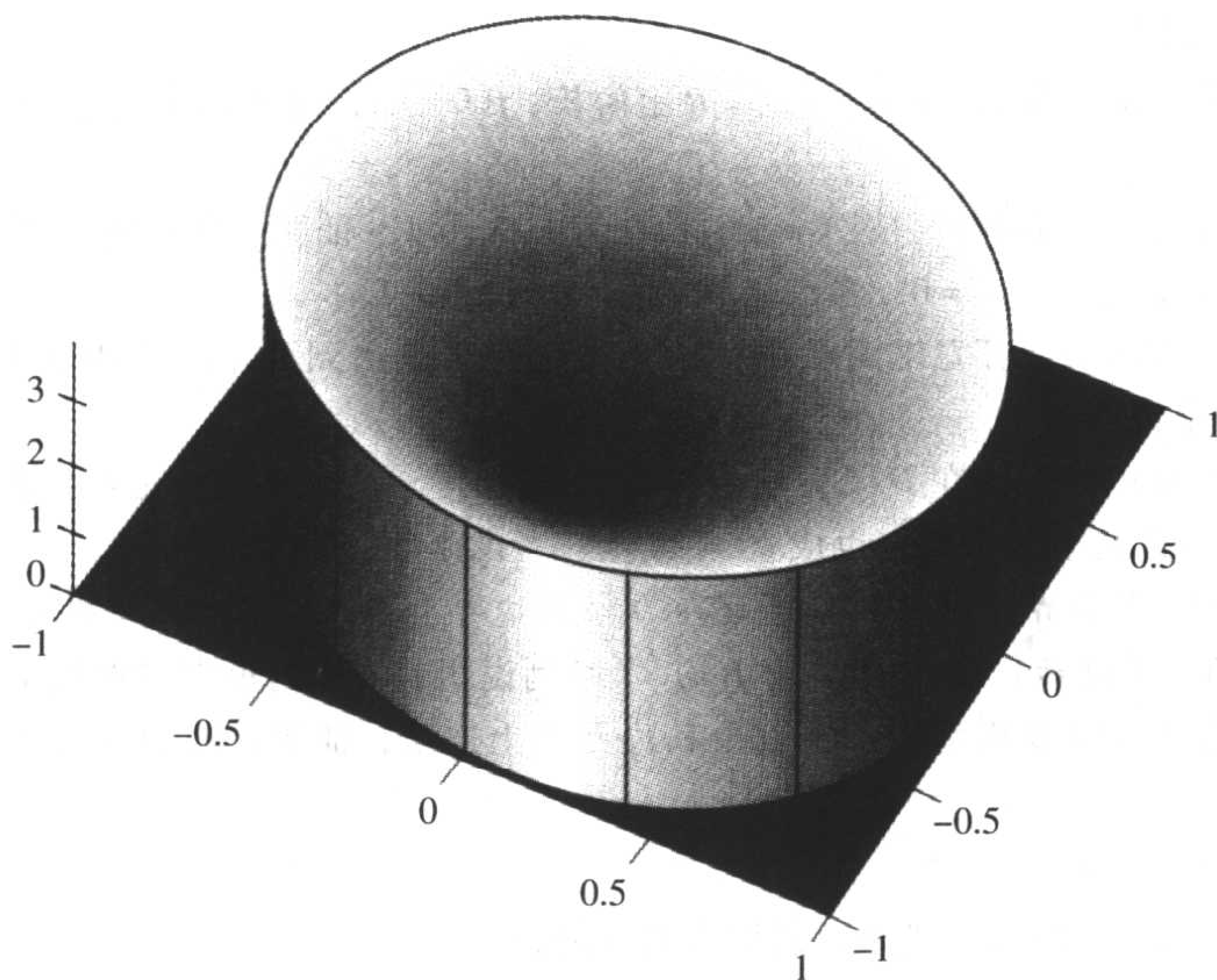


图 4-58 $|z^2+3z-1|$在$|z|<1$的图像 ■

练习 4.6

1. 设$f(z)=1/(1-z)^2$，$0<R<1$，证明$\max\limits_{|z|=R}|f(z)|=1/(1-R)^2$及$f^{(n)}(0)=(n+1)!$，从而由柯西估计得

$$(n+1)!\leqslant \frac{n!}{R^n(1-R)^2}.$$

2. 设f在$|z|<1$内解析且$|f(z)|<1/(1-|z|)$. 证明

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant \frac{n!}{R^n(1-R)}\quad (0<R<1),$$

进一步证明当$R=n/(n+1)$时有最小上界.

3. 设f在$|z|\leqslant r$内解析且有界M. 证明

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant \frac{n!M}{(r-|z|)^n}\quad (|z|<r).$$

4. 设$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$是一个多项式，且$\max|p(z)|=M$，证明系数$a_k(k=0,1,\cdots,n)$以$M$为上界.

5. 设 f 是整函数并假定对于所有的 z 有 $\mathrm{Re}\, f(z) \leqslant M$. 证明 f 一定是常数. [提示：对函数 e^f 应用刘维尔定理.]

219

6. 设 f 是整函数且假定 $f^{(5)}$ 在整个复平面上有界. 证明 f 一定是次数不超过 5 的多项式.

7. 设 f 是整函数，且当 $|z|$ 充分大(不妨设 $|z| > r_0$)时，有 $|f(z)| \leqslant |z|^2$. 证明 f 一定是次数至多为 2 的多项式. [提示：由柯西估计证明当 R 充分大时有 $|f^{(3)}(z_0)| \leqslant 3!\ (R+|z_0|)^2/R^3$，从而 $f^{(3)} = 0(z \in \mathbf{C})$.] 试推广这个结果.

8. 设 f 在圆环 $1 \leqslant |z| \leqslant 2$ 内解析，在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| \leqslant 3$，在 $|z| = 2$ 上 $|f(z)| \leqslant 12$，证明：对于 $1 \leqslant |z| \leqslant 2$，$|f(z)| \leqslant 3|z|^2$. [提示：考虑函数 $f(z)/3z^2$.]

9. 如果解析函数 f 对圆周 C_R 上的所有 z 满足 $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$，其中 C_R 的参数函数为：$z_0 + Re^{it}$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. 利用公式(4)证明 C_R 上不存在点 z_1，使得 $|f(z_0)| > |f(z_1)|$. [提示：假设 z_1 存在，由 f 的连续性知存在 $\varepsilon > 0$ 使得在 t 的某个区间上有 $|f(z_0 + Re^{it})| \leqslant |f(z_0)| - \epsilon$. 利用这个区间将(4)式的积分分段写出，最后推出矛盾 $|f(z_0)| < |f(z_0)|$.]

10. 求出所有满足下列条件的函数 f：在 D：$|z| < R$ 上解析，$f(0) = \mathrm{i}$，对 $\forall z \in D$ 有 $|f(z)| \leqslant 1$. [提示：考虑最大模在哪里取得.]

11. 设 f 在简单闭曲线 C 及其内部解析，对 $\forall z \in C$ 有 $|f(z) - 1| < 1$. 证明 f 在 C 的内部没有零点. [提示：假设在 C 的内部某一点 z_0 处 $f(z_0) = 0$，考虑函数 $g(z) := f(z) - 1$.]

12. 在第 6 章中将证明：在区域上任意非常数的解析函数将开集映射到开集. 应用这个事实给出最大模原理(定理 23)的另外一个证明.

13. 设 f 和 g 在有界区域 D 内解析，在 D 及其边界 B 上连续，且 g 没有零点，证明：若对 $\forall z \in B$ 有 $|f(z)| \leqslant |g(z)|$，则对 $\forall z \in D$，这个结论肯定也成立. [提示：考虑函数 $f(z)/g(z)$.]

14. 证明最小模原理：设 f 在有界区域 D 内解析且在 D 及其边界上连续，若 f 在 D 内没有零点，则 $|f(z)|$ 在 D 的边界上取到最小值. [提示：考虑函数 $1/f(z)$.] 举例说明 f 在 D 内没有零点的条件是必要的.

15. 设非常数函数 f 在有界区域 D 内解析且在 D 及其边界 B 上连续，证明：若 $|f(z)|$ 在 B 上是常数，则 f 在 D 内至少有一个零点.

16. 证明：$\max\limits_{|z| \leqslant 1} |az^n + b| = |a| + |b|$.

17. 证明：$\max\limits_{|z| \leqslant 1} |(z-1)(z+1/2)|$. [提示：利用微积分理论.]

18. 设 P 是一个多项式，且在正向简单闭周线 Γ 上没有零点，证明：P 在 Γ 内部的零点个数(计算重数)等于积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)}\mathrm{d}z.$$

220

[提示：参见练习 3.1 的习题 17.]

19. 证明：对任何形如 $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 的多项式 P，$\max_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1$. [提示：考虑多项式 $Q(z) = z^n P(1/z)$，并且注意到 $Q(0) = 1$ 及 $\max\limits_{|z|=1} |Q(z)| = \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$.]

*4.7 在调和函数中的应用

第 2 章末我们讨论了调和函数，它是拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

的二元连续可微解. 特别地，在假定解析函数的实部与虚部具有二阶连续偏导数的条件下，我们证明了它们是调和的. 现在，这个假设已被定理 17 证明. 反之，给定某特定区域(例如圆盘)内的一个调和函数，若将它看作一个解析函数的实部(或虚部)，我们也可以由给出的方法求出它的共轭调和函数. 现在，我们利用这些解释得到调和函数更多的性质.

我们首先通过定理 25 将调和–解析二元论推广到单连通区域.

定理 25 设 ϕ 是单连通区域 D 内的调和函数，则在 D 内存在解析函数 f 使得 $\phi = \mathrm{Re}f$.

证 假设存在这样一个解析函数，设为 $f=\phi+\mathrm{i}\psi$，则 f' 的一个表达式应由 $f'=\partial\phi/\partial x-\mathrm{i}\partial\phi/\partial y$ 给出(利用柯西–黎曼方程)，从而 f 为这个解析函数的一个原函数.

由此，定义 $g(z):=\partial\phi/\partial x-\mathrm{i}\partial\phi/\partial y$. 我们断言 $g(z)$ 在 D 内满足柯西–黎曼方程. 由于 ϕ 调和，从而

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

又因 ϕ 的混合二阶偏导数相等，所以

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$

因为 ϕ 调和，它的这些偏导数都是连续的，因此 $g(z)$ 解析. 由 4.4 节定理 10(或 13)，$g(z)$ 在单连通区域 D 内有解析的原函数 $G=u+\mathrm{i}v$. 因为 $G'=g$，因此 [221]

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

此式表明 u 和 ϕ 在 D 内有同样的一阶偏导数. 从而，由 1.6 节的定理 1 知，$\phi-u$ 在 D 内是常数，即 $\phi=u+c$. 由此可知 $f(z):=G(z)+c$ 是满足定理条件的解析函数. ■

有了定理 25，我们就完全具备了应用解析函数理论研究单连通区域内的调和函数的基础. 设 $\phi(x, y)$ 是一个调和函数，$f=\phi+\mathrm{i}\psi$ 在单连通区域 D 内是一个关于 ϕ 的"解析完备"函数. 现在考察函数 $\mathrm{e}^{f(z)}$:

$$|\mathrm{e}^{f}|=|\mathrm{e}^{\phi+\mathrm{i}\psi}|=|\mathrm{e}^{\phi}||\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}|=\mathrm{e}^{\phi}. \tag{1}$$

由于指数函数是关于实变量的单调递增函数，所以(1)式表明 ϕ 的最大值点就是解析函数 $\mathrm{e}^{f(z)}$ 模的最大值点. 从而我们立刻得到了调和函数的最大值原理！另外，由于 ϕ 的最小值点就是调和函数 $-\phi$ 的最大值点，这样，调和函数的最大值–最小值原理可叙述如下：

定理 26 设 ϕ 是单连通区域 D 内的调和函数，若 $\phi(z)$ 在 D 内某点 z_0 达到最大值或最小值，则 ϕ 在 D 内是常数.

定理 27 设函数 ϕ 在有界单连通区域内调和且在区域内和边界上连续，则它在边界上达到最大值和最小值.

实际上，对定理 23 的证明方法作适当改进，上述定理便能很容易地推广到多连通区域，参见习题 3. 今后我们将应用定理的这些推广形式.

下面是出现在电磁学、流体力学和热传导中的一个常见的重要问题.

狄利克雷问题 求一个在区域 D 内调和并且在 D 及其边界上连续的函数 $\phi(x, y)$，使之在 D 的边界上取给定值. [222]

函数 ϕ 可表示电势、速度位势或恒温. 在研究狄利克雷问题时，我们关心的主要有两点：解是否存在；如果解存在，是否由所给定的边值唯一确定？对于有界区域的情形，唯一性问题

是肯定的，由下述定理给出.

定理 28 设 $\phi_1(x, y)$ 和 $\phi_2(x, y)$ 均为有界区域 D 内的调和函数，且在 D 及其边界上连续. 若在 D 的边界上 $\phi_1=\phi_2$，则在 D 内有 $\phi_1=\phi_2$.

证 考虑调和函数 $\phi:=\phi_1-\phi_2$. 它的最大值和最小值一定在边界上达到，但是都为0！所以在 D 内有 $\phi=0$. ■

狄利克雷问题的解，可以通过一个公式，把调和函数 ϕ 在 D 内的值用它在边界上的(指定)值表示出来. 这使我们联想到柯西积分公式，它能将公 $f=\phi+\mathrm{i}\psi$ 在 D 内部的值由边界值表示出来(这里 f 是 ϕ 的解析完备). 所以，如果在柯西积分公式中能够“分开”f 的实部与虚部，我们就可以得到狄利克雷问题的解.

事实上，我们可以应用上述方法解决圆盘和半平面上的狄利克雷问题. 后者留作习题，下面只研究圆盘的情况.

为简便起见，设圆盘以正向圆周 $C_R:|z|=R$ 为边界. 由柯西积分公式，解析函数 f 在这个圆盘内部的值可由其在圆周上的值表示：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\quad(|z|<R)\tag{2}$$

(假定这个解析区域包括圆盘 $|z|\leqslant R$). 我们希望将(2)式变形为一个只含有 f 的实部的公式. 为此，对固定的 z，$|z|<R$，函数

$$\frac{f(\zeta)\,\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}$$

是 $|z|\leqslant R$ 上关于 ζ 的解析函数. (这是由于分母不为零). 因此由柯西定理

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)\,\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}\mathrm{d}\zeta=0.$$

把上式与(2)式相加，得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\zeta\bar{z}}\right)f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{R^2-|z|^2}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\bar{z})}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}\tag{3}$$

223

若取 C_R 的参数方程为 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则(3)式变为

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z)(R^2-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\bar{z})}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})R\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\\&=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z)(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}-\bar{z})}\mathrm{d}t\\&=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z|^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

最后，取上式的实部 $\mathrm{Re}f$ 作为调和函数 ϕ，并以极形式 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示 z，得到如下的泊松积分公式.

定理 29 设 ϕ 是含有圆盘 $|z|\leqslant R$ 的区域内的调和函数，则对于 $0\leqslant r<R$，有

$$\phi(re^{i\theta}) = \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(Re^{it})}{R^2+r^2-2rR\cos(t-\theta)}dt. \tag{4}$$

实际上，泊松积分公式有更一般的形式，我们将在下面叙述. 对于它的证明，有兴趣的读者可以参考文献[10]或[11].

定理 30 设 U 是定义在圆周 C_R: $|z|=R$ 上的实值函数，在 C_R 上除去有限个跳跃间断点外连续. 则函数

$$u(re^{i\theta}) := \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(Re^{it})}{R^2+r^2-2r\,R\cos(t-\theta)}dt \tag{5}$$

在 C_R 内部调和，并且当 $re^{i\theta}$ 趋向于 C_R 上 U 的任意连续点时，$u(re^{i\theta})$ 趋向于 U 在这点的值.

U 在其间断点处的性质肯定是很复杂的. 例如，考虑如图 4-59 所示区域上的调和函数 $\mathrm{Arg}(z+1)$，它是 $\mathrm{Log}(z+1)$ 的虚部. 显然，除去点 $z=-1$ 外，$\mathrm{Arg}(z+1)$ 都以适当的方式趋于它的边界值，而在 $z=-1$ 处，它就变得很不稳定(边界值由 $\pi/2$ 跳到 $-\pi/2$).

于是，在非常一般的情况下，泊松公式解决了圆盘的狄利克雷问题. (练习 3.4 的习题 6 是最简单的一种情况，其中 U 是一个常数.)

224

例 1 求单位圆盘内部每点的恒温 T，其中单位圆盘在第一象限边缘部分的温度为 $+1$，其他处为 0(见图 4-60).

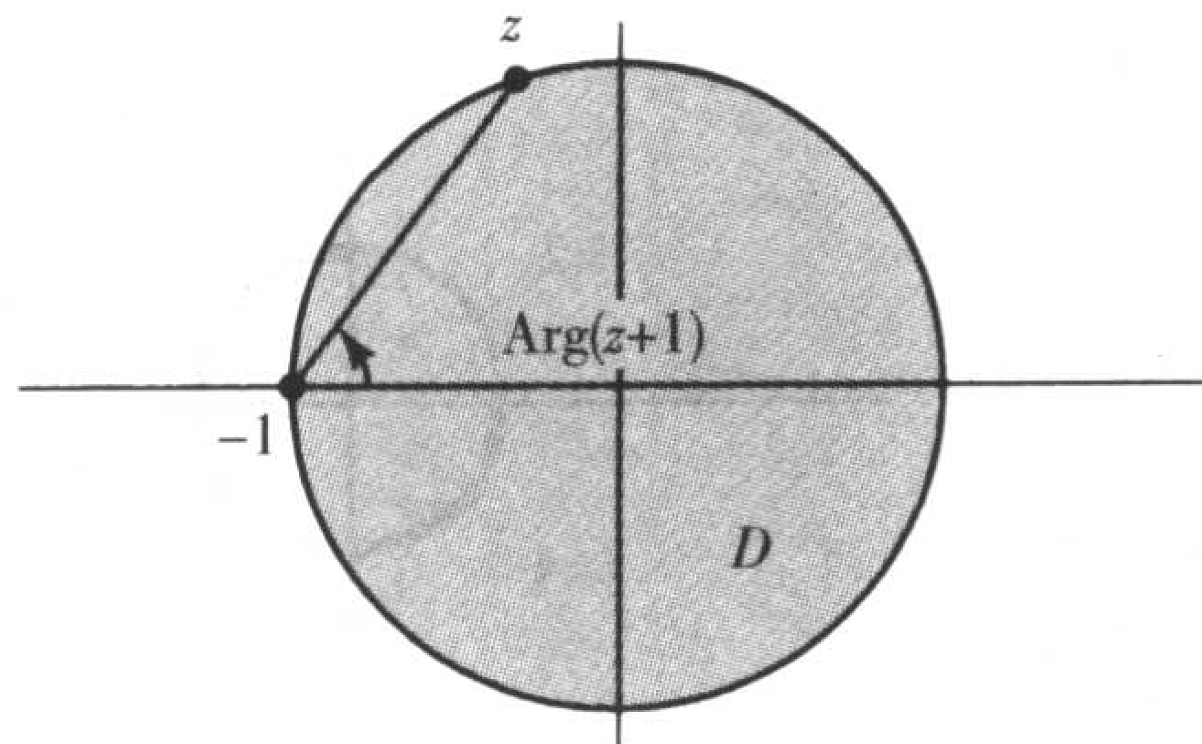


图 4-59 $\mathrm{Arg}(z+1)$

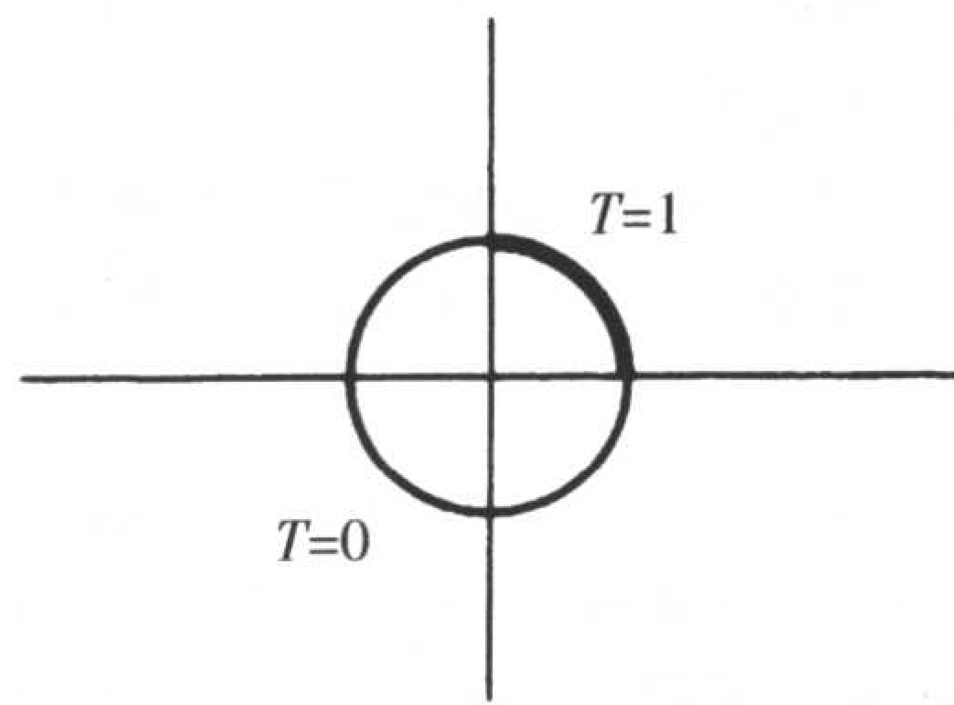


图 4-60 求圆盘内部的温度

解 温度 T 由取上述边界值的调和函数给出. 由(5)式，

$$T(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}dt.$$

例如，圆心处的温度为

$$T(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}1\,dt = \frac{1}{4},$$

它是在圆周上的值的平均数. ■

练习 4.7

1. 求在单位圆盘 D: $|z|<1$ 内对所有 z 满足 $\phi(i/2)=-5$ 及 $\phi(z)\geqslant -5$ 的所有调和函数 ϕ.
2. 举例说明在多连通区域内，调和函数不一定存在解析完备. [提示：考虑 $\mathrm{Log}|z|$.]

3. 证明任意区域内调和函数的最大值–最小值原理. [提示：由定理 26 建立类似于 4.6 节引理 1 的引理，再仿照定理 23 的方法证明.]

225

4. 最大值–最小值原理在恒温热流中的物理意义是什么？

5. 举例说明狄利克雷问题在无界区域的解不唯一. [提示：构造两个在上半平面上的调和函数，它们在 x 轴上取值均为 0.]

6. 证明调和函数的圆周平均值定理：设 ϕ 在包含圆盘 $|z| \leqslant \rho$ 的区域内调和，则

$$\phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\rho e^{it})\,dt.$$

7. 证明调和函数的立体平均值定理：设 ϕ 在含有闭圆盘 $D: |z| \leqslant R$ 的区域内调和，则

$$\phi(0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D \phi\,dx\,dy.$$

[提示：将习题 6 的平均值公式两边乘以 $\rho d\rho$ 再积分.]

8. 不需计算，解释下式成立的原因.

$$\frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(t-\theta)}\,dt = 1 \quad (0 \leqslant r < R).$$

9. 证明哈纳克不等式：设 $\phi(z)$ 在含有圆盘 $|z| \leqslant R$ 的区域内调和且非负，则对于 $0 \leqslant r < R$，

$$\phi(0)\frac{R-r}{R+r} \leqslant \phi(re^{i\theta}) \leqslant \phi(0)\frac{R+r}{R-r}.$$

[提示：利用泊松公式及 6 题的平均值性质，注意到

$$(R-r)^2 \leqslant R^2 + r^2 - 2rR\cos(t-\theta) \leqslant (R+r)^2.]$$

10. 证明调和函数的刘维尔定理：设 ϕ 在整个平面上调和且有上界和下界，则 ϕ 是常数.

[提示：修改 ϕ 从而应用哈纳克不等式(习题 9).]

11. 单位圆盘边缘上的温度如图 4-61 所示. 那么圆心处的温度是多少？

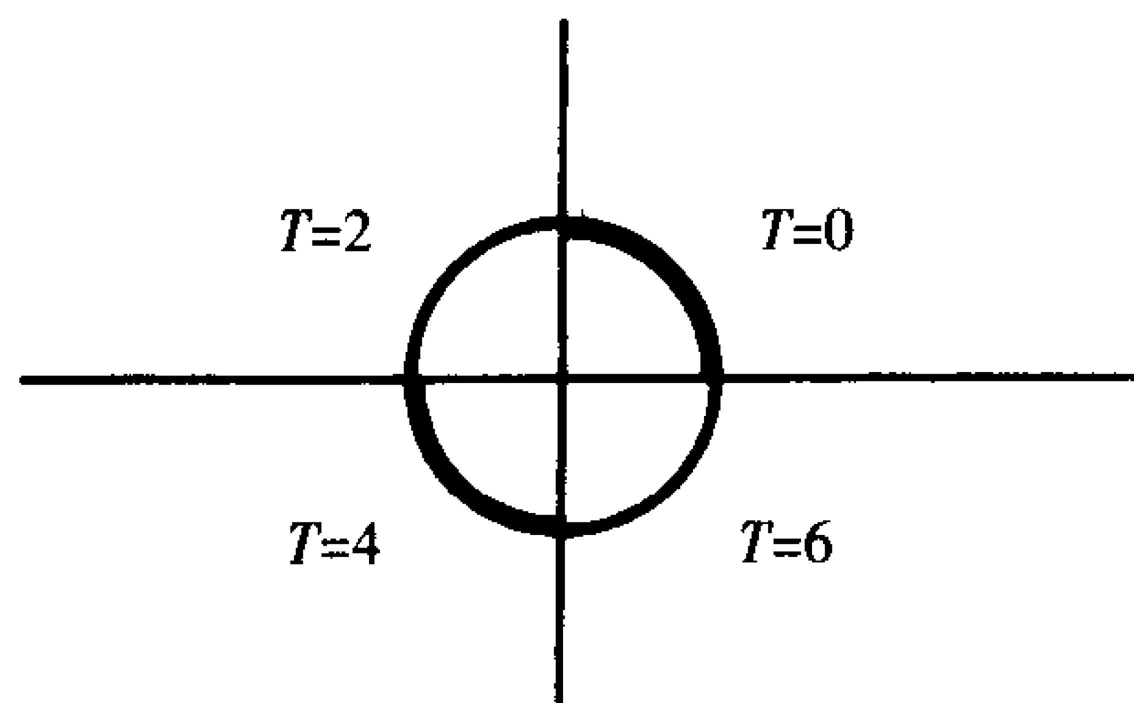


图 4-61 求圆心的温度

12. (施瓦茨积分公式)设 $f = u + iv$ 在圆盘 $|z| \leqslant R$ 内解析，由泊松积分公式，实部 u 在这个圆盘内的值可用它在圆盘边界上的值来表示. 试通过下面的步骤推导一个表达式，使虚部 v 可由实部 u 在圆周上的值来表示.

(a) 证明泊松积分公式(4)可写为

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{it}, z)\,u(Re^{it})\,dt,$$

其中泊松核 P 为

226

$$P(\zeta, z) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

(b) 证明

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = P(\zeta, z) + 2i\frac{\operatorname{Im} z\bar{\zeta}}{|\zeta - z|^2};$$

即 $P(\zeta, z)$ 为 $(\zeta + z)/(\zeta - z)$ 的实部.

(c) 由定理 15，证明

$$H(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta| = R} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{u(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$$

是 $|z| < R$ 内的解析函数.

(d)将参数函数 $\zeta = Re^{it}$ 代入 $H(z)$ 的积分中，得到

$$\operatorname{Re} H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{it}, z)u(Re^{it})\,dt.$$

由泊松积分公式知它等于 $u(z)$.

(e)由于 $H(z)$ 和 $f(z)$ 是实部相等的两个解析函数，利用 2.5 节的理论证明它们只相差一个虚常数，即

$$f(z) = H(z) + iC.$$

将 $z=0$ 代入上式，利用圆周平均值定理(习题 6)证明 C 必然等于 $v(0)$.

综合以上结果得到施瓦茨积分公式

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{u(\zeta)}{\zeta}d\zeta + iv(0),\ |z| < R.}$$

(f)由施瓦茨积分公式两端的虚部相等得到 v 的用 u 的边界值表示的表达式：

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(Re^{it}, z)u(Re^{it})\,dt + v(0), \quad |z| < R,$$

其中

$$Q(\zeta, z) := 2\frac{\operatorname{Im} z\bar{\zeta}}{|\zeta - z|^2}.$$

227

13. 设 f 是一个整函数，当 $|z|$ 的值充分大时，它的实部满足 $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant M|z|^2$，其中 M 是一个常数. 通过以下步骤证明 f 一定是一个多项式.

(a)由施瓦茨公式[习题 12(e)]及 $R=2|z|$，证明 $|z|$ 充分大时，$|f(z)|$ 不超过 $|z|^2$ 的某个常数倍.

(b)应用练习 4.6 中的习题 7 证明：f 是一个次数不超过 2 的多项式.

14. (半平面内的泊松积分公式)设 $f=\phi+i\psi$ 在包含 x 轴和上半平面的区域内解析，且在这个区域内 $|f(z)| \leqslant K$，则调和函数 ϕ 在上半平面的值可由它在 x 轴上的值给出：

$$\phi(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi,0)\,d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2} \quad (y > 0).$$

下面是这个积分公式的简要推导过程，给出每步的证明.

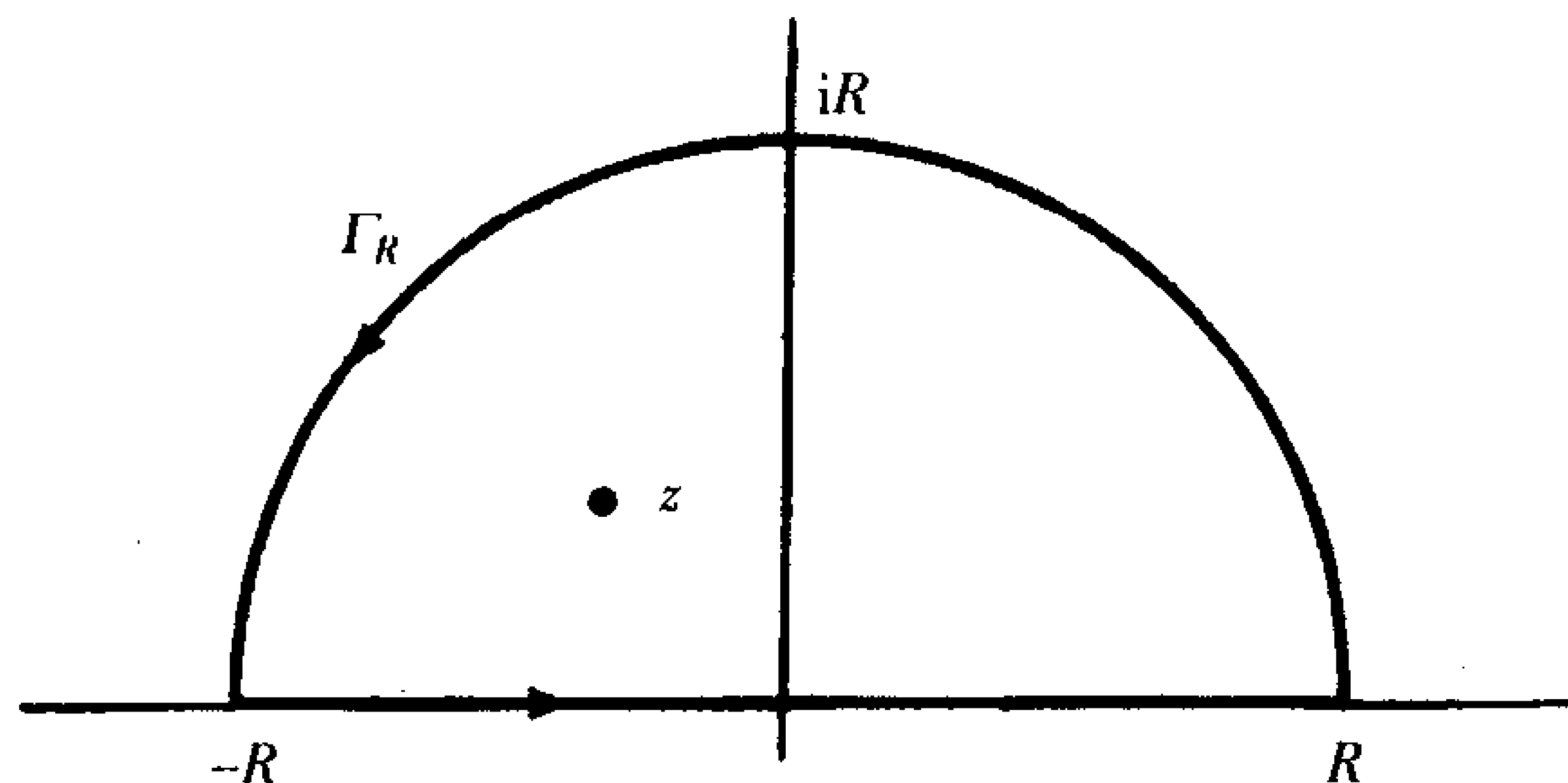


图 4-62 泊松积分公式

(a)如图 4-62 所示，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

(b)由图 4-62，又有

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \bar{z}}d\zeta.$$

(c)两式相减得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} f(\xi)\frac{2i\operatorname{Im} z}{|\xi - z|^2}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+} f(\zeta)\frac{2i\operatorname{Im} z}{(\zeta - z)(\zeta - \bar{z})}d\zeta,$$

其中 C_R^+ 是 Γ_R 的半圆弧.

(d)证明沿 C_R^+ 的积分的界是

$$\frac{K}{\pi}\frac{\operatorname{Im} z}{(R - |z|)^2}\pi R.$$

(e)在最后的方程中令 $R\to\infty$ 并取实部.

15. 习题 14 的泊松积分公式还可以做一些推广. 对合适的函数 $U(\xi)$，积分

228

$$\phi(x,y) := \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi$$

定义了半平面上的一个调和函数，当 z 趋向于 U 的连续点 x 时有极限值 $U(x)$. 若 x 轴上的温度分布如图 4-63所示，则利用上述积分公式可求上半平面内的温度.（这个问题已在 3.4 节的例 3 中用初等方法作了解答.）

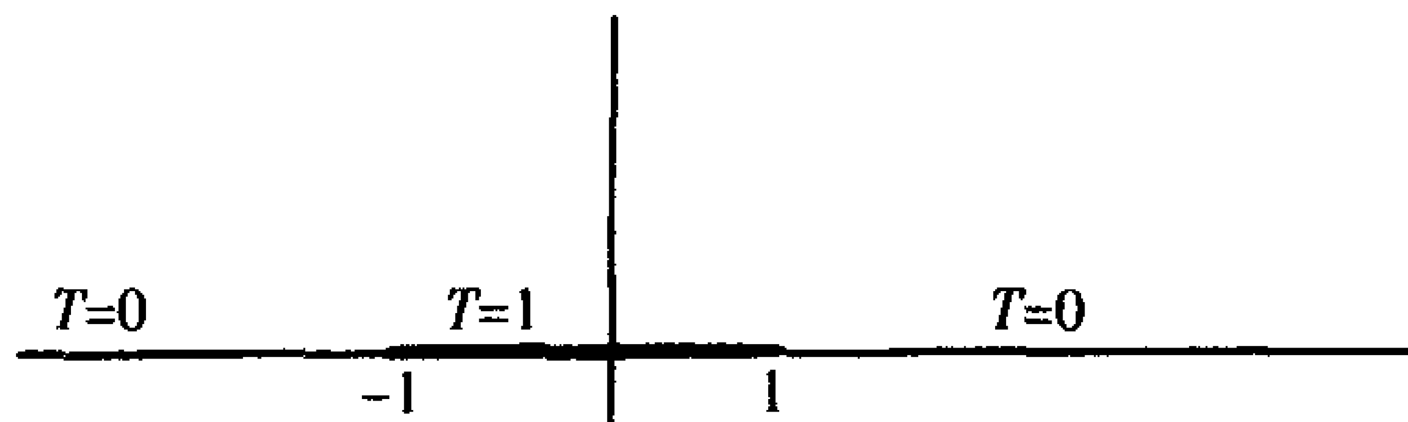


图 4-63 求上半平面内的温度

16. （半平面上的施瓦茨积分公式）设 $f=u+iv$ 在上半闭平面内解析且 $|f|$ 有界，那么由泊松积分公式，对于 $y>0$，$u(x, y)$ 的值可由 u 在实轴上的值表示（习题 14）. 如果 f 满足一个更强的条件，那么对习题 14 的推导过程做些修改，当 $y>0$ 时，虚部 $v(x, y)$ 的值也可以由 u 在实轴上的值表示.

(a) 习题 14 的 (a)(b) 两步不变，在 (c) 中将两式相加得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}f(\xi)\frac{2(\xi-x)}{|\xi-z|^2}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+}f(\zeta)\frac{2(\zeta-x)}{(\zeta-z)(\zeta-\bar{z})}d\zeta.$$

(b) 证明：在上半闭平面上当 $|z|$ 充分大时，若 f 满足不等式 $|f(z)|\leq K/|z|^{\alpha}(\alpha>0)$，则当 $R\to\infty$ 时，沿 C_R^+ 的积分趋于 0. 因此，对这样的 f,

229

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\frac{(\xi-x)}{|\xi-z|^2}d\xi \quad (\text{对 } \operatorname{Im} z>0).$$

(c) 使上式虚部相等得

$$v(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,0)\frac{(\xi-x)}{|\xi-z|^2}d\xi, \quad \operatorname{Im} z>0.$$

(d) 结合上式及泊松积分公式，得到上半平面的施瓦茨积分公式

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-z}d\xi, \quad \operatorname{Im} z>0.}$$

17. 在习题 16 的假设下，施瓦茨积分公式也可定义一个下半平面的函数，记为 $\tilde{f}(z)$.

(a) 证明：对 $\operatorname{Im} z<0$，有 $\tilde{f}(z)=-\overline{f(\bar{z})}$，从而 $\tilde{f}(z)$ 在下半平面内解析.

(b) 由 (a) 中的等式证明当 z 从上方穿过 x 轴时，积分

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-z}d\xi$$

的改变量为实数 $-2u(x, 0)$.

18. 利用习题 16 和习题 17 中的结果推导

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\xi^2+1)(\xi-z)}d\zeta \quad (\operatorname{Im} z>0)$$

及

$$\frac{-1}{z-i} = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{(\xi^2+1)(\xi-z)}d\xi \quad (\operatorname{Im} z<0).$$

（由练习 6.3 习题 12 可直接验证这两个积分.）证明：当 z 穿过 x 轴时积分值的改变量等于 $-2x/(x^2+1)$.

小结

复平面上的积分是沿周线取的，其中周线由有向光滑曲线首尾相连而得. 复变函数沿光滑曲线上的定积分定义与微积分中黎曼和的定义类似. 周线积分 $\int_{\Gamma}f(z)dz$ 等于沿 Γ 的光滑部分的积分之和.

计算沿周线 Γ 的积分的基本方法是：先确定周线 Γ 的一个参数方程 $z=z(t)$，$a\leq t\leq b$，然后把这个周线

积分按照下面的形式转化为关于实变量 t 的积分：

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

当被积函数 $f(z)$ 在含有 Γ 的区域内解析时，下面的结论在计算 $\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ 时可以使用： 230

1.（微积分基本定理）若 f 在一个含有 Γ 的区域内有原函数 F，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_T) - F(z_I),$$

其中 z_I，z_T 分别是 Γ 的起点和终点.

2.（柯西定理）若 Γ 为简单闭周线（即 $z_I = z_T$ 但无其他自交点），f 在 Γ 上及其内部解析，则 $\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

3.（柯西积分公式）若 Γ 为正向简单闭周线，$f(z) = g(z)/(z-z_0)$，其中 g 在 Γ 上及其内部解析，又 z_0 在 Γ 的内部，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} g(z_0).$$

更一般地，有

$$\int_{\Gamma} \frac{g(z)\,\mathrm{d}z}{(z-z_0)^m} = \frac{2\pi \mathrm{i} g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

4. 如果 f 可写为 $f(z) = g(z)/[(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}]$，其中 g 是情形(3)中的函数，点 z_1 和 z_2 在简单闭周线 Γ 的内部，则由部分分式可将 $\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$ 转化为(3)的情形.

5.（形变不变性定理）若闭周线 Γ 不经过 f 的任何奇点可连续形变到另一条闭周线 Γ'，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

若 f 的解析区域是单连通的（即没有“洞”），则 f 有原函数且 f 的积分与路径无关.

关于解析函数，柯西积分公式有许多的推论，例如，解析函数的无穷次可微性（参见3），刘维尔定理（有界整函数是常数），代数学基本定理（任何非常数多项式都有一个零点），以及最大模定理（$|f|$ 的最大值在有界区域的边界上达到）.

在单连通区域内，调和函数可看作是一个解析函数的实部. 因此调和函数的有些性质与解析函数类似，例如无穷次可微性，最大值原理和泊松公式（类似柯西积分公式）. 231

参考文献

下列参考文献对本章的一些主题有更为详细的介绍，供有兴趣的读者参考.

曲线理论，弧长

[1] ⊖ Apostol, T.M. *Mathematical Analysis*, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1974.

[2] Nevanlinna, R., and Paatero, V. *Introduction to Complex Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1969.

若尔当曲线定理

[3] Pederson, R.N. "The Jordan Curve Theorem for Piecewise Smooth Curves." *American Mathematical Monthly* **76** (1969), 605–610.

黎曼和，积分

参考2.

⊖ 本书的中文版、影印版已由机械工业出版社引进出版，中文书名为《数学分析》. ——编辑注

曲线的连续形变，柯西定理

[4] Conway, J.B. *Functions of One Complex Variable*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1978.

[5] Flatto, L., and Shisha, O. "A Proof of Cauchy's Integral Theorem." *Journal of Approximation Theory* 7 (1973), 386–390.

[6] Courant, R., and Hurwitz, A., *Vorlesungen uber Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen*, Springer, Berlin, 1964.

积分的莱布尼茨法则

[7] Taylor, A.E., and Mann, W.R. *Advanced Calculus*, 3rd ed. Wiley, New York, 1983.

格林定理

[8] Borisenko, A.I., and Tarapov, THAT IS *Vector and Tensor Analysis with Applications* (trans. from Russian by R.A. Silverman). Dover, New York, 1979.

[9] Davis, H., and Snider, A.D. *Introduction to Vector Analysis*, 7th ed. Quant Systems, Charleston, SC, 1994.

232

泊松公式

[10] Fisher, S.D. *Function Theory on Planar Domains*. Wiley-Interscience, New York, 1983.

[11] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vol. 2, 2nd ed. Chelsea, New York, 1973.

其他问题

[12] Spiegel, M.R. *Theory and Problems of Complex Variables*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

233

第5章 解析函数的级数表示

5.1 序列与级数

在第2章我们给出了复数序列收敛的定义，即当 n 充分大时，若 $|A-A_n|$ 可以任意小，则称序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 A 为极限. 为了计算上的方便，通常把序列中的某一 A_n 作为 A 的近似值. 例如，在计算圆的面积时，我们通常用序列 3.14，3.141，3.141 5，3.141 59，…中的一个作为 π 的近似值. 使用序列，尤其是使用这种同级数有关的序列，是解析函数的理论和应用上的重要工具. 本章将深入讨论这一课题.

任何一个做过

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16},\cdots$$

这种加法运算的人都会遇到对无限个数求和的问题. 由于上述和序列显然以1为极限，所以我们认为可以说 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$. 将这一问题推广，如果当 n 趋近于 ∞ 时，形如 $c_0+c_1+c_2+\cdots$ 的无穷级数的前 n 项的和趋近于 S，则称此级数的和为 S. 常用的术语归纳在下面的定义中.

> **定义1** 一个**级数**是形如
>
> $$c_0+c_1+c_2+\cdots$$
>
> 的表达式，记作 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$，其中**项** c_j 均为复数. 它的前 $n+1$ 项的和称为级数的**第 n 个部分和**，通常记为 S_n，即 $S_n:=\sum_{j=0}^{n} c_j$. 如果部分和序列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 具有极限 S，则称级数**收敛**于 S，或级数的**和**(sum)为 S，记作 $S=\sum_{j=0}^{\infty} c_j$. 不收敛的级数称为**发散**的.

235

注意，级数收敛的概念是根据序列收敛来定义的. 例如，π 是级数 $3+0.1+0.04+0.001+0.0005+0.00009+\cdots$ 的和.

显然可以这样验证级数收敛于 S，即证明当 $n\to\infty$ 时，前 $n+1$ 项求和后的余项 $S-\sum_{j=0}^{n} c_j$ 趋近于0. 我们用这种技巧描述几何级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ 的收敛性，这是一种简单但是极为有用的级数.

> **引理1** 如果 $|c|<1$，则级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ 收敛于 $1/(1-c)$；即
>
> $$1+c+c^2+c^3+\cdots=\frac{1}{1-c},\quad |c|<1. \tag{1}$$
>
> (习题6表明这一级数在 $|c|\geq 1$ 时发散.)

证 注意

$$\begin{aligned}(1-c)(1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}+c^n) &= 1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}+c^n-c-c^2-\cdots-c^{n-1}-c^n-c^{n+1}\\ &= 1-c^{n+1}.\end{aligned}$$

整理得

$$\frac{1}{1-c}-(1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}+c^n)=\frac{c^{n+1}}{1-c}. \tag{2}$$

因为 $|c|<1$，所以引理得证. 公式(2)说明余项为 $c^{n+1}/(1-c)$，当 $n\to\infty$ 时，余项趋近于 0（参见练习 2.2 中习题 6）. ■

另一种验证级数收敛性的重要方法是将此级数同已知的收敛级数相比较. 下面的定理推广了微积分中的一个结论，似乎是显然的，读者自证并参看 5.4 节.

236

> **定理 1（比较判别法）** 设 J 为某个数. 如果当 $j\geq J$ 时，有
> $$|c_j|\leq M_j,$$
> 则当级数 $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ 收敛时，级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ 也收敛.

例 1 证明级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(3+2\mathrm{i})/(j+1)^j$ 收敛.

证 将级数

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{3+2\mathrm{i}}{(j+1)^j}=(3+2\mathrm{i})+\frac{(3+2\mathrm{i})}{2}+\frac{(3+2\mathrm{i})}{9}+\frac{(3+2\mathrm{i})}{64}+\cdots \tag{3}$$

同收敛几何级数

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \tag{4}$$

相比较. 因为 $|3+2\mathrm{i}|=\sqrt{13}<4$，易证

$$\left|\frac{3+2\mathrm{i}}{(j+1)^j}\right|<\frac{4}{(j+1)^j},$$

并且当 $j\geq 3$ 时，上式小于 $1/2^j$. 由于级数(4)收敛，由定理 1，级数(3)也收敛. ■

有时采用比值判别法判别级数的敛散性.

> **定理 2（比值判别法）** 假设级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ 的项具有性质：当 $j\to\infty$ 时，比值 $|c_{j+1}/c_j|$ 趋近于极限 L. 那么，当 $L<1$ 时级数收敛，$L>1$ 时级数发散.

可以将给定级数同一个由几何级数 $\sum_{j=0}^{\infty} L^j$ 修改得到的级数相比较来证明这一定理. 见习题 15.

例 2 证明级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4^j}{j!}$ 收敛.

证 我们有

$$\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| = \frac{4^{j+1}}{(j+1)!}\frac{j!}{4^j} = \frac{4}{j+1}.$$

当 $j \to \infty$ 时，比值趋近于 0，所以级数收敛. ■

我们指出，如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$ 收敛，则称级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ 绝对收敛. 应用通常的比较判别法易知任何绝对收敛的级数一定是收敛的.

在复分析中常见的序列和级数的项是复变量 z 的函数. 所以如果有一个函数序列 $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, …, 我们必然要考虑对哪些 z 序列收敛，对哪些 z 序列发散. 例如，当 $|z| < |2i| = 2$ 时，序列 $(z/2i)^n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ 趋于 0，当 $z = 2i$ 时，它（显然）趋于 1，当 z 取其他值时没有极限（见习题 4）. 类似地，复变函数项级数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ 可能对某些 z 的值收敛，对某些 z 的值发散. [237]

例 3 如果 $z_0(\neq 0)$ 固定，证明级数 $\sum_{j=0}^{\infty} (z/z_0)^j$ [与序列 $(z/z_0)^j$ 完全不同] 当 $|z| < |z_0|$ 时收敛.

证 这仅仅是引理 1 的一个细小变化. 事实上，在公式(2)中令 $c = z/z_0$ 得

$$\frac{1}{1 - z/z_0} - \left[1 + \frac{z}{z_0} + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right] = \frac{(z/z_0)^{n+1}}{1 - z/z_0}. \tag{5}$$

所以，当 $|z| < |z_0|$ 时，级数和收敛于函数 $1/(1 - z/z_0)$. ■

将这一理论应用于解析函数时我们需要更强的收敛概念. 例如，考虑实函数序列 $F_n(x) = x^n$，图 5-1 是其在半开区间 $[0, 1)$ 上的图形，显然，在这个集合上序列 $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于函数 $F(x) \equiv 0$；即对任意给定的 x，当 n 充分大时，幂 x^n 变得很小. 但是曲线 $y = x^n (0 \leq x < 1)$ 中的任何一条都不能够很好地逼近曲线 $y = 0$，这是因为每一条曲线在 $[0, 1)$ 中每点的右邻域总有 x^n 的（相对）较大值. 我们称这种收敛是*点态*（pointwise）收敛，而不是*一致*（uniform）收敛. 从而我们有下面的定义.

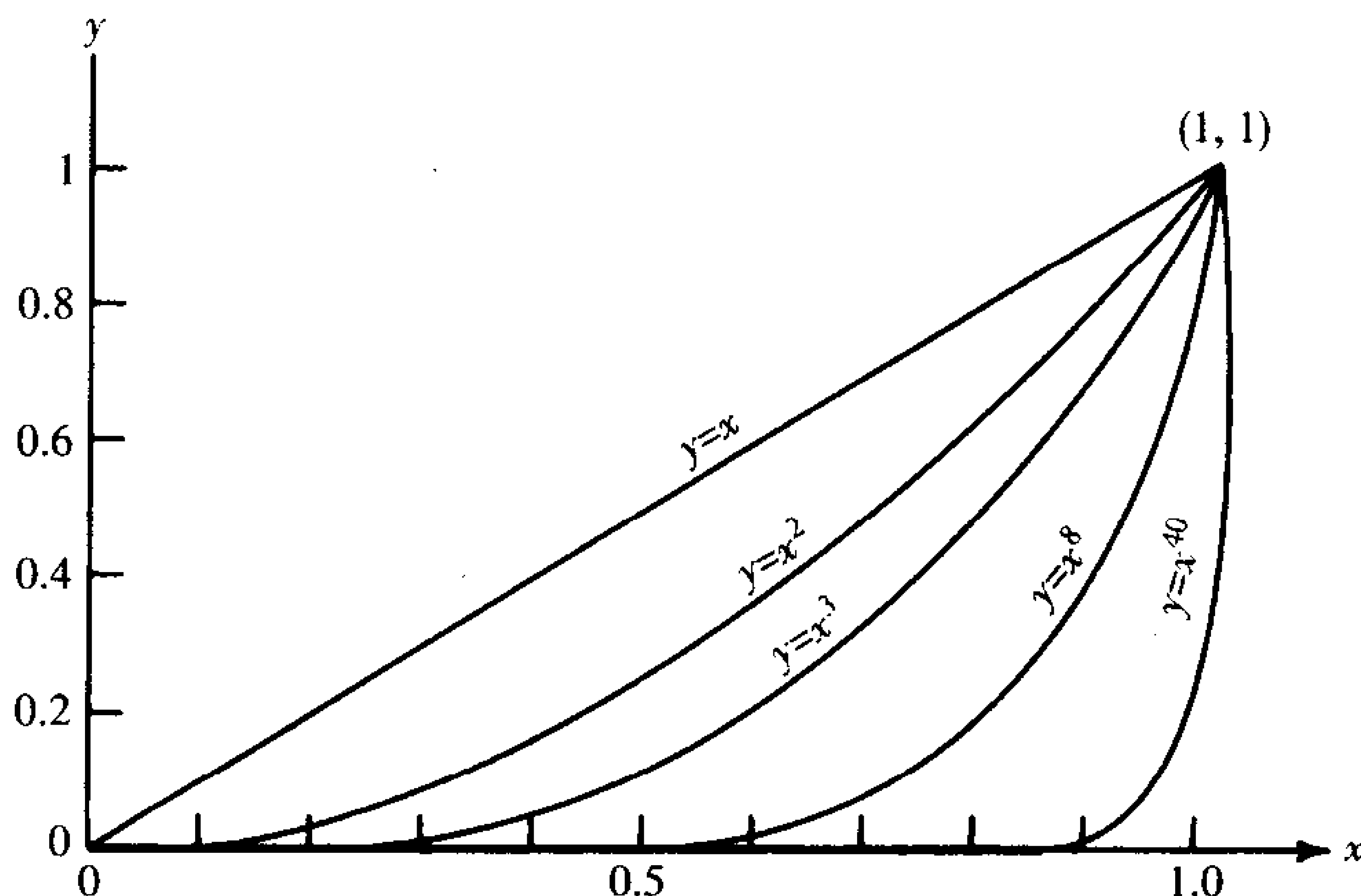


图 5-1 函数 $F_n(x) = x^n$ 点态收敛于 0，但在 $[0, 1)$ 上不一致收敛 [238]

定义 2 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个整数 N，使得当 $n>N$ 时，对所有的 $z\in T$ 有

$$|F(z)-F_n(z)|<\varepsilon,$$

则称序列 $\{F_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ **在集合 T 上一致收敛于** $F(z)$.

相应地，如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ 的部分和序列在 T 上一致收敛于 $f(z)$，则称级数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ 在 T 上一致收敛于 $f(z)$.

一致收敛的本质是对任意的 $\varepsilon>0$，都能够找到一个与 T 中所有的 z 都无关的 N，使得当 $n>N$ 时，$|F(z)-F_n(z)|<\varepsilon$. 而对点态收敛来说，$N$ 同 z 有关（见习题 17）. 显然，在 T 上一致收敛必然点态收敛.

例 4 证明当 $r<|z_0|$ 时，例 3 中的级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(z/z_0)^j$ 在每个闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 内一致收敛.

证 给定 $\varepsilon>0$，我们要证明当 n 充分大时，对圆盘内所有的点 z，$n+1$ 项后的余项小于 ε. 这是容易做到的. 事实上，当 $|z|\leqslant r$ 时，由公式(5)可以找到余项的一个与 z 无关的上界：

$$\left|\frac{(z/z_0)^{n+1}}{1-z/z_0}\right|\leqslant\frac{(r/|z_0|)^{n+1}}{1-r/|z_0|},$$

因为 $r<|z_0|$，此上界可以任意小. ■

从例 3 和例 4 可以看出，级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(z/z_0)^j$ 在开圆盘 $|z|<|z_0|$ 内点态收敛，在任意闭子圆盘 $|z|\leqslant r<|z_0|$ 内一致收敛.

练习 5.1

1. 求下列收敛级数的和.

(a) $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^j$　(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{(1+i)^k}$　(c) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{2}{3}\right)^j$

(d) $\sum_{k=14}^{\infty}\left(\frac{1}{2i}\right)^k$　(e) $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2j}$　(f) $\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{j+2}-\frac{1}{j+1}\right]$

2. 用比值判别法证明下列级数收敛.

239

(a) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}$　(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3+i)^k}{k!}$　(c) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j^2}{4^j}$　(d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$

3. 证明：如果序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，则当 $n\to\infty$ 时，$(z_n-z_{n-1})\to 0$.

4. 设 $z_0\neq 0$. 证明如果 $|z|\geqslant|z_0|$，$z\neq z_0$，则序列 $(z/z_0)^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 发散. [提示：当 $|z|=|z_0|$ 时，注意

$$\left|\left(\frac{z}{z_0}\right)^n-\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-1}\right|=\left|\frac{z}{z_0}-1\right|>0$$

并利用习题 3 的结论.]

5. 证明：如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 收敛，则当 $j\to\infty$ 时，$c_j\to 0$. [提示：考虑相邻部分和的差 S_n-S_{n-1}.]

6. 证明：如果 $|c|\geqslant 1$，则级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c^j$ 发散. [提示：见习题 5.]

7. 判断下列级数收敛或发散.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^k$　(b) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2 3^j}$　(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n}{2n+1}$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j!}{5^j}$　(e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k^3}{(1+i)^k}$　(f) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(i^k-\frac{1}{k^2}\right)$

8. 证明下列结论.

(a) 如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 的和为 S,则级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\bar{c}_j$ 的和为 $\bar{S}$.

(b) 如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 的和为 S,λ 为任何复常数,则级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\lambda c_j$ 的和为 λS.

(c) 如果级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 的和为 S,级数 $\sum_{j=0}^{\infty}d_j$ 的和为 T,则级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(c_j+d_j)$ 的和为 $S+T$.

9. 证明级数 $\sum_{j=0}^{\infty}z_j$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(z_j)$ 和级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{Im}(z_j)$ 都收敛.

10. 证明函数序列 $F_n(z)=z^n/(z^n-3^n)(n=1,2,\cdots)$ 当 $|z|<3$ 时收敛于0,当 $|z|>3$ 时收敛于1.

11. 利用比值判别法,求下列函数项级数的收敛范围.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty}jz^j$　(b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{2^k}$　(c) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}$　(d) $\sum_{k=0}^{\infty}(z+5i)^{2k}(k+1)^2$

12. 令 $F_n(z)=[nz/(n+1)]+(3/n),n=1,2,\cdots$. 证明序列 $\{F_n(z)\}_1^{\infty}$ 在每个闭圆盘 $|z|\leqslant R$ 上一致收敛于 $F(z)=z$.

240

13. 证明当 $p>1$ 时级数 $\sum_{j=1}^{\infty}1/j^p$ 收敛.[提示:将积分 $\int_1^N(1/x^p)\mathrm{d}x$ 理解为面积,然后将 $\sum_{j=2}^{N}1/j^p$ 看作面积并进行比较.]

14. 利用比较判别法以及习题13的结论,证明下列级数收敛.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+i)}$　(b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k^2)}{k^{3/2}}$　(c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2 i^k}{k^4+1}$　(d) $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{5k+8}{k^3-1}\right)$

15. 证明比值判别法(定理2).[提示:如果 $L<1$,选取 $\varepsilon>0$ 和数 J 使得 $j\geqslant J$ 时,$|c_{j+1}/c_j|<L+\varepsilon<1$. 然后证明 $k>J$ 时 $|c_k|\leqslant|c_J|(L+\varepsilon)^{k-J}$ 并利用比较判别法.]

16. 证明序列 $\{z_n\}_1^{\infty}$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(z_{k+1}-z_k)$ 收敛.

17. 考虑实区间 $T=(0,1)$ 内的函数项序列 $F_n(x)=x^n(n=0,1,2,\cdots)$,它在 T 上点态收敛于 $F(x)=0$. 证明:对 $0<x<1$,当且仅当 $n>N_x$ 时,

$$|F_n(x)-F(x)|<\frac{1}{2},$$

其中 $N_x:=\frac{\mathrm{Log}2}{\mathrm{Log}(x^{-1})}$.(注意当 $x\to1^-$)时,$N_x\to\infty$. 所以当 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时,在 T 中不可能找到与 x 无关的 N 满足定义2. 这说明此序列在 T 上不一致收敛.)

18. 假设函数序列 $\{F_n(z)\}_1^{\infty}$ 在集合 T 上一致收敛于 $F(z)$. 证明:如果对 T 上所有的 z,$|F(z)|\geqslant\rho>0$,则存在整数 N,使得 $n>N$ 时不等式 $|F_n(z)|>\rho/2$ 对 T 上所有的 z 成立.[提示:在定义2中选取 $\varepsilon=\frac{\rho}{2}$ 并应用三角不等式.]

19. 在下一节我们将证明级数 $\sum_{k=0}^{\infty}z^k/k!$ 在每个圆盘 $|z|\leqslant R$ 上一致收敛于 e^z. 利用这一结论,证明对充分大的 n,当 $|z|\leqslant5$ 时,多项式 $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}z^k/k!$ 中没有一个有零点.[提示:利用习题18.](圆盘 $|z|\leqslant5$ 没有特殊

性，在任意有界集上有同样的结论成立．）

241

20. 证明在开圆盘 $|z|<1$ 上，级数 $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ 不一致收敛于 $1/(1-z)$.

21. 一只越来越懒惰并且作不均衡跳跃的青蛙，第一跳跳了 1 米（从 $z=0$ 到 $z=1$），第二跳跳了 1/2 米，第三跳跳了 1/4 米，第四跳跳了 1/8 米，依此类推，而且每一次跳跃都在其前一次跳跃路径上向左转一个角度 α. 用复代数验证不论 α 取什么值，青蛙最终必将趋近于圆 $|z-4/3|=2/3$ 上的某一位置.

5.2 泰勒级数

假定我们希望找一个次数最多为 n 的多项式 $p_n(z)$，它在 z_0 的某一邻域内逼近于解析函数 $f(z)$. 当然对于多项式逼近解析函数的优劣程度有不同的标准. 现在构造一个在点 z_0 处和 $f(z)$"看起来相似"的多项式，这种相似的意义是它在 z_0 处的各阶导数同 f 在 z_0 处的各阶导数尽可能相同：

$$
\begin{aligned}
p_n(z_0) &= f(z_0) \\
p'_n(z_0) &= f'(z_0) \\
&\vdots \\
p_n^{(n)}(z_0) &= f^{(n)}(z_0).
\end{aligned}
$$

[当然，任意 n 次多项式的 $n+1$ 阶导数必为 0.]

由 3.1 节可知，上面等式决定了 $p_n(z)$ 的泰勒形式，按照 3.1 节的公式(2)，在 z_0 处的导数值依次为 $f(z_0)$，$f'(z_0)$，$f''(z_0)$，…，$f^{(n)}(z_0)$ 的 n 次多项式是

$$
p_n(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \quad (1)
$$

⊖

自然地，我们猜测随着 n 趋向于∞时，$p_n(z)$ 在 z_0 附近与 $f(z)$ 的逼近程度越来越好. 实际上，读者或许已经注意到，$p_n(z)$ 看起来像是一个级数的部分和，所以可以预测这一级数收敛于 $f(z)$. 下面的定义和定理给出了这个问题的精确陈述.

定义 3 如果 $f(z)$ 在 z_0 解析，则级数

$$
f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j \quad (2)
$$

称为 f 在 z_0 处的**泰勒级数**（Taylor series）. 特别地，当 $z_0=0$ 时，称其为 f 的**麦克劳林**（Maclaurin）**级数**.

242

定理 3 如果 f 在圆盘 $|z-z_0|<R$ 内解析，则对于圆盘内所有的点 z，其泰勒级数(2)收敛于 $f(z)$. 并且，级数在任何闭子圆盘 $|z-z_0|\le R'<R$ 上一致收敛.

证 注意到如果我们证明了级数在每一个闭子圆盘 $|z-z_0|\le R'<R$ 内一致收敛，则级数在开圆盘 $|z-z_0|<R$ 内每个点 z 处点态收敛（为什么）；所以我们只考虑闭子圆盘的情

⊖ 实际上，如果 $f^{(n)}(z_0)=0$，$p_n(z)$ 的次数将小于 n.

况. 假设 C 为正向圆周 $|z-z_0| = \frac{R+R'}{2}$(参见图 5-2). 根据柯西积分公式，对闭子圆盘内任意的点 z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

我们通过将 $(\zeta - z)^{-1}$ 写成 $(z-z_0)/(\zeta - z_0)$ 的幂的几何级数的形式来重写被积函数. 由图 5-2，$|z-z_0| / |\zeta - z_0| < 1$，所以这个几何级数收敛. 令 $c = (z-z_0)/(\zeta - z_0)$，利用 5.1 节公式(2)，有

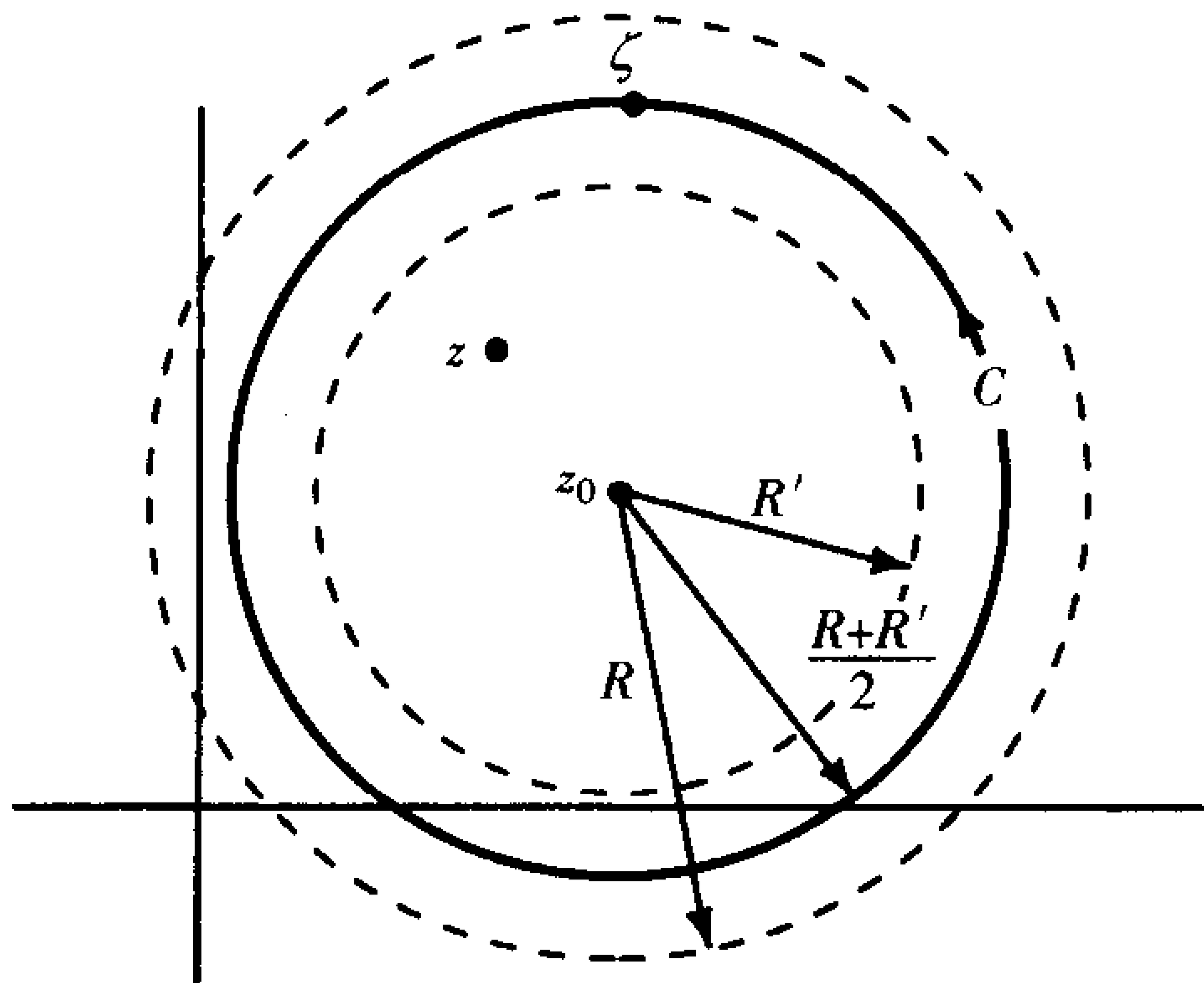


图 5-2　在闭子圆盘上一致收敛

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{1}{\zeta - z_0}$$

$$= \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(\zeta - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} + \frac{\frac{(z-z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right]\frac{1}{\zeta - z_0}, \tag{3}$$

243

把上式代入柯西积分公式并逐项进行积分，得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\xi - z_0}d\zeta + \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta$$

$$+ \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}d\zeta + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta + T_n(z), \tag{4}$$

其中 $T_n(z)$(稍加变形)可被表示为

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta. \tag{5}$$

根据柯西积分的求导公式，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta = f(z_0), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}d\zeta = f'(z_0),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^3}d\zeta = \frac{f''(z_0)}{2!}, \cdots,$$

因此公式(4)等号右端的前 $n+1$ 项为(2)中级数的第 n 个部分和，所以 $T_n(z)$ 是余项. 我们必须证明当 n 充分大时，对于子圆盘内所有的 z，$T_n(z)$ 可以“一致地小”.

为此，只需应用第 4 章中的积分不等式(4.2 节定理 5)，并对比值 $|z-z_0| / |\zeta - z_0|$ 进行估计. 对于式(5)中被积函数的各项，我们有

$$|z - z_0| \leqslant R', \quad |\zeta - z_0| = \frac{R+R'}{2}, \quad \frac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} \leqslant \frac{2R'}{R+R'},$$

由图 5-2，又有

$$|\zeta - z| \geqslant \frac{R+R'}{2} - R' = \frac{R-R'}{2}.$$

注意到曲线 C 的长度为 $2\pi(R+R')/2$. 所以对于子圆盘内的 z，

$$|T_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\zeta \in C} |f(\zeta)| \frac{2}{R-R'}\left(\frac{2R'}{R+R'}\right)^{n+1} 2\pi\left(\frac{R+R'}{2}\right).$$

因为上式右端与 z 无关，又 $2R' < R+R'$，所以当 n 充分大时，$|T_n(z)|$ 可以小于任意给定的正数 ε. ■

244 这个定理表明，泰勒级数在以 z_0 为心，f 在其上解析的最大开圆盘内收敛到 $f(z)$.

例 1 计算并说明下列各函数在指定点处的泰勒级数的收敛性.

(a) $\mathrm{Log}z$，$z_0 = 1$.

(b) $1/(1-z)$，$z_0 = 0$.

(c) e^z，$z_0 = 0$.

解 (a) $\mathrm{Log}z$ 的各阶导数为 $\mathrm{Log}z$，z^{-1}，$-z^{-2}$，$2z^{-3}$，$-3 \cdot 2z^{-4}$，…. 一般地，有

$$\frac{\mathrm{d}^j \mathrm{Log}z}{\mathrm{d}z^j} = (-1)^{j+1}(j-1)!z^{-j} \quad (j = 1,2,\cdots).$$

通过计算 $z=1$ 时各阶导数的值，我们得到

$$\mathrm{Log}z = 0 + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2!} + 2!\frac{(z-1)^3}{3!} - 3!\frac{(z-1)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}(z-1)^j}{j}. \tag{6}$$

上式对于 $|z-1| < 1$ 成立，$\mathrm{Log}z$ 在这个以 1 为心的最大开圆盘 $|z-1| < 1$ 内解析.

(b) $(1-z)^{-1}$ 的各阶导数为 $(1-z)^{-1}$，$(1-z)^{-2}$，$2(1-z)^{-3}$，$3 \cdot 2(1-z)^{-4}$，…. 一般地，

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j}(1-z)^{-1} = j!(1-z)^{-j-1}.$$

计算 $z=0$ 时各阶导数的值，得到在 $|z| < 1$ 成立(为什么)的泰勒级数

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \frac{2!z^2}{2!} + \frac{3!z^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} z^j, \tag{7}$$

这个级数正是引理 1 中的几何级数.

(c) 因为

$$\frac{\mathrm{d}^j \mathrm{e}^z}{\mathrm{d}z^j} = \mathrm{e}^z, \quad j = 0,1,\cdots,$$

这些导数在 $z=0$ 时的值均为 1，所以

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

因为 e^z 是整函数，上式对所有的 z 都成立. ■

我们再回到由公式(6)表示的 $\mathrm{Log}z$ 的泰勒级数. 如果对级数逐项微分，得到

$$1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}(1-z)^j, \tag{8}$$

245

恰好去掉了各项前的负号. 再用 $1-z$ 代替 z，则级数(8)就具有同公式(7)中级数相同的形式. 所以级数(8)实际上收敛于函数 $1/[1-(1-z)]=1/z$. 换言之，通过对 Log$z$ 的级数微分得到 $1/z$ 的级数展开式，而 $1/z$ 实际上正是 Log$z$ 的导数. 这就引发了我们如下的猜想.

定理 4 如果 f 在 z_0 解析，则通过对 f 在 z_0 处的泰勒级数逐项求导得到 f' 在 z_0 处的泰勒级数，并且二者具有相同的收敛圆盘.

证 因为 f' 的 j 阶导数是 f 的 $j+1$ 阶导数，所以 f' 在 z_0 处的泰勒级数为

$$f'(z_0)+f''(z_0)(z-z_0)+\frac{f'''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots. \tag{9}$$

另一方面，对泰勒级数(2)逐项微分，得出和(9)式相同的式子

$$0+1\cdot f'(z_0)+\frac{2}{2!}\cdot f''(z_0)(z-z_0)+\frac{3}{3!}\cdot f'''(z_0)(z-z_0)^2+\cdots,$$

并且，将定理 3 应用于函数 $f'(z)$，可知级数(9)在以 z_0 为心，f' 在其上解析的最大开圆盘内收敛. 但是，根据 4.5 节定理 16，f 解析时，f' 也解析. 定理得证. ■

例 2 求 sin$z$ 和 cos$z$ 的麦克劳林级数.

解 按通常方法展开 sin$z$. 它的 0，1，2，…阶导数依次为 sin$z$，cos$z$，$-$sin$z$，$-$cos$z$，sin$z$，…. 计算它们在原点的值，得

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots, \tag{10}$$

因为 sin$z$ 是整函数，上式对所有的 z 都成立. 为了得到 cos$z$ 的麦克老林级数，对公式(10)微分：

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots. \tag{11}$$

读者现在应该能够预料到如果对公式(11)进行微分会得到什么结果. ■

下面两个定理有时可以简化泰勒级数的计算.

246

定理 5 假设 f 和 g 是解析函数，它们在点 z_0 处的泰勒级数分别为 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 和 $g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j(z-z_0)^j$ [即 $a_j=f^{(j)}(z_0)/j!$, $b_j=g^{(j)}(z_0)/j!$]. 则

(i) $cf(z)$ 的泰勒级数是 $\sum_{j=0}^{\infty}ca_j(z-z_0)^j$，其中 c 是常数.

(ii) $f(z)\pm g(z)$ 的泰勒级数是 $\sum_{j=0}^{\infty}(a_j\pm b_j)(z-z_0)^j$.

证明很简单，留给读者作为练习. $f\pm g$ 的收敛圆盘当然至少和 f 与 g 的收敛圆盘中较小的一样大.

例 3 求 $\cos z + \mathrm{i}\sin z$ 的麦克劳林级数.

解 由展开式(10)和(11)，对所有的 z，我们有

$$\cos z + \mathrm{i}\sin z = 1 + \mathrm{i}z - \frac{z^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{\mathrm{i}z^5}{5!} - \cdots = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

(这给出了 1.4 节例 1 中所做的计算的依据.) ■

定理 5 自然引导我们思考相应的有关乘积的命题. 首先需要找出一种两个泰勒级数相乘的合理方法. 建议通过应用分配律，然后按$(z-z_0)$的幂组合各项的方式定义在点 z_0 处的两个泰勒级数的柯西乘积. 所以，如果 $z_0=0$，求得柯西乘积为

$$\begin{aligned}&[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots]\cdot[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots]\\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)z^2 \\ &\quad + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3)z^3 + \cdots.\end{aligned} \tag{12}$$

所以 z^j的系数 c_j 为

$$c_j = a_j b_0 + a_{j-1} b_1 + a_{j-2} b_2 + \cdots + a_1 b_{j-1} + a_0 b_j = \sum_{\ell=0}^{j} a_{j-\ell} b_\ell. \tag{13}$$

定义 4 两个泰勒级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ 和 $\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-z_0)^j$ 的**柯西乘积**定义为(形式上)级数 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$，其中 c_j 由公式(13)给出.

247

定理 6 假设 f 和 g 是解析函数，它们在点 z_0 处的泰勒级数为 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ 和 $g(z)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-z_0)^j$，则**乘积 fg 在点 z_0 处的泰勒级数**由这两个级数的柯西乘积给出.

实际上，就像一个普通乘积一样，在有选择地写出(12)中的柯西乘积时，我们已经预感到了这一结果. 如同定理 5，fg 的泰勒级数至少在 f 与 g 的收敛圆盘中较小的圆盘内收敛.

定理 6 的证明 计算乘积 fg 的各阶导数：

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg',\\ (fg)'' &= f''g + 2f'g' + fg'',\\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',\end{aligned}$$

一般地，对 fg 的第 j 阶导数，我们有莱布尼茨(Leibniz)公式：

$$(fg)^{(j)} = \sum_{\ell=0}^{j} j!\frac{f^{(j-\ell)}}{(j-\ell)!}\cdot\frac{g^{(\ell)}}{\ell!}, \tag{14}$$

这一点请读者在习题 10 中证明.

另一方面，如果把公式(13)中的常数 a_k 和 b_k 取作 f 和 g 的导数的表达式[即 $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$]，由公式(14)知，$(fg)^{(j)}/j!$ 在 z_0 处的值恰好是 c_j. 证毕. ■

例 4 用柯西乘积求 $\sin z\cdot\cos z$ 的麦克劳林级数.

解 我们有

$$\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$=z-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)z^3+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)z^5$$
$$-\left(\frac{1}{7!}+\frac{1}{5!}\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}\right)z^7+\cdots.$$

通过对系数进行化简，可以得到

$$\sin z\cdot\cos z=z-\frac{4}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5-\frac{64}{7!}z^7+\cdots,$$

把上式右端改写为

$$\frac{1}{2}\left[(2z)-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\frac{(2z)^7}{7!}+\cdots\right],$$

248

这正好是$\frac{1}{2}\sin\omega$，$\omega=2z$ 的泰勒级数. 这样，我们重现了一个著名的三角恒等式! ■

例 5 求 $\tan z$ 的麦克劳林级数的前几项.

解 $\tan z$ 的高阶导数的表达式很麻烦，所以我们准备应用柯西乘积. 首先注意到 $\cos z\cdot\tan z=\sin z$. 对 $|z|<\pi/2$（为什么是 $\pi/2$），令 $\tan z=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$. 乘积 $\cos z\cdot\tan z$ 为

$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)\cdot(a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+\cdots)$$
$$=a_0+a_1z+\left(a_2-\frac{a_0}{2!}\right)z^2+\left(a_3-\frac{a_1}{2!}\right)z^3+\left(a_4-\frac{a_2}{2!}+\frac{a_0}{4!}\right)z^4+\left(a_5-\frac{a_3}{2!}+\frac{a_1}{4!}\right)z^5+\cdots.$$

它应同 $\sin z=z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots$ 相等，递推求解得

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_2=0,\quad a_3=\frac{1}{3},\quad a_4=0,\quad a_5=\frac{2}{15},\text{等等.}$$

所以

$$\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\cdots.$$

细心的读者会发现我们实际上已经得到了一种泰勒级数相除的直接方法! ■

最后我们想要指出的是，泰勒展开式有效性的证明证实了 2.3 节中的一个论断，即任意解析函数都能被只包含 z，而不包含 $\bar{z}$，x 或 y 的公式表示出来.

练习 5.2

1. 用定义 3，通过求出 $f^{(j)}(z_0)$ 的一般公式验证下列各泰勒展开式.

(a) $e^{-z}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-z)^j}{j!}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad z_0=0$

(b) $\cosh z=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j}}{(2j)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots,\quad z_0=0$

(c) $\sinh z=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,\quad z_0=0$

249

(d) $\frac{1}{1-z}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-i)^j}{(1-i)^{j+1}},\quad z_0=i$

(e) $\mathrm{Log}(1-z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{-z^j}{j},\quad z_0=0$

(f) $z^3=1+3(z-1)+3(z-1)^2+(z-1)^3,\quad z_0=1$

2. 确定习题 1 中使泰勒展开式成立的圆盘.

3. 设 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 为在原点解析的函数 $f(z)$ 的麦克劳林展开式. 证明下列各命题.

(a) $\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^{2j}$ 是 $g(z):=f(z^2)$ 的麦克劳林展开式.

(b) $\sum_{j=0}^{\infty}a_jc^jz^j$ 是 $h(z):=f(cz)$ 的麦克劳林展开式.

(c) $\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^{m+j}$ 是 $H(z):=z^mf(z)$ 的麦克劳林展开式.

(d) $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 是 $G(z):=f(z-z_0)$ 在 z_0 处的泰勒展开式.

4. 设 α 是一个复数. 证明:如果 $(1+z)^\alpha$ 被定义为 $e^{\alpha\mathrm{Log}(1+z)}$,则对 $|z|<1$,

$$(1+z)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+\cdots.$$

[注意:它推广了二项式定理.]

5. 求出下列各函数在指定点处的泰勒级数并说明其收敛范围.

(a) $\frac{1}{1+z}$ 在 $z_0=0$ 处　　(b) e^{-z^2} 在 $z_0=0$ 处　　(c) $z^3\sin 3z$ 在 $z_0=0$ 处

(d) $2\cos z-ie^z$ 在 $z_0=0$ 处　　(e) $\frac{1+z}{1-z}$ 在 $z_0=i$ 处　　(f) $\cos z$ 在 $z_0=\frac{\pi}{4}$ 处

(g) $\frac{z}{(1-z)^2}$ 在 $z_0=0$ 处

6. 直接证明 $1/(\zeta-z)$ 在 $z_0(\neq\zeta)$ 处的泰勒展开式为

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^j}{(\zeta-z_0)^{j+1}},\text{其中}\ |z-z_0|<|\zeta-z_0|.$$

250

[注:这一展开式是定理 3 的证明的核心.]

7. 验证恒等式

$$\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathrm{Log}(1+z)-\mathrm{Log}(1-z)$$

在 $|z|<1$ 时成立. 然后,用 $\mathrm{Log}(1+z)$ 和 $\mathrm{Log}(1-z)$ 的麦克劳林展开式,求出 $\mathrm{Log}[(1+z)/(1-z)]$ 的麦克劳林展开式.

8. 应用泰勒级数验证如下恒等式.

(a) $\sin(-z)=-\sin z$　　(b) $\frac{de^z}{dz}=e^z$　　(c) $e^{-iz}=\cos z-i\sin z$　　(d) $e^{2z}=e^z\cdot e^z$

9. 证明定理 5.

10. 证明莱布尼茨公式[1],即公式(14). [提示:用数学归纳法.]

[1] 莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz,1646—1716)在德国的美因兹(Mainz)实践的定律.

11. 应用计算泰勒级数乘积的定理 6,求下列各函数的麦克劳林级数的前三个非零项.

(a) $e^z\cos z$ (b) $\dfrac{e^z}{z-1}$ (c) $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ (d) $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$

12. 证明公式(1)中的多项式 $p_n(z)$ 是唯一的阶数至多为 n 并且在 z_0 处的各阶导数同 $f, f', f'', \cdots, f^{(n)}$ 在 z_0 处的值相等的多项式.

13. 求具有麦克劳林展开式 $\sum_{k=0}^{\infty} k^2z^k$ 的解析函数 $f(z)$ 的确切公式. [提示:从展开式 $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ 开始,两边同时微分,乘以 z,再微分,最后再乘以 z.]

14. 假设 $f(z)$ 在圆盘 $D: |z-z_0| < R$ 内解析. 证明如果对每个 $k = 0,1,2,\cdots, f^{(k)}(z_0) = 0$,则 $f(z)$ 在 D 内恒为零.

15. 假设 $f(z)$ 在单位圆盘 $D: |z| < 1$ 内解析. 证明如果 $f'(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 0$,则对圆盘内所有的 z, $f(-z) = f(z)$. 即 f 是一个偶函数.

16. 将多项式 $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ 改写为 $(z-1)$ 的幂的形式,即通过 a_j 求出展开式 $p_n(z) = c_0 + c_1(z-1) + \cdots + c_n(z-1)^n$ 的系数 c_i.

17. 由练习 5.1 的习题 20 知,泰勒级数 $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ 在开圆盘 $D: |z| < 1$ 内不一致收敛于 $(1-z)^{-1}$. 它为什么同定理 3 不矛盾?

18. 当余项可以估计时,泰勒级数提供了一种切实可行的数表化数理函数的方法. 对 $|z| \leqslant 1$ 建立下列误差估计: [251]

(a) $\left|e^z - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$

(b) $\left|\sin z - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)!}\left(\dfrac{4n^2+18n+20}{4n^2+18n+19}\right)$

[提示:记误差为无穷级数,除去首项的因子,然后与几何级数相比较.]

19. 根据习题 18(a) 的估计,对 $|z| \leqslant 1$,展开式 $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ 中需要有多少项,才能使计算 e^z 时误差在 $\pm 10^{-5}$ 之内?

20. (埃尔米特公式) 对于在 $|z| \leqslant R$ 上的解析的函数 $f(z)$,由定理 3 的证明推出 f 的麦克劳林级数余项的埃尔米特[⊖]公式:

$$f(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} \frac{z^{n+1}}{\zeta^{n+1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \ |z| < R.$$

5.3 幂级数

解析函数的泰勒级数形式上是形如 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 的某种一般类型级数的特例. 下面对这样的级数给出定义:

> **定义 5** 形如 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 的级数称为**幂级数**. 常数 a_j 称为幂级数的**系数**.

假设我们给出一个任意的幂级数,例如

⊖ 埃尔米特(Charles Hermite)首先发表了 e 是超越数的证明.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)^2} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{16} + \cdots. \tag{1}$$

那么自然出现一些问题. z 取何值时此级数收敛? 和函数是解析函数吗? 函数的幂级数展开式是唯一的吗? 简而言之, 每个幂级数都是泰勒级数吗? 这一节主要回答这些问题.

252

下面的结果解决了幂级数的收敛问题, 这些结果同泰勒展开式有些相似.

定理 7 对任意的幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$,存在一个只依赖于系数 $\{a_j\}$,且含于0和 ∞ 之间的实数 R,使得

(i) 级数在 $|z-z_0|<R$ 时收敛.

(ii) 级数在任意闭子圆盘 $|z-z_0|\leqslant R'<R$ 上一致收敛.

(iii) 级数在 $|z-z_0|>R$ 时发散.

数 R 称为幂级数的**收敛半径**.

特别地,当 $R=0$ 时,幂级数仅在 $z=z_0$ 时收敛,当 $R=\infty$ 时,级数对于所有的 z 收敛. 当 $0<R<\infty$ 时,圆周 $|z-z_0|=R$ 称为收敛圆,但是对于圆周上的点 z 得不到一般的收敛结论(见习题1). 这一情况如图 5-3 所示.

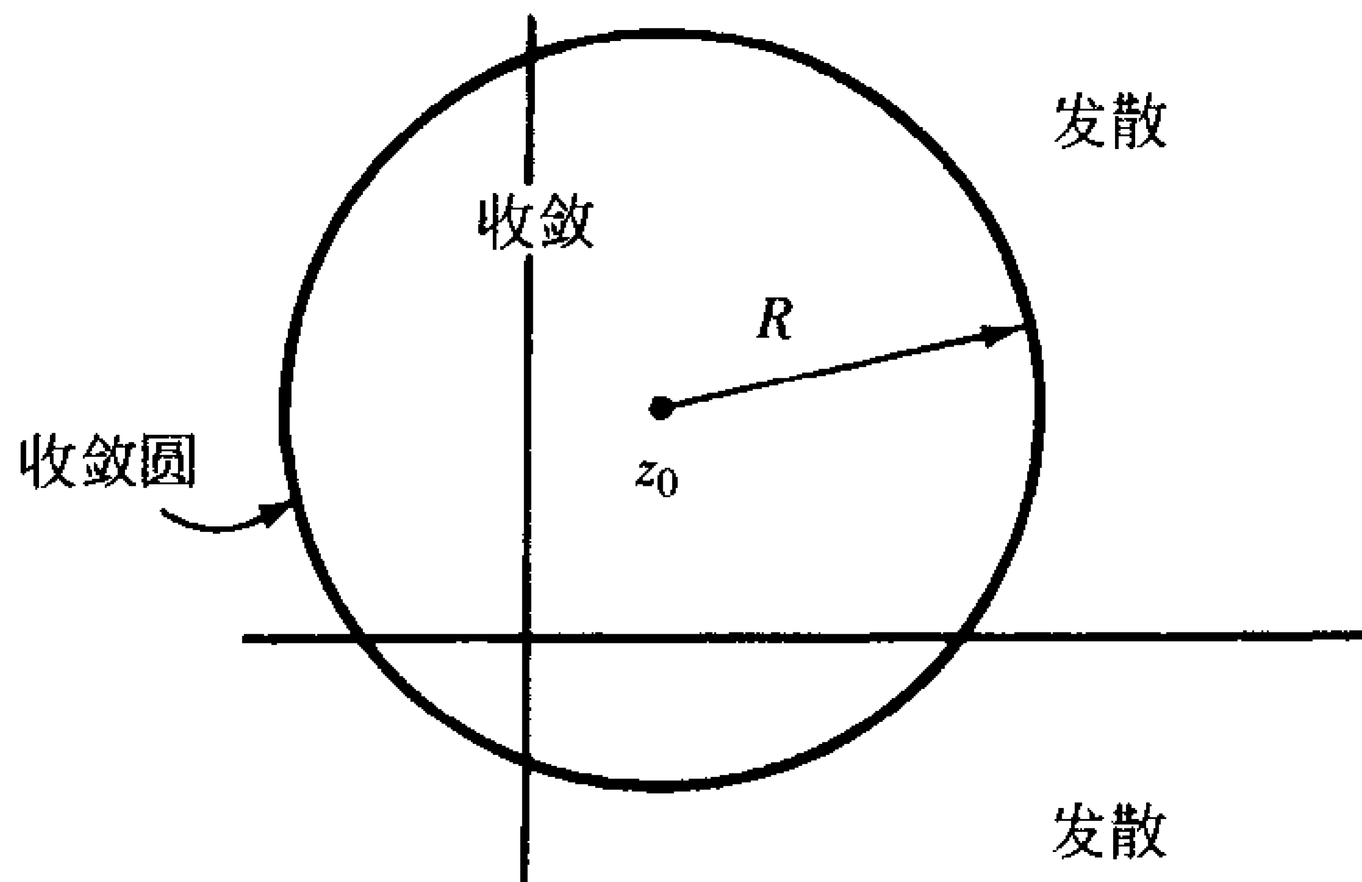


图 5-3 收敛圆

尽管定理7的严格证明放到了后面的5.4节,但是这里我们可以给出非正式的讨论,以便说明正是由于幂级数的特殊形式导致了它的收敛域必须是一个圆盘. 最本质的因素是下面的引理,在这里我们只考虑 $z_0=0$ 的特殊情况.

引理 2 如果幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 在模为 r 的点处收敛,则它在圆盘 $|z|<r$ 内的每一点处收敛.

253

证 由假设,存在点 z_1 满足 $|z_1|=r$,使得级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_1^j$ 收敛. 这蕴涵项序列 $a_j z_1^j$ 有界;即存在常数 M 使得

$$|a_j z_1^j| = |a_j| r^j \leqslant M \quad (\text{对所有的} j).$$

现在对 $|z|<r$, 我们有

$$|a_j z^j| = |a_j| r^j \cdot \left(\frac{|z|}{r}\right)^j \leqslant M\left(\frac{|z|}{r}\right)^j.$$

从而对 $|z|/r<1$,级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 的各项被一个收敛的几何级数的各项所控制. 因此,由比较判别法,这个级数收敛. ■

对幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$,为了弄清楚定理7中数 R 的存在性,我们作如下非正式的推理:考虑所有实

数 r 的集合，使级数在某些模为 r 的点上收敛. 令 R 是这些数 r 中"最大"[⊖] 的，则由引理 2，级数在 $|z| < R$ 时收敛，再由 R 的定义，对所有满足 $|z| > R$ 的 z，级数发散.

在前面的讨论中，如果用 $(z-z_0)$ 代替 z，可以推出通常幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 的收敛域必为以 z_0 为心的圆盘.

关于幂级数收敛半径 R 的公式，我们也把它放到 5.4 节中给出. 然而，在习题 2 中，比值判别法被用来证明当 j 趋近于 ∞ 时，在 $|a_{j+1}/a_j|$ 有有限极限的特殊情况下，R 为这个极限的倒数. 例如，如果幂级数(1) 的系数满足

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = \lim_{j\to\infty}\frac{(j+1)^2}{(j+2)^2} = 1,$$

则它的收敛圆为 $|z| = R = \frac{1}{1} = 1$.

如同下面三个结果所表明的那样，一致收敛[定理 7(ii)] 是序列的一个很强的性质. 我们首先说明连续函数的一致极限也是连续的.

引理 3 设 f_n 是集合 $T\subset \mathbf{C}$ 上的连续函数序列，且在 T 上一致收敛于 f，则 f 也在 T 上连续.

证 要证明 f 在 T 上的点 z_0 处连续，必须证明对任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $z\in T$，且 $|z_0 - z| < \delta$ 时，$|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$ 成立. 首先选取一个充分大的整数 N，使得对 T 中所有的 z，有 $|f(z) - f_N(z)| < \varepsilon/3$；由于函数列的一致收敛性，这是可能的. 又因为 f_N 是连续的，存在数 $\delta' > 0$ 使得对 T 中所有满足 $|z_0 - z| < \delta'$ 的 z，都有 $|f_N(z_0) - f_N(z)| < \varepsilon/3$. 但是，对于这样的 z，有 $|f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$，这是因为 254

$$\begin{aligned}|f(z_0)-f(z)| &= |f(z_0)-f_N(z_0)+f_N(z_0)-f_N(z)+f_N(z)-f(z)|\\ &\le |f(z_0)-f_N(z_0)|+|f_N(z_0)-f_N(z)|+|f_N(z)-f(z)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 f 在 T 上每一个点处连续. ■

知道了连续函数序列的一致极限是连续的，就可以对这个极限进行积分. 事实上，这个极限的积分等于积分的极限.

定理 8 设 f_n 为包含周线 Γ 的集合 $T\subset\mathbf{C}$ 上的连续函数序列，并且假设 f_n 在 T 上一致收敛于函数 f，则序列 $\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$ 收敛于 $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

证 证明非常简单. 设 ℓ 为 Γ 的长，选取 N 充分大使得对任意的 $n>N$ 以及 Γ 上所有的 z，有 $|f(z)-f_n(z)| < \varepsilon/\ell$. 于是

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_\Gamma [f(z)-f_n(z)]\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{\ell}\cdot\ell = \varepsilon. \quad ■$$

⊖ 更高年级的学生将知道 R 的精确定义为数 r 的最大上界.

将这些结果同莫累拉定理(第 4 章，定理 18)结合起来，可以证明如下结论.

定理 9 设 f_n 为单连通域 D 上的解析函数序列，且在 D 上一致收敛于 f，则 f 在 D[⊖] 上解析.

证 由引理 3，函数 f 是连续的. 设 Γ 为含于 D 中的任意环线，则由定理 8，积分 $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ 是 $\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$ 的极限；但是因为每个 f_n 在 Γ 上和 Γ 内解析，从而对于所有的 n，积分 $\int_\Gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$ 为零. 所以 $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，由莫累拉定理即知 f 在 D 内解析. ■

现在我们已具备了对于幂级数中涉及的任何问题进行解释的能力. 因为幂级数的部分和是解析函数(实际上是多项式)，并且它们在收敛圆的任何闭子圆盘内一致收敛，定理 9 告诉我们极限函数在每一个这样的子圆盘内解析. 而收敛圆内的任意点都在这样一个子圆盘内，所以可得下面的结论.

255

定理 10 幂级数的和函数在收敛圆内处处解析.

例如，幂级数(1)对 $|z|<1$ 定义了一个解析函数.

注意到只要周线含在幂级数收敛圆内，由定理 7 和定理 8 就可以对幂级数进行逐项积分. 运用这一事实，我们可以把每个幂级数(满足 $R>0$)看成是一个泰勒级数，这与下面的结果一致.

定理 11 如果 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 在 z_0 的某一圆形邻域内(即收敛圆的半径非零)收敛于 $f(z)$，则

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} \quad (j=0,1,2,\cdots).$$

所以，$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 是 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开式.

证 设 C 是以 z_0 为心含在收敛圆内的正向圆周. 因为极限 $f(z)$ 是解析函数，由推广的柯西积分公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

现在把 $f(\zeta)$ 的级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\zeta-z_0)^j$ 代入上式并且逐项积分；因为

$$\int_C \frac{(\zeta-z_0)^j}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & 若 j=n; \\ 0, & 若 j\neq n. \end{cases}$$

(2)式中的积分仅剩一项为 $n!\,a_n$. ■

这样的话，我们就有了两个以 z_0 为心的圆盘，在圆盘内部如(1)这样的幂级数收敛. 一个圆盘是定理 7 的"收敛圆"的内部. 另一个是极限函数 f 在其内解析的最大的圆盘. 这两个圆盘相同吗？因为级数在收敛圆外发散，所以"泰勒圆盘"不能延伸到收敛圆之外. 另一方面，极限函数在

⊖ 实际上，这个结果在任意区域上成立，因为区域是开圆盘的并.

收敛圆内解析，所以泰勒圆盘必然包含这个圆周的内部. 因此两个圆盘实际上是一致的.

综上所述，我们已经证明了如果幂级数在某一个圆内收敛，则它是其(解析)极限函数的泰勒级数，并且可以在圆内逐项积分、逐项微分；此外，极限函数肯定在收敛圆上某点处不解析.

256

例 1 求一个解析函数 f 使其在 $z=0$ 的某一邻域内满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=3\mathrm{i}f(z) \tag{3}$$

且在 $z=0$ 处取值为 1.

解 因为 f 在原点解析，它必然具有一个麦克劳林级数展开式. 由公式(3)计算各阶导数进而求出级数.

由已知的 $f(0)=1$ 以及公式(3)有 $f'(0)=3\mathrm{i}\cdot 1=3\mathrm{i}$. 对公式(3)进行微分，由递推关系得

$$f''(0)=3\mathrm{i}f'(0)=(3\mathrm{i})^2,$$
$$f'''(0)=3\mathrm{i}f''(0)=(3\mathrm{i})^3,$$

一般地，

$$f^{(j)}(0)=3\mathrm{i}f^{(j-1)}(0)=(3\mathrm{i})^2f^{(j-2)}(0)=\cdots=(3\mathrm{i})^j.$$

所以解为

$$f(z)=1+3\mathrm{i}z+\frac{(3\mathrm{i})^2z^2}{2!}+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(3\mathrm{i}z)^j}{j!}. \tag{4}$$

回忆展开式

$$\mathrm{e}^w=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^j}{j!}, \tag{5}$$

我们可确定(4)的解为

$$f(z)=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}.$$

实际上，直接计算容易验证 $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}$ 即为所求. ■

对于 n 阶齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}z^n}+p_{n-1}(z)\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}z^{n-1}}+\cdots+p_2(z)\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}z^2}+p_1(z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}+p_0(z)f=0$$

来说，它的典型初值问题是寻找在某一点 z_0 处满足方程初始条件

$$f(z_0)=a_0,\quad f'(z_0)=a_1,\quad f''(z_0)=a_2,\cdots,f^{(n-1)}(z_0)=a_{n-1}$$

的解. 在高级微分方程课程中(参见参考文献[3]和[4])，已经证明，如果在以 z_0 为心的圆盘内每个系数 $p_j(z)$ 解析，则对任意的常数 $\{a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1}\}$，有且只有一个初值问题的解，并且，此解在圆盘内部也是解析的.

257

例 2 设 g 是 $[0,\ 2]$ 上实变量的连续复值函数，并且对每一个复数 z 定义

$$F(z):=\int_0^2\mathrm{e}^{zt}g(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 F 是整函数，并求出它在原点处的幂级数.

解 首先求 F 的幂级数的表达式. 设 z 固定，对于所有的复数 t 定义

$$h(t) := \mathrm{e}^{zt},$$

则 h 是 t 的整函数，所以它的麦克劳林展开式

$$h(t) = \mathrm{e}^{zt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot t^k = 1 + zt + \frac{z^2t^2}{2!} + \cdots$$

在每个圆盘 $|t| \leqslant r$ 上一致收敛；特别地，对区间[0, 2]上的 t 一致收敛. 并且，用有界函数 g 逐项相乘后保持收敛性不变，即对 $0 \leqslant t \leqslant 2$（和固定的 z），级数

$$\mathrm{e}^{zt}g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot t^k g(t)$$

一致收敛. 由定理 8，可以逐项对 t 积分，得

$$F(z) = \int_0^2 \mathrm{e}^{zt}g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k!}\int_0^2 t^k g(t)\,\mathrm{d}t\right] z^k.$$

因为级数中括号内的量是仅依赖于 k 的常数，所以上面展开式是关于 z 的一个幂级数，而且它对所有的 z 收敛到 $F(z)$. 从而由定理 10，F 是整函数. ■

练习 5.3

1. (a) 证明幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ 在其收敛圆 $|z| = 1$ 上无处收敛.

(b) 证明幂级数 $\sum_{j=1}^{\infty} z^j/j^2$ 在其收敛圆 $|z| = 1$ 上处处收敛. [提示:参见练习 5.1 中习题 13].

258 **2.** 假设对幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$,有 $\lim_{j\to\infty} |a_{j+1}/a_j| = L$. 由比值判别法证明这个幂级数的收敛半径为 $R = 1/L$.

3. 利用习题 2 的结果,求出下列幂级数的收敛圆:

(a) $\sum_{j=0}^{\infty} j^3 z^j$　　(b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z-1)^k$　　(c) $\sum_{j=0}^{\infty} j! z^j$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{3^k}(z - \mathrm{i})^k$　　(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-\mathrm{i})^k}{k^2}(z+2)^k$　　(f) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{4^j}$

4. 存在在点 $z = 2 + 3\mathrm{i}$ 处收敛而在点 $z = 3 - \mathrm{i}$ 处发散的幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 吗?

5. 设 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k^3/3^k) z^k$. 计算下列各式:

(a) $f^{(6)}(0)$　　(b) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\mathrm{d}z$

(c) $\oint_{|z|=1} \mathrm{e}^z f(z)\,\mathrm{d}z$　　(d) $\oint_{|z|=1} \frac{f(z)\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$

6. 定义

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & \text{当 } z \neq 0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } z = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

(a)利用 $\sin z$ 的麦克劳林展开式，证明对所有的 z，

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots.$$

(b) 说明 $f(z)$ 在原点解析的原因.

(c) 求 $f^{(3)}(0)$ 以及 $f^{(4)}(0)$.

7. 求出 $f(z) := \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ 的麦克劳林展开式中前三个非零项[提示:先将 e^{ζ^2} 展开].

8. 假设 $f(z)$ 在原点解析并且 $f(0) = f'(0) = 0$. 证明 $f(z)$ 可以写成 $f(z) = z^2 g(z)$ 的形式,其中 $g(z)$ 在 $z = 0$ 处解析.

9. 假设 g 在圆周 $C: |z| = 1$ 上连续,并且存在一个多项式序列在 C 上一致收敛于 g. 证明

$$\oint_C g(z)\,dz = 0.$$

10. 解释幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ 具有相同的收敛半径的原因.

259

11. 假设 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ 为两个具有正的收敛半径的幂级数.

(a) 证明:如果在原点的某一圆域内 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$,则对所有的 k, $a_k = b_k$.

(b) 更一般地,证明:如果对包含原点的某一开区间内的所有实数 x 有 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$,则对所有的 k, $a_k = b_k$.

12. 用幂级数证明初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dz} = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

在 $z=0$ 处解析的唯一解为 $f(z) = e^z$.

13. 下列初值问题都具有在原点解析的唯一解. 通过确定系数 a_j 的递推关系求出解的幂级数展开式 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. [提示:例 1 中的技巧对于像(c)这样更复杂的方程会比较吃力. 将 $f(z)$ 的幂级数表达式代入方程中并合并 z 的幂则更有效.]

(a) $\begin{cases} \dfrac{d^2f}{dz^2} - z\dfrac{df}{dz} - f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dfrac{d^2f}{dz^2} + 4f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} (1-z^2)\dfrac{d^2f}{dz^2} - 6z\dfrac{df}{dz} - 4f = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$

14. 用幂级数证明初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2f}{dz^2} + f = 0 \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \end{cases}$$

在 $z=0$ 处解析的唯一解为 $f(z) = \sin z$.

15. 假设 g 在实区间 $[-1, 2]$ 上连续,定义

$$F(z) := \int_{-1}^{2} g(t)\sin(zt)\,dt.$$

260

(a) 证明 F 是整函数并求出其在原点的幂级数展开式.

(b) 证明对于所有的 z,有

$$F'(z) = \int_{-1}^{2} t g(t)\cos(zt)\,dt.$$

16. 假设 g 在实区间 $[0, 1]$ 上连续,并定义

$$H(z) := \int_0^1 \frac{g(t)}{1 - zt^2}dt \quad (|z| < 1).$$

证明 H 在开圆盘 $|z|<1$ 上解析.

17. 对于任意的复数 a，定义

$$(a)_j := a(a+1)\cdots(a+j-1),\quad j\geqslant 1,\quad (a)_0 := 1,$$

高斯超几何级数 ${}_2F_1(b, c; d; z)$ 定义为

$${}_2F_1(b,c;d;z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(b)_j(c)_j}{(d)_j}\cdot\frac{z^j}{j!},$$

汇合型超几何级数 ${}_1F_1(c; d; z)$ 定义为

$${}_1F_1(c;d;z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(c)_j}{(d)_j}\cdot\frac{z^j}{j!}.$$

(a) 验证

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j+1} = {}_2F_1(1,1;2;z),$$

$$e^z - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} = \frac{z^n}{n!}\,{}_1F_1(1;n+1;z)\quad (n=1,2,\cdots).$$

(b) 证明：如果 $d\neq 0, -1, -2, \cdots$，则级数 ${}_2F_1(b, c; d; z)$ 在 $|z|<1$ 中收敛且满足微分方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + [d-(b+c+1)z]\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - bcf = 0.$$

(c) 证明：如果 $d\neq 0, -1, -2, \cdots$，则级数 ${}_1F_1(c; d; z)$ 对所有的 z 收敛且满足微分方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + (d-z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - cf = 0.$$

18. (广义洛必达法则) 用幂级数证明：如果 f, g 都在点 z_0 解析，并且

$$f(z_0) = g(z_0) = f'(z_0) = g'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = g^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

但是 $g^{(m)}(z_0)\neq 0$，则

261

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}.$$

19. (面积积分公式) 通过完成下面的每一步，证明闭单位圆盘 $\bar{D}=\{z: |z|\leqslant 1\}$ 上的解析函数 f 的面积积分表示公式：对 $|\zeta|<1$，

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_{\bar{D}} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad z = x+\mathrm{i}y.$$

(a) 证明

$$\iint_{\bar{D}} z^j\bar{z}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases}\pi/(k+1), & 若\ j=k,\\ 0, & 若\ j\neq k.\end{cases}$$

[提示：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.]

(b) 用 (a) 验证函数 f 的麦克劳林级数的系数 $a_k = f^{(k)}(0)/k!$ 满足

$$a_k = \frac{k+1}{\pi}\iint_{\bar{D}} f(z)\,\bar{z}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad k=0,1,\cdots.$$

(c) 用 (b) 证明上面给出的 $f(z)$ 的面积积分表达公式. [提示：$(1-\bar{z}\zeta)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\bar{z}^k\zeta^k$, $|\zeta|<1$, $|z|\leqslant 1$.]

*5.4 收敛的数学理论

这一节我们要稍微回顾一下本章已学的知识，并对这一章中没有证明的定理给出详细的数

学证明. 应用方向的学生可以跳过这一节而直接学习 5.5 节.

到目前为止，我们已经看到关于极限收敛的所有条件中都包含极限. 然而，存在一种检验一个序列是否收敛而根本不必考虑极限的方法，它称为柯西收敛准则.

定理 12 复数序列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在整数 N 使得对任意满足 $m>N$, $n>N$ 的整数对 m 和 n，有 $|A_n-A_m|<\varepsilon$ 成立.

证(必要性) 如果序列收敛，设收敛于 A，选取 N 使得当 $\ell>N$ 时，每个 A_ℓ 都在 A 的 $\varepsilon/2$ 邻域内，则任何两个这样的 A_ℓ 必然存在于彼此的 ε 邻域内.

柯西准则是收敛的充分条件的证明要求实数体系严格公理化；实际上，这一准则可以被用来定义实无理数的概念. 这里我们不去探讨这一问题. ■

一个满足柯西准则的序列通常称为柯西序列. 由定理 12，每个收敛序列都是柯西序列，反之亦然.

262

推论 1 如果 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个柯西序列并且选取 N 使得对大于 N 的任何 m, n 有 $|A_n-A_m|<\varepsilon$，则每一满足 $n>N$ 的 A_n 都落入极限的 ε 邻域中.

证 在不等式 $|A_n-A_m|<\varepsilon$ 中，令 $m\to\infty$，得

$$|A_n-A|\leqslant\varepsilon.$$ ■

把柯西准则被应用到级数的部分和序列中，可以得到如下结论：

推论 2 级数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 收敛的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在整数 N，使得对每一对满足 $m>n>N$ 的整数 m 和 n，有 $\left|\sum_{j=n+1}^{m}c_j\right|<\varepsilon$.

证明可以直接得到. 这样的级数(自然地)称为柯西级数. 显然，由推论 2 可得如下结果：如果 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ 收敛，则当 $j\to\infty$ 时 $c_j\to 0$.

有了柯西准则之后，我们可以给出本章定理 1，即比较判别法的证明. 然而，只需稍做努力，便可以证明下面一个更一般的称为魏尔斯特拉斯 M 判别法的定理.

定理 13(M 判别法) 假设 $\sum_{j=0}^{\infty}M_j$ 是一个具有实非负项的收敛级数，如果对某集合 T 上所有的 z 以及比某数 J 大的所有的 j，有 $|f_j(z)|\leqslant M_j$，则级数 $\sum_{j=0}^{\infty}f_j(z)$ 在 T 上一致收敛.

证 因为 $\sum_{j=0}^{\infty}M_j$ 是柯西级数，可以选取 $N>J$ 使得对任意满足 $m>n>N$ 的 m 和 n 有 $\sum_{j=n+1}^{m}M_j<\varepsilon$. 但是对 T 中的 z，因为

$$\left|\sum_{j=n+1}^{m}f_j(z)\right|\leqslant\sum_{j=n+1}^{m}|f_j(z)|\leqslant\sum_{j=n+1}^{m}M_j<\varepsilon. \tag{1}$$

所以级数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ 也是一个柯西级数,因此级数 $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ 对 T 中的每一个 z 收敛,设极限函数为 $F(z)$. 容易看出这个收敛是一致的;把不等式(1)按照部分和的项改写为

263

$$\left|\sum_{j=0}^{m} f_j(z) - \sum_{j=0}^{n} f_j(z)\right| < \varepsilon,$$

则上式对于 T 中所有的 z 当 $m > n > N$ 时成立. 所以,由推论 1,对 T 中所有的 z 以及 $n > N$,有

$$\left|F(z) - \sum_{j=0}^{n} f_j(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了一致收敛性. ■

比较判别法可以看作是 M 判别法在每个 $f_j(z)$ 都是常函数时的特殊情况.

现在我们准备分析前一节中给出幂级数的收敛性质的定理 7. 为方便起见,在这里重新叙述这一定理.

定理 7 对任意的幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$,存在一个只依赖于系数 $\{a_j\}$ 且含于0和 ∞ 之间的实数 R,使得

(i) 级数在 $|z-z_0| < R$ 时收敛.

(ii) 级数在任意闭子圆盘 $|z-z_0| \leqslant R' < R$ 上一致收敛.

(iii) 级数在 $|z-z_0| > R$ 时发散.

为了确定数 R,我们必须引入无穷实数列的上极限的概念;它是极限概念的推广. 为此,我们首先考虑极限为 x 的实数的收敛序列 $\{x_n\}$. 对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 N 使得 $n > N$ 时的所有 x_n 都落入 x 的 ε 邻域内. 所以,特别地,x 具有如下性质:对于给定的任意 $\varepsilon > 0$,只存在有限多个 n 使得 x_n 超过 $x+\varepsilon$. 并且,没有比 x 小的数具有这一性质. 现在我们将这个概念推广到任意序列.

定义 6 实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**上极限**(简记为 $\limsup x_n$)定义为具有如下性质的最小实数 ℓ:对任意的 $\varepsilon > 0$,只存在有限多个 n 使得 x_n 超过 $\ell+\varepsilon$;如果不存在具有这样性质的数,令 $\limsup x_n := \infty$;如果所有实数都具有这一性质,令 $\limsup x_n := -\infty$.

如前所述,如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x,则 $\limsup x_n = x$. 其他例子有 $\limsup(-1)^n = 1$, $\limsup(n) = \infty$,以及 $\limsup(-n) = -\infty$.

264

定理 7 中的数 R 现在可以如下确定. 由系数集合 $\{a_j\}$ 得到序列 $\sqrt[n]{|a_n|}$,则 R 等于这个序列的上极限的倒数,

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}}, \tag{2}$$

并且按通常的惯例有 $1/0=\infty$,$1/\infty=0$. 公式(2)称为柯西-阿达马公式. 从此公式开始,我们来证明定理 7.

定理 7 的证明 首先考虑收敛情形(i)和(ii). 如果 $R=0$,则不需要证明. 如果 $R>0$,则

幂级数在 $|z-z_0|<R$ 的收敛性可由它在所有闭子圆盘 $|z-z_0|\leq R'<R$ 内的一致收敛性得到，所以我们只需解决后一个问题.

在区间

$$\frac{1}{R}<k<\frac{1}{R'}$$

内选取数 k，则由公式(2)，几乎所有的 a_j 满足 $\sqrt[j]{|a_j|}<k$. 所以，如果 z 在闭子圆盘 $|z-z_0|\leq R'$内，则对充分大的 j，有不等式

$$|a_j(z-z_0)^j|=(\sqrt[j]{|a_j|}\,|z-z_0|)^j<(kR')^j, \tag{3}$$

因为 $kR'<1$,几何级数 $\sum_{j=0}^{\infty}(kR')^j$ 收敛,将 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 同 $\sum_{j=0}^{\infty}(kR')^j$ 相比较,由不等式(3)可知满足 M 判别法(定理 13),因此级数 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 在闭子圆盘上一致收敛,从而命题(ii)成立.

为证明当 $|z-z_0|>R$ 时级数是发散的,在区间

$$\frac{1}{|z-z_0|}<k<\frac{1}{R}$$

上选取 k. 由上极限的定义以及公式(2)，必然存在无限多个 a_j 满足 $\sqrt[j]{|a_j|}>k$(回忆 lim sup 是使得上式成立的最小的数). 对这样的 a_j,

$$|a_j(z-z_0)^j|=(\sqrt[j]{|a_j|}\,|z-z_0|)^j>(k|z-z_0|)^j>1;$$

即 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$ 的无穷多项的模超过 1. 这显然同柯西准则矛盾,所以级数必然发散. ■

在后面的例子中，我们将用到如下引理.

引理 4 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty.$

265

证 不难看出，给定任意的正整数 B，当 n 充分大时，阶乘 $n!$ 超过 B^n；我们假定 $n>2B$ 并且考察比值

$$\frac{n!}{B^n}=\frac{(2B)!}{B^{2B}}\frac{(2B+1)}{B}\frac{(2B+2)}{B}\cdots\frac{n}{B}>\frac{(2B)!}{B^{2B}}2^{n-2B},$$

由此看出，只要 2^n 大于 $2^{2B}B^{2B}/[(2B)!]$，就有$\frac{n!}{B^n}>1$. 取 n 次方根可知，$\sqrt[n]{n!}$大于给定的任何正整数 B，从而断定$\sqrt[n]{n!}$趋向于∞. ■

例 1 证明第一种零阶的贝塞尔函数[⊖]

$$J_0(z):=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2} \tag{4}$$

是整函数.

⊖ 贝塞尔在哥尼斯堡主要是作为天文学家工作.

证 我们的目的是证明 $R=\infty$. 记住 a_j 是 z^j 的系数，我们有

$$a_j=\begin{cases}0, & \text{如果}\, j\,\text{是奇数},\\ \dfrac{(-1)^{j/2}}{2^j[(j/2)!]^2}, & \text{如果}\, j\,\text{是偶数}.\end{cases}$$

显然当 j 为奇数时，$\sqrt[j]{|a_j|}=0$. 当 j 为偶数时，

$$\sqrt[j]{|a_j|}=\frac{1}{2[(j/2)!]^{2/j}},$$

由引理 4 知它趋于 0. 所以，$\limsup\sqrt[j]{|a_j|}=0$，因此 $R=\infty$. 故 $J_0(z)$ 是一个整函数. ■

读者可以验证(习题 7) $J_0(z)$ 满足零阶贝塞尔方程：

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df}{dz}+f=0.$$

练习 5.4

1. 求下面各序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限.

266

(a) $x_n=(-1)^n\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$ (b) $x_n=(-1)^n n$ (c) $x_n=\dfrac{1}{n^2}$ (d) $x_n=n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

2. 证明对任意正实数序列 $\{x_n\}$，

$$\limsup\sqrt[n]{x_n}\leqslant\limsup\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

3. 求下列幂级数的收敛半径.

(a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{2^j}{3^j+4^j}z^j$ (b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}2^jz^{j^2}$ (c) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}[2+(-1)^j]^jz^j$ (d) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{j!}{j^j}z^j$ (e) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{2}{3j}z^{2j}$ (f) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^{j!}$

4. 通过考虑级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}z^j/j^2$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}z^j/j$ 以及 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^j$，证明幂级数在其收敛圆周上可能对所有点都收敛或者对部分点收敛或者都不收敛.

5. 若级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 的收敛半径是 R，求下列级数的收敛半径：

(a) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}j^3a_jz^j$ (d) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_j^4z^j$ (c) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^{2j}$ (d) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^{j+7}$ (e) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^{-j}a_jz^j$

6. 证明：如果级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 的收敛半径是 R，则级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mathrm{Re}(a_j)z^j$ 的收敛半径大于或等于 R.

7. 证明贝塞尔函数 $J_0(z)$ 满足零阶贝塞尔方程(如例 1 后所述).

8. n 阶贝塞尔方程为

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df(z)}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)f(z)=0.$$

对整数 $n>0$，证明第一类 n 阶贝塞尔函数

$$J_n(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(n+j)!}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n}$$

是整函数并且满足贝塞尔方程.（贝塞尔函数是在径向二维波传播的研究中提出的.）

9. 用幂级数求解解析函数 f 的函数方程

267

$$f(z)=z+f(z^2).$$

10. 斐波那契序列[1]1，1，2，3，5，8，13，… 在自然现象中出现的频率令人惊讶．它的各项之间的关系定义为

$$a_0 = a_1 = 1,$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

证明

$$f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

定义了一个满足方程

$$f(z) = 1 + z f(z) + z^2 f(z)$$

的解析函数．对 $f(z)$ 求解并计算麦克劳林级数，从而推出表达式

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{j+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{j+1}\right].$$

11. 勒让德多项式[2]$P_j(\zeta)$是麦克劳林级数

$$(1 - 2\zeta z + z^2)^{-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\zeta) z^j$$

中 z^j的系数(把 ζ 看作参数)．证明：$P_j(\zeta)$是关于 ζ 的 j 次多项式，并计算 P_0，P_1，P_2 和 P_3(这些多项式都是在三维位势论中提出的．)

12. 黎曼 ζ 函数在数论中有重要应用．它定义为

$$\zeta(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^z} \quad (\mathrm{Re}z > 1),$$

其中 $j^z := \exp(z\mathrm{Log}\, j)$. 证明 $\mathrm{Re}z > 1$ 时 $\zeta(z)$ 解析. [提示：设 $\mathrm{Re}z \geqslant \lambda > 1$,证明 $|1/j^z| \leqslant j^{-\lambda}$. 然后用魏尔斯特拉斯 M 判别法.](数学家们一直没有解决的最著名的问题之一是黎曼假设. 它断定 $\zeta(z)$ 的解析延拓(见 5.8 节) 的所有非实数的零点都在垂直线 $\mathrm{Re}z = 1/2$ 上.)

13. (阿贝尔极限定理) 设 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ 是 $|z| < 1$ 内解析函数 f 的幂级数展开式(所以 $|z| < 1$ 时 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$).

假设 $\lim_{r\to 1^-} f(r)$ (r 是实数) 存在并且等于 A. 证明：如果 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ 收敛，则

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

268

[提示：令 $M_n := \max_{j\geqslant n}\left|\sum_{k=j}^{\infty} a_k\right|$. 则 $n\to\infty$ 时，$M_n \to 0$，并且对 $0 \leqslant r < 1$，有

$$\left|f(r) - \sum_{j=0}^{n} a_j r^j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j r^j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_k - \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k\right) r^j\right|$$

$$= \left|\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) r^{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_k\right) r^{j-1}(r-1)\right|$$

$$\leqslant M_{n+1} + M_{n+2}.$$

令 $r\to 1^-$，再令 $n\to\infty$.]

14. 用阿贝尔极限定理(习题 13)证明

$$\mathrm{Log}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

---

[1] 斐波那契是 Leonardo Pisano(1170—1250)的绰号，他将 Hindu-Arabic 位值十进制引入到欧洲.

[2] 勒让德(1752—1833)在分析椭球面引力时发现了这些多项式.

5.5 洛朗级数

现在研究函数f在奇点[1]附近级数表示的可能性．如果（例如）一个函数的奇点仅仅是它的分母的零点，它能够表示为$A/(z-z_0)^p+g(z)$的形式吗？其中g是解析函数，并且在z_0处可展成泰勒级数．确实，并非每个奇点都是这种类型（例如$\log z$的奇点$z_0=0$）．然而，如果函数在围绕它的一个或多个奇点的圆环内解析（注意由于分支割线的原因，$\mathrm{Log} z$不具有这一性质），我们就能够按照如下定理展开它的“奇异部分”．

定理 14 设f在圆环[2]$r<|z-z_0|<R$内解析，则f可以表示为两个级数的和

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j+\sum_{j=1}^{\infty}a_{-j}(z-z_0)^{-j},$$

这两个级数均在这个圆环内收敛，并且在圆环的任意闭子圆环$r<\rho_1\leqslant|z-z_0|\leqslant\rho_2<R$内一致收敛．它的系数$a_j$由下式给出：

269

$$a_j=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\mathrm{d}\zeta\quad(j=0,\pm1,\pm2,\cdots),\tag{1}$$

其中C为圆环域内包含点z_0在其内部的任意一条正向简单闭周线．

这样一个既含有$z-z_0$的负幂项又含有$z-z_0$的正幂项的展开式称为f在这个圆环内的洛朗级数[3]．通常简写为

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j(z-z_0)^j.$$

注意，如果f在圆盘$|z-z_0|<R$内解析，则由柯西定理，(1)式中负幂项的系数为零，而其余的项就是f的泰勒级数．

定理 14 的证明 只需证明级数在每个闭子圆环上一致收敛即可，因为由此可推出它在这个开圆环内（逐点）收敛．

首先证明，对每个满足$r<\rho_1\leqslant|z-z_0|\leqslant\rho_2<R$的任意点$z$有表达式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\tag{2}$$

其中C_1为以z_0为心半径为$R_1=(r+\rho_1)/2$的负向圆周，而C_2为以z_0为心半径为$R_2=(R+\rho_2)/2$的正向圆周；见图 5-4．实际上，式(2)就是下面要说的柯西积分公式在这种情形下的一个简单变形．考虑图 5-5a 中的周线Γ，它是包含z在其内部的一条正向简单闭周线．因此

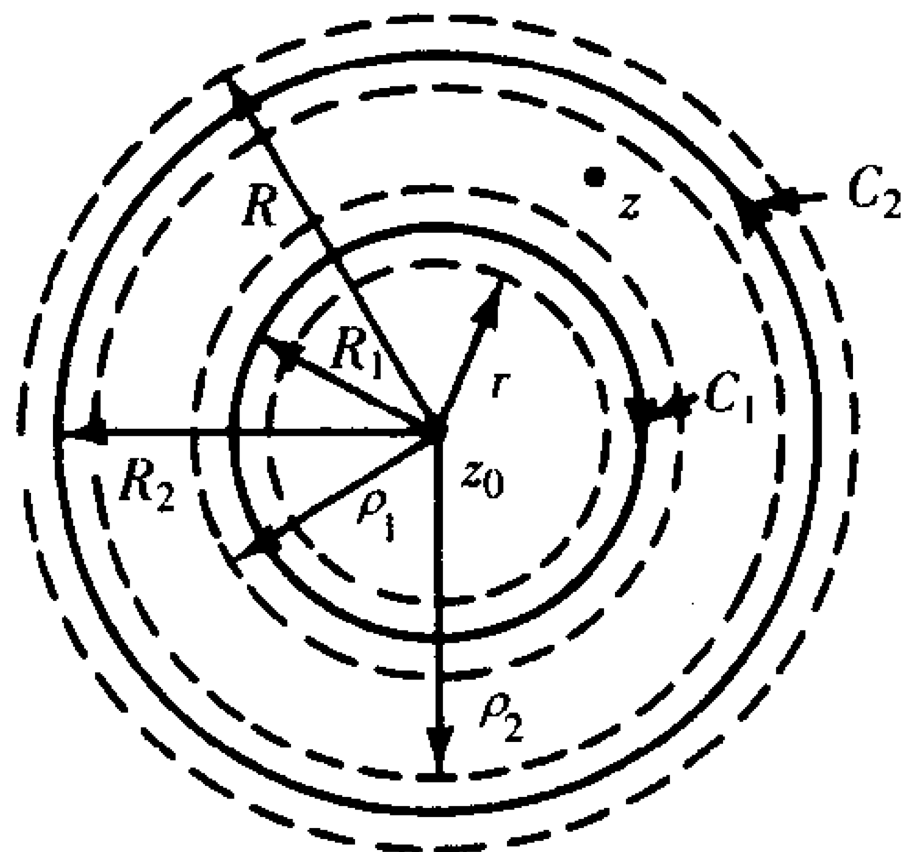


图 5-4 公式(2)的积分圆周

---

[1] 回忆 2.3 节，f的奇点是这样的点z_0：f在z_0处不解析，但是z_0是f的解析点的极限点．

[2] 允许$r=0$，这时“圆环”是一个去心圆盘．

[3] 洛朗（1813—1854）是负责 Le Havre 港口的工程师．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3}$$

如图 5-5b 所示，我们把 Γ 看作是去掉了一小块的“油炸面圈”，Γ'代表去掉的部分. 因为被积函数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$在 Γ'内和 Γ'上解析，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0.$$

因此，如果我们把这个油炸面圈上去掉的部分重新放回去，由式(3)得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

其中 $\Gamma+\Gamma'$是图 5-5c 中所示的路径. 但是对沿图 5-5c 中所示的线段积分，由于沿不同的方向各积一次，正好抵消，于是得到公式(2). ⊖

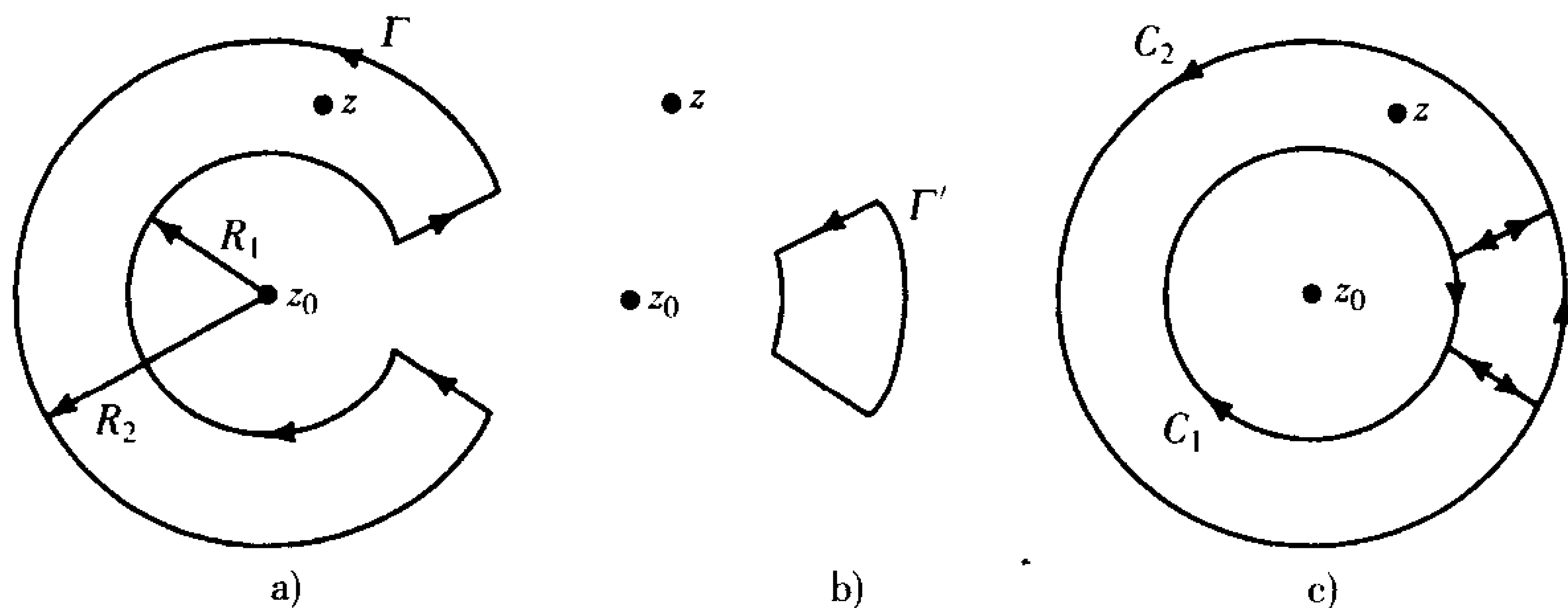


图 5-5 全体周线等于它的各部分的和

现在我们继续对洛朗展开式进行推导.

因为 z 在 C_2 内，式(2)中沿圆周 C_2 的积分与泰勒级数定理(5.2 节定理 3)中的积分完全相似；用同样的方法处理，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{j=0}^{n}a_j(z-z_0)^j+T_n(z),$$

其中 $|z-z_0|\leqslant\rho_2$，当 $n\to\infty$ 时，$T_n(z)$一致地趋近于 0，并且 a_j 由

$$a_j=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}d\zeta \quad (j=0,1,2,\cdots) \tag{4}$$

给出，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j \quad (|z-z_0|\leqslant\rho_2).$$

然而，公式(4)中 a_j 不再像泰勒定理的情形一样等于 $f^{(j)}(z_0)/j!$. 实际上，这是因为我们的假设不能保证 f 在 z_0 处可微. 270~271

现在考虑式(2)中沿 C_1 的积分. 因为 z 在 C_1 的外边，$(\zeta-z_0)/(z-z_0)$的模小于 1，我们

⊖ 一些读者可能用周线形变理论推出公式(2)，但是油炸面圈的比喻可能更易理解.

可把 $1/(\zeta - z)$ 表示成 $(\zeta - z_0)/(z - z_0)$ 的幂的形式；因此，记

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)}\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\left[1 + \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + \frac{(\zeta - z_0)^2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^m} + \frac{\dfrac{(\zeta - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}}}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\right],$$

代入积分式中，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{j=1}^{m+1} a_{-j}(z - z_0)^{-j} + \mathcal{J}_m(z),$$

其中

$$a_{-j} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-j+1}}d\zeta \quad (j = 1,2,3,\cdots) \tag{5}$$

(注意指数)及

$$\mathcal{J}_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\frac{(\zeta - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}}d\zeta.$$

因为对 C_1 上的 ζ，有 $|\zeta - z| \geqslant \rho_1 - R_1$，$|\zeta - z_0| = R_1$，并且 $|z - z_0| \geqslant \rho_1$(见图 5-4). 所以

$$|\mathcal{J}_m(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\max_{\zeta\in C_1}|f(\zeta)|\frac{1}{\rho_1 - R_1}\left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^{m+1}2\pi R_1.$$

因为 $R_1/\rho_1 < 1$，对 $|z - z_0| \geqslant \rho_1$，$\mathcal{J}_m(z)$ 一致的趋于 0，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z - z_0)^{-j} \quad (|z - z_0| \geqslant \rho_1).$$

这样，我们已经将公式(2)中的两个积分都表示成了定理中所提到的一致收敛级数的形式，它们具有公共的收敛域 $\rho_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \rho_2$；我们还需验证系数公式(1)成立. 如果 j 非负，式(4)成立；但由第 4 章可知，沿定理中提到的周线 C 的积分等于沿 C_2 的积分，这是因为介入区域内不包含 $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{j+1}$ 的奇异点. 所以，对 $j \geqslant 0$ 公式(1)成立. 类似地，式(5)中沿 C_1 的积分也可以化为沿 C 的积分，其中，积分号前加上负号表示沿曲线积分的方向发生了改变. 因此，对于每个 j 公式(1)得证. ■

272

在定理7中，用 $1/(z - z_0)$ 代替 $(z - z_0)$，容易看出任意形如 $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ 的形式级数在“收敛圆周” $|z - z_0| = r$ 的外部收敛，在每一个区域 $|z - z_0| \geqslant r' > r$ 内一致收敛，其中 r 为级数 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ 的收敛半径，它依赖于系数. 由定理8知可以对级数逐项积分，应用与5.3节类似的方法，可以证明如下命题.

定理 15 设 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z-z_0)^{-j}$ 是任意两个具有如下性质的级数:

(i) 当 $|z-z_0|<R$ 时, $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ 收敛.

(ii) 当 $|z-z_0|>r$ 时, $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z-z_0)^{-j}$ 收敛.

(iii) $r<R$.

则存在 $r<|z-z_0|<R$ 内解析的函数 $f(z)$,它在这个圆环内的洛朗级数为 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$.

定理 8 的证明留给读者作为练习(习题 8).

同定理7类似,这一定理表明,可以用其他方法求洛朗级数,因为对于任意形如 $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$ 的收敛级数,不管它是怎样得到的,它一定是它的和函数的洛朗级数. 在例 1 和例 2 中,我们将通过灵活运用几何级数 $\sum_{j=0}^{\infty} w^j$ 在 $|w|<1$ 时收敛于 $(1-\omega)^{-1}$ 这一事实,推导所给函数的洛朗展开式.

例 1 求函数 $(z^2-2z+3)/(z-2)$ 在区域 $|z-1|>1$ 内的洛朗级数.

解 注意在区域 $|z-1|>1$ 内,函数 $(z^2-2z+3)/(z-2)$ 仅以 $z=2$ 为奇点. 首先将 $1/(z-2)$ 变形,以便我们可以在区域 $|z-1|>1$ 内应用几何级数的结果:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-1/(z-1)}.$$

所以,对 $|z-1|>1$,

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^j}$$
$$=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots.$$

273

用 3.1 节的方法,将分母 z^2-2z+3 表示成 $z-1$ 的幂:

$$z^2-2z+3=(z-1)^2+0\cdot(z-1)+2=(z-1)^2+2.$$

因此

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2}=[(z-1)^2+2]\cdot\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right]$$
$$=\left[(z-1)+1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]+\left[\frac{2}{(z-1)}+\frac{2}{(z-1)^2}+\cdots\right]$$
$$=(z-1)+1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{3}{(z-1)^j}.$$

■

例 2　求函数

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在下列各区域内的洛朗级数.

(a)区域 $|z|<1$.

(b)区域 $1<|z|<2$.

(c)区域 $|z|>2$.

解　先把函数分解成部分分式

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

下面分别在各区域内求它的洛朗级数.

(a)当 $|z|<1$ 时,

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{j}=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{2^{j+1}} \tag{6}$$

和

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{j=0}^{\infty}z^{j}. \tag{7}$$

用(6)式减去(7)式, 得

274

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{j+1}}+1\right)z^{j}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^{2}+\cdots.$$

(b)当 $1<|z|<2$ 时, (6)仍然成立, 而

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}}. \tag{8}$$

所以

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{j}}{2^{j+1}}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{z^{j+1}}=\cdots-\frac{1}{z^{2}}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{z}{4}-\cdots.$$

(c)当 $|z|>2$ 时, (8)式仍成立, 又

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j}}{z^{j+1}}.$$

所以

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j}-1}{z^{j+1}}=\frac{1}{z^{2}}+\frac{3}{z^{3}}+\frac{7}{z^{4}}+\cdots.$$ ■

例 3　将 $e^{1/z}$ 在 $z=0$ 处展成洛朗级数.

解　我们已经知道, 对于所有(有限的) w,

$$e^{w}=1+w+\frac{w^{2}}{2!}+\frac{w^{3}}{3!}+\cdots.$$

所以, 如果 $z\neq 0$, 令 $w=1/z$ 得

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^{2}}+\frac{1}{3!z^{3}}+\cdots. \tag{9}$$ ■

例 4 函数

$$f(z) = \begin{cases} \sin z, & 如果\ z \neq 0, \\ 5, & 如果\ z = 0 \end{cases}$$

在 $z=0$ 处的洛朗展开式是什么？

解 机敏的读者一看到这个例子，必定会指责作者拿这种无价值的东西自娱—并且具有很好的理由！为了做成一个问题，函数f在 $z=0$ 处被赋予"不正确的"定义. 然而，请读者暂且忍耐，因为在下一节将会用到这个例子.

注意f满足定理 14 的假设，所以它在 $|z|>0$ 内可展成洛朗级数. 但是对这样的 z，我们有[回想 5.2 节(10)式]

$$f(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (|z|>0). \tag{10}$$

所以，式(10)必为f的洛朗展开式. ■ [275]

练习 5.5

1. 求函数 $1/(z+z^2)$ 在下列各区域内的洛朗级数：

(a) $0<|z|<1$ (b) $1<|z|$ (c) $0<|z+1|<1$ (d) $1<|z+1|$

2. $\sqrt{z}$的主值分支在区域 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ 内有洛朗级数展开式吗？

3. 求函数$\dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$在下列各区域内的洛朗级数：

(a) $|z|<1$ (b) $1<|z|<2$ (c) $2<|z|$

4. 求函数 $\sin(2z)/z^3$ 在 $|z|>0$ 内的洛朗级数.

5. 求函数$\dfrac{(z+1)}{z(z-4)^3}$在 $0<|z-4|<4$ 内的洛朗级数.

6. 在函数 $z^2\cos\left(\dfrac{1}{3z}\right)$在 $|z|>0$ 内的洛朗级数.

7. 求下列各函数在指定区域内的洛朗级数的前几项.

(a) $\dfrac{e^{1/z}}{z^2-1}$，在 $|z|>1$ 内. (b) $\dfrac{1}{e^z-1}$，在 $0<|z|<2\pi$ 内.

(c) $\csc z$，在 $0<|z|<\pi$ 内. (d) $1/e^{(1-z)}$，在 $1<|z|$ 内.

8. 给出定理 15 的证明.

9. 确定洛朗级数

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{z^j}{2^{|j|}}$$

的收敛圆环.

10. 证明函数

$$f(z) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$$

在 $|z|>0$ 内的洛朗级数展开式为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\lambda) z^k,$$

其中

276

$$J_k(\lambda) = (-1)^k J_{-k}(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(k\theta - \lambda\sin\theta)\,d\theta.$$

$J_k(\lambda)$称为 k 阶第一类贝塞尔函数.[⊖][提示：对 $C: |z| = 1$，应用积分公式(1).]

11. 求出函数

$$f_n(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^n} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

在 $|z| > \alpha$ 内成立的洛朗展开式的一般形式.

12. 证明如果 $f(z)$ 在 $0 < |z| < \rho$ 内具有形如 $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j z^j$ 的洛朗级数展开式，则 $\lim_{z\to 0} f(z)$ 存在.

13. 假设 $f(z)$ 在圆环 $r < |z - z_0| < R$ 内解析并且以 M 为界. 证明 $f(z)$ 在圆环内的洛朗展开式的系数 a_j 满足

$$|a_j| \leqslant \frac{M}{R_j}, \quad |a_{-j}| \leqslant Mr^j \quad (j = 0,1,2,\cdots).$$

5.6 零点与奇点

在这一节，我们将利用洛朗展开式对解析函数在零点和孤立奇点附近的性质进行分类. 如果函数 f 在点 z_0 解析并且 $f(z_0) = 0$，称 z_0 为函数 f 的零点. 如果 f 在某一去心圆盘 $0 < |z - z_0| < R$ 内解析，但是在点 z_0 不解析，称点 z_0 为 f 的孤立奇点. 例如，$\tan(\pi z/2)$ 在每个偶整数处具有一个零点，在每个奇整数处具有一个孤立奇点.

我们先考察 f 的零点.

> **定义 7** 如果 f 在点 z_0 处解析并且它在 z_0 的前 $m-1$ 阶导数均为零，但 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$，则点 z_0 称为函数 f 的 **m 阶零点**(zero of order m).

换句话说，如果 z_0 为 f 的 m 阶零点，则

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(m)}(z_0).$$

这时，f 在 z_0 处的泰勒级数为

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_0)^{m+2} + \cdots$$

或

$$f(z) = (z-z_0)^m[a_m + a_{m+1}(z-z_0) + a_{m+2}(z-z_0)^2 + \cdots] \tag{1}$$

的形式，其中 $a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$. 当 f 的级数收敛时，公式(1)的中括号内的级数显然也收敛(在任意指定的点，一个级数正好是另一个级数的倍数)；所以它定义了在点 z_0 的一个邻域内的解析函数 $g(z)$，并且 $g(z_0) \neq 0$，反之，具有形如式(1)的展开式的任意一个函数必然具有一个 m 阶零点，所以我们有下面的结果.

277

> **定理 16** 设 f 在点 z_0 解析，则 z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件是 f 可以表示为
>
> $$f(z) = (z-z_0)^m g(z),$$
>
> 其中 g 在点 z_0 解析并且 $g(z_0) \neq 0$.

一阶零点有时称为单零点. 例如，函数 $\sin z$ 在 z 取 π 的整数倍时得到的(如第 3 章所示)零点都是单零点(在这些点处函数的一阶导数 $\cos z$ 不为零).

⊖ 可以证明这个积分公式等价于练习 5.4 的习题 8 中的级数展开式.

下面给出定理 16 的一个推论，它表明非常数的解析函数的零点都是孤立的.

推论 3 如果 f 是一个解析函数且满足 $f(z_0)=0$，则或者 f 在点 z_0 的一个邻域内恒为零，或者存在点 z_0 的一个去心圆盘，在此圆盘上 f 没有零点.

证 设 f 在点 z_0 的泰勒级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$（所以 $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$）. 则由定理 3，该级数在 z_0 的某一圆域内收敛于 $f(z)$. 所以如果所有的泰勒系数 a_k 均为零，则 $f(z)$ 在这一邻域内必然恒为零. 否则，假定 $m(\geqslant 1)$ 为使得 $a_m \neq 0$ 的最小的下标，则由定义 7，z_0 为 f 的 m 阶零点，由定理 16，$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$. 因为 $g(z_0) \neq 0$ 并且 g 在 z_0 处连续（实际上，它在 z_0 处解析），所以存在一个圆盘 $|z-z_0| < \delta$ 使 g 在这个圆盘上没有零点. 所以，当 $0 < |z-z_0| < \delta$ 时，$f(z) \neq 0$. ■

注意，如果 f 非常数、解析且以 z_0 为零点，则此零点的阶必为一个整数；由定理 16 的分析，f 在 z_0 处解析的条件要求 m 是一个整数. 对于函数 $z^{1/2}$，可以说它在 $z=0$ 有 $\frac{1}{2}$ 阶零点，但它显然在这一点不解析.

现在来看 f 的孤立奇点. 我们知道 f 在任意孤立奇点 z_0 处具有洛朗展开式：

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j, \tag{2}$$

其中 $0 < |z-z_0| < R$（对任意的孤立奇点定理 14 中的"r"为零）. 按洛朗展开式的情况可将孤立奇点 z_0 分为下面三类.

278

定义 8 设 z_0 为 f 的孤立奇点，(2)式为 f 在 $0 < |z-z_0| < R$ 内的洛朗展开式，则

(i) 如果对所有的 $j<0$，$a_j=0$，称 z_0 为 f 的**可去奇点**(removable singularity).

(ii) 如果对某一正整数 m，$a_{-m} \neq 0$，而对所有的 $j < -m$，$a_j=0$，称 z_0 为 f 的 **m 阶极点**(pole of order m).

(iii) 如果对无穷多个负数 j，$a_j \neq 0$，称 z_0 为 f 的**本性奇点**(essential singularity).

下面分别考察这三类孤立奇点. 我们将证明，可以通过 $f(z)$ 在孤立奇点附近的性质对它们分类（即不用写出洛朗展开式）. 本节最后一个定理归纳了这些特征性结果.

当 z_0 为 f 的可去奇点时，它的洛朗级数为

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (0 < |z-z_0| < R). \tag{3}$$

上一节中的例 4 就是这种类型孤立奇点的一个例子. 下面是另外一些具有可去奇点的函数的例子.

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \qquad (z_0 = 0),$$

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left[\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) - 1\right] = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \cdots \qquad (z_0 = 0),$$

$$\frac{z^2-1}{z-1} = z + 1 = 2 + (z-1) + 0 + 0 + \cdots \qquad (z_0 = 1).$$

由(3)式可以看出，除点 z_0 以外，$f(z)$ 等于一个在 z_0 解析的函数 $h(z)$. 换句话说，$f(z)$ 在 z_0 的奇异性仅仅是因为 $f(z)$ 在 z_0 处没有定义，或者被“特别地”定义. 由于函数 $h(z)$ 在 z_0 处解析，它显然在 z_0 的某一邻域内有界[㊀]，所以我们有如下引理.

引理 5 如果 z_0 为 f 的可去奇点，则

(i) $f(z)$ 在 z_0 的某一去心圆邻域内有界.

(ii) 当 z 趋于 z_0 时，$f(z)$ 具有(有限)极限.

279 (iii) 在 z_0 处可以重新定义 $f(z)$，使得所得到的新函数在 z_0 解析.

反之，如果一个函数在孤立奇点的某一去心邻域内有界，则此奇点是可去奇点；这个结论的证明见习题 13.

显然，可去奇点在解析函数的理论中不太重要. 但正如下面引理 6 和引理 8 中我们将要看到的，在给出其他类型奇点的紧致刻画时，这一概念有时会有所帮助.

当 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点时，函数 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内的洛朗级数为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$$
$$+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\quad(a_{-m}\neq 0),\tag{4}$$

例如，

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots$$

以 $z=0$ 为 2 阶极点，而

$$\frac{\sin z}{z^5}=\frac{1}{z^5}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{5!}-\frac{z^2}{7!}+\cdots$$

以 $z=0$ 为 4 阶极点.

一阶极点称为单极点. 例如，$z=0$ 是函数 $(\sin z)/z^2$ 的单极点.

由(4)式，可以得到极点的如下特征：

引理 6 如果 z_0 为函数 f 的 m 阶极点，则对所有的整数 $\ell<m$，当 $z\to z_0$ 时，$|(z-z_0)^{\ell}f(z)|\to\infty$，并且 z_0 为 $(z-z_0)^m f(z)$ 的可去奇点. 特别地，当 z 趋近于极点[㊁]时，$|f(z)|\to\infty$.

证 由(4)式知，在 z_0 的某一去心邻域内有

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots,\tag{5}$$

因为没有负幂项，$(z-z_0)^m f(z)$ 的奇点 z_0 是可去的. 此外，当 $z\to z_0$ 时，$(z-z_0)^m f(z)\to a_{-m}\neq 0$. 所以对于任意整数 $\ell<m$，当 $z\to z_0$ 时，

$$|(z-z_0)^{\ell}f(z)|=\left|\frac{1}{(z-z_0)^{m-\ell}}(z-z_0)^m f(z)\right|\to\infty,\tag{6}$$

280 这是因为 $(z-z_0)^{m-\ell}\to 0$，$a_{-m}\neq 0$. ■

㊀ 即存在点 z_0 的邻域和常数 M 使得对这个邻域内所有的 z，$|h(z)|\leq M$.

㊁ 记号“$z\to z_0$ 时，$|h(z)|\to\infty$”指的是当 z 充分接近 z_0 时，$|h(z)|$ 大于任意给定的数.

引理 7 z_0 为函数 f 的 m 阶极点的充分必要条件是在 z_0 的某一去心邻域内有

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},\tag{7}$$

其中 g 在 z_0 处解析并且 $g(z_0)\neq 0$.

证 如果 z_0 为函数 f 的 m 阶极点，则由(5)式知，在 z_0 的某一去心邻域内有 $(z-z_0)^m f(z)=g(z)$，其中

$$g(z):=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots.$$

令 $g(z_0):=a_{-m}\neq 0$，则 g 在 z_0 解析并且不等于 0. 从而式(7)成立.

现在假定式(7)成立，记 $g(z)$ 的泰勒级数为

$$g(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

则 f 在 z_0 点附近的洛朗级数必为

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}=\frac{b_0}{(z-z_0)^m}+\frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots.$$

因为 $b_0=g(z_0)\neq 0$，上式表明 z_0 是 f 的 m 阶极点. ■

例 1 确定函数 $(\sin z)/(z^2-1)^2$ 的奇点 $z=1$ 的类别.

解 因为函数

$$\frac{\sin z}{(z^2-1)^2}=\frac{(\sin z)/(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

并且它的分子解析，在 $z=1$ 处不等于 0，由引理 7，$z=1$ 是函数的 2 阶极点. ■

例 2 证明有理函数的奇点只能是可去奇点或极点.

证 有理函数可表示为两个多项式的比值 $P(z)/Q(z)$ 的形式，并且它在复平面上除去 $Q(z)$ 的零点外处处解析. 如果 $Q(z)$ 有一个 m 阶零点 z_0，则 $Q(z)=(z-z_0)^m q(z)$，其中 $q(z)$ 为多项式并且 $q(z_0)\neq 0$.

如果 $P(z_0)\neq 0$，由引理 7 得

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{P(z)}{q(z)},$$

281

于是 z_0 为 $P(z)/Q(z)$ 的 m 阶极点. 另一方面，如果 $P(z_0)=0$，记 $P(z)=(z-z_0)^n p(z)$，其中 z_0 为 n 阶零点[这里不考虑 $P(z)\equiv 0$ 的平凡情况]；则

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^m}\frac{p(z)}{q(z)},$$

显然，如果 $n<m$，则 z_0 为 $P(z)/Q(z)$ 的一个极点；如果 $n\geqslant m$，z_0 为 $P(z)/Q(z)$ 的一个可去奇点. ■

用前面的分析方法，容易推出下面的关于零点与极点关系的定理，证明留给读者(习题 4).

引理 8 若 z_0 为 f 的 m 阶零点，则它为 $1/f$ 的 m 阶极点. 反之，若 z_0 为 f 的 m 阶极点，则它为 $1/f$ 的可去奇点，如果定义 $(1/f)(z_0)=0$，则 z_0 为 $1/f$ 的 m 阶零点.

一些人可能认为当 z 趋于极点时，显然有 $|f(z)|\to\infty$，我们的分析没有必要. 然而当 z 趋近于本性奇点时他们会惊讶地发现，这样的性质不再成立. 我们有如下定理.

定理 17(皮卡定理) *函数在本性奇点的任意邻域内，可以取任意一个复数为函数值，至多有一个值例外.*

定理的证明超出了本书的范围，建议读者证明较弱的结果，即习题 14 中的卡索拉蒂–魏尔斯特拉斯定理. 我们用下面的例子说明皮卡[⊖]定理.

例 3 对函数 $e^{1/z}$ 在 $z=0$ 附近验证皮卡定理的结论.

证 (首先注意到 $z=0$ 是本性奇点；参见 5.5 节例 3) 显然 $e^{1/z}$ 不取零值. 然而，如果 $c\neq0$，可以证明当 $|z|$ 小于任意的正数 ε 时，$e^{1/z}$ 取到值 c. 为此，注意到

282

$$\log c = \operatorname{Log}|c| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}c + 2n\pi\mathrm{i}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(参见 3.3)，通过选取充分大的 n，可以找到 $\log c$ 的一个值 w 使得 $|w|>1/\varepsilon$. 令 $z=1/w$，则 $|z|<\varepsilon$，并且

$$e^{1/z} = e^{w} = e^{\log c} = c.$$

(为了进一步得到 $e^{1/z}$ 在其本性奇点附近奇特的性质，建议读者绘制曲线 $|e^{1/z}|=s$ 的草图 (习题 16)，其中 $s=1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \cdots.$) ■

从前面的结果我们看到，函数的三种不同的孤立奇点在奇点附近具有不同的性质. *所以，设 z_0 为 f 的孤立奇点，如果 f 在 z_0 处有界表示 z_0 是可去奇点，当 $z\to z_0$ 时，f 趋于 ∞ 表示 z_0 是极点，当 $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 既不有界也不趋近于 ∞，则 z_0 必为本性奇点.* 在不方便求出函数的洛朗展开式的情况下，要确定奇点的类型，往往要用到这些特征.

例 4 确定函数 $\sin(1-z^{-1})$ 的奇点和零点的类别.

解 因为 $\sin w$ 的零点只有在 w 取 π 的整数倍时得到，所以只有当

$$1-z^{-1}=n\pi$$

时，函数 $\sin(1-z^{-1})$ 有零点，即

$$z=\frac{1}{1-n\pi}\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

此外，因为函数在这些点的导数为

$$\frac{d}{dz}\sin(1-z^{-1})\Big|_{z=(1-n\pi)^{-1}} = \frac{1}{z^2}\cos(1-z^{-1})\Big|_{z=(1-n\pi)^{-1}} = (1-n\pi)^2\cos n\pi\neq0,$$

所以这些零点都是单零点.

$\sin(1-z^{-1})$ 的唯一奇点是 $z=0$. 如果让 z 沿正实轴趋近于零，则 $\sin(1-z^{-1})$ 在 ±1 之间振荡. 这样的性质只能是本性奇点的特征性刻画. ■

例 5 确定函数 $f(z)=(\tan z)/z$ 的零点和极点的类别.

解 因为 $(\tan z)/z=(\sin z)/(z\cos z)$，它的零点只能是 $\sin z$ 的零点；即 $z=n\pi(n=0,\ \pm1,$

⊖ 皮卡(Charles Emile Picard, 1856—1941)在巴黎的 Ecole 中心工作期间培训了超过 10 000 位工程师.

± 2, …). 然而 $z=0$ 实际上是奇点. 此外, $\cos z$ 的零点 $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 也是奇点. 我们依次验证这些事实.

283

如果 n 是一个非零整数, 不难证明 $z=n\pi$ 是给定函数的单零点.

在点 $z=0$ 附近, 我们有

$$\frac{\tan z}{z}=\frac{\sin z}{z\cos z}=\frac{1}{z\cos z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{\cos z}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right),$$

并且当 $z\to 0$ 时, $(\tan z)/z\to 1$. 所以 $z=0$ 为可去奇点.

最后, 因为 $z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 是 $\cos z$ 的单零点, 容易看出 $f(z)$ 以这些点为单极点. ■

下面的定理 18 归纳了上述三类孤立奇点的各种等价性质. 为简便起见, 我们用逻辑学的符号"$\Leftrightarrow$"表示逻辑等价; 可以理解为"当且仅当".

定理 18 如果 z_0 为 f 的孤立奇点, 则下列等价关系成立:

(i) z_0 为可去奇点 $\Leftrightarrow$ $|f|$ 在 z_0 的邻域内有界 $\Leftrightarrow$ $z\to z_0$ 时, $f(z)$ 极限存在 $\Leftrightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 处的值可以重新定义, 使得 f 在 z_0 点解析.

(ii) z_0 为极点 $\Leftrightarrow$ $z\to z_0$ 时, $|f|\to\infty$ $\Leftrightarrow$ 存在某一整数 $m>0$, 以及一个在 z_0 处解析的函数 g, $g(z_0)\neq 0$, 使得 f 可表示为 $f(z)=g(z)/(z-z_0)^m$ 的形式.

(iii) z_0 为本性奇点 $\Leftrightarrow$ $|f(z)|$ 既不在 z_0 点有界, 在 $z\to z_0$ 时, $|f(z)|$ 也不趋近于无穷 $\Leftrightarrow$ 在 z_0 的任意邻域内, $f(z)$ 可以取到任意一个复数值, 至多除去一个例外.

最后, 我们给出一些一般结论. 正如前面我们看到的, 一个函数 f 在点 z_0 的解析性质对 f 有极大限制; 特别是, 它必须是无穷次可微的, 并且可以由它在 z_0 的邻域内的泰勒级数来表示. 现在我们发现, 如果函数 f 仅仅是在 z_0 的去心邻域内(例如 $0<|z-z_0|<r$)有定义并且解析, 那么它仍然会受到很强的限制. 可以通过看看要乘以 $(z-z_0)$ 的多少次幂来"转化" $f(z)$, 使得当 $z\to z_0$ 时, $(z-z_0)^m f(z)$ 具有有限非零极限值, 以此来刻画 $f(z)$ 在 z_0 附近的性质. 如果 m 是一个正整数, 则 z_0 为 f 的 m 阶极点, f 可写成 $g(z)/(z-z_0)^m$ 的形式, 其中 g 在 z_0 处解析且不等于零. 如果 m 是一个负整数, 则 f 可表示为 $g(z)(z-z_0)^{|m|}$ 的形式, 其中 g 仍在 z_0 处解析且不等于零. 后一种形式说明 z_0 为 f 的 $|m|$ 阶零点. 如果 m 为零, 则 z_0 为 f 的可去奇点.

284

仅有的另外一种可能是不存在这样的 m, 即没有 $(z-z_0)$ 的幂使得 $(z-z_0)^m f(z)$ 在 z_0 处具有非零的极限. 那么除了 $f(z)$ 恒为零(不值得"转化")的情况, 它以 z_0 为本性奇点, 在 z_0 的任意邻域内, 它的值可以取到所有的复数(至多除去一个可能的例外).

练习 5.6

1. 求出下列函数的孤立奇点并确定它们的类别.

(a) $\dfrac{z^3+1}{z^2(z+1)}$　(b) $z^3 e^{1/z}$　(c) $\dfrac{\cos z}{z^2+1}+4z$　(d) $\dfrac{1}{e^z-1}$

(e) $\tan z$　(f) $\cos\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$　(g) $\dfrac{\sin(3z)}{z^2}-\dfrac{3}{z}$　(h) $\cot\left(\dfrac{1}{z}\right)$

2. 函数

$$f(z)=\frac{1}{(2\cos z-2+z^2)^2}$$

的极点 $z=0$ 的阶是多少？[提示：考虑 $1/f(z)$.]

3. 构造在复平面上满足下列条件的函数 f，使得它们在除去孤立奇点外的区域内解析.

(a) f 具有二阶零点 $z=i$ 和 5 阶极点 $z=2-3i$.

(b) f 具有单零点 $z=0$ 和本性奇点 $z=1$.

(c) f 具有可去奇点 $z=0$，6 阶极点 $z=1$ 和本性奇点 $z=i$.

(d) f 具有 2 阶极点 $z=1+i$，本性奇点 $z=0$ 和 $z=1$.

4. 给出引理 8 的证明.

5. 判断下列命题是正确的还是错误的.

(a) 如果 z_0 为 f 和 g 的极点，则 z_0 为 $f+g$ 的极点.

(b) 如果 z_0 为 f 的本性奇点，为 g 的极点，则 z_0 为 $f+g$ 的本性奇点.

285

(c) 如果 $z=0$ 为 f 的 m 阶极点，则 $z=0$ 是 $f(z^2)$ 的 $2m$ 阶极点.

(d) 如果 z_0 为 f 的极点，为 g 的本性奇点，则 z_0 为乘积 $f\cdot g$ 的极点.

(e) 如果 z_0 为 f 的 m 阶零点，为 g 的 n 阶极点，$n\leqslant m$，则 z_0 为乘积 $f\cdot g$ 的可去奇点.

6. 证明如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 z_0 为 $f'(z)$ 的 $m+1$ 阶极点.

7. 如果 $f(z)$ 在 $D: 0<|z|\leqslant 1$ 内解析，并且对任意整数 ℓ，$z^{\ell}\cdot f(z)$ 在 D 内无界，则 $z=0$ 是 $f(z)$ 的哪种类型的奇点？

8. 对函数 $\cos(1/z)$ 在 $z_0=0$ 处验证皮卡定理.

9. 存在以 z_0 为本性奇点并且沿着从 z_0 出发的某一线段有界的函数 $f(z)$ 吗？

10. 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，并且互异点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 分别为它的 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 阶零点，证明存在一个在 D 内解析的函数 g，使得

$$f(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_n)^{m_n}g(z).$$

11. 如果 z_0 为 f 的极点，证明 $\mathrm{Re}f$ 和 $\mathrm{Im}f$ 在 z_0 的任意去心邻域内取到任意大的正数值和负数值.

12. 证明：如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 z_0 为 $g(z):=f'(z)/f(z)$ 的单极点. 在 $g(z)$ 的洛朗展开式中 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数是多少？

13. 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，并且 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内有界. 用洛朗系数的积分公式直接证明对所有的 $j=1, 2, \cdots$，有 $a_{-j}=0$；即 z_0 必为 $f(z)$ 的可去奇点.

14. 不用皮卡定理，证明卡索拉蒂–魏尔斯特拉斯定理[⊖]：如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则在点 z_0 的任意去心邻域内，函数 $f(z)$ 可以任意接近于预先给定的任何复数值. [提示：设 c 为任意给定的复数，若假定在点 z_0 的任意小的去心邻域内，$|f(z)-c|\geqslant\delta>0$. 则由习题 13，证明 z_0 必为 $f(z)-c$ [从而 $f(z)$ 自身] 的可去奇点或极点.]

15. 证明：如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，则 z_0 也为函数 $e^{f(z)}$ 的本性奇点.[提示：证明当 $z\to z_0$ 时 $e^{f(z)}$ 既不是有界的，也不(按模)趋于无穷.]

16. 画出 $s=1, \dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{3}, 3, \cdots$ 时的阶层曲线 $|e^{1/z}|=s$ 的图像，并且说明它们在 $e^{1/z}$ 的本性奇点 $z=0$ 处都

⊖ 卡索拉蒂(Felice Casorati，1835—1890)，魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass，1853—1897). 分析学科在魏尔斯特拉斯的讲义中得到发展，他建立了未来数学的严格标准.

收敛.[提示：阶层曲线都是圆周.]

286

17. 按以下步骤证明施瓦茨引理：

(施瓦茨引理) 如果f在单位圆盘$U: |z|<1$内解析，并且满足条件$f(0)=0$，对U内所有的z，$|f(z)|\leqslant 1$，则对U内所有的z，$|f(z)|\leqslant |z|$.

(a)定义$F(z):=f(z)/z$，$z\neq 0$，并且$F(0)=f'(0)$. 证明F在U内解析.

(b)令$\zeta(\neq 0)$为U内任意固定点，r为满足$|\zeta|<r<1$的任意实数. 用最大模原理证明：如果C_r表示圆周$|z|=r$，则

$$|F(\zeta)|\leqslant \max_{z\in C_r}\frac{|f(z)|}{r}\leqslant\frac{1}{r}.$$

(c)在(b)中令$r\to 1^-$，对U内所有的ζ，有$|f(\zeta)|\leqslant|\zeta|$.

18. 设函数f满足施瓦茨引理(习题17)的条件. 证明：如果对U内某一非零点z_0，$|f(z_0)|=|z_0|$，则f必然是形如$f(z)=e^{i\theta}z$的函数，其中θ为一实数. 还可以证明，如果$|f'(0)|=1$，f必然也具有这种形式.

19. 定义函数$h(z)$为

$$h(z)=\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}+\frac{2z}{z^2-\pi^2}.$$

(a)证明除可去奇点$z=0$，$\pm\pi$外，$h(z)$在圆盘$|z|<2\pi$内解析.

(b)求出$h(z)$在$z=0$处的泰勒级数的前四项，并求出这个级数的收敛半径.

(c)用(b)的结果求$\csc z=1/\sin z$时在圆环域$\pi<|z|<2\pi$内的洛朗级数展开式的前几个系数(负幂项和正幂项).

5.7 无穷远点

从5.6节中对奇点的讨论可知，如果映射为具有一个极点的解析函数，它会把极点附近的点映为距离难以确定的点. 读者一定会想到把函数f在极点的值取为∞. 然而，在给出合适的定义之前，我们应该了解与此有关的一些知识. 让我们仔细研究一下$1/z$在$z=0$处的性质.

287

当z沿正实轴趋近于0时，$1/z$趋近于“正无穷”；当z沿负实轴趋近于0时，$1/z$趋近于“负无穷”；如果z沿正虚轴趋近于0，那么$1/z$趋于什么数呢？“无穷的$-i$倍吗？”如果我们用符号∞表示1/0，肯定会想到要把所有这些“极限”都看作同一个数；在几何上，我们把它称之为*无穷远点*，(可以说)它可以通过沿复平面上任意方向无限前进达到.

在1.7节中，我们详细讨论了复数系含有无穷远点的情形. 回忆当“∞”被加入到复数集后，所得到的集合$\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$称为*扩充复平面*，(通过球极射影)它可以用黎曼球面上的点表示. 这时，∞的邻域正好是以北极为心的球冠(见图1-22)，它与扩充复平面上圆周$|z|=M$外部的所有点的集合相对应. 并且，对于$\mathbf{C}$上的一个点列$z_n(n=1,2,3,\cdots)$，如果取n充分大时，$|z_n|$可以任意大，则点列z_n趋于∞.

所以，当$z\to z_0$时，$|f(z)|$无界[⊖]，记$f(z_0)=\infty$，当$z\to\infty$时，$f(z)\to w_0$，记$f(\infty)=w_0$. 例如，若

$$f(z)=\frac{2z+1}{z-1},\qquad(1)$$

⊖ 确切地说，如果对任意的$M>0$，存在$\delta>0$使得$0<|z-z_0|<\delta$时，$|f(z)|>M$，则$f(z_0)=\infty$.

则 $f(1)=\infty$，$f(\infty)=2$.

对于 $h(z)=2z+1$，我们有 $h(\infty)=\infty$.

有了上面的准备之后，我们给出函数在∞的其他概念以及讨论它"在∞的解析性"就方便多了. 对于f在∞的解析性质，可以先做映射 $\omega=1/z$，将无穷远点映为原点，然后根据复合函数 $g(\omega):=f(1/\omega)$在原点 $\omega=0$ 的性质来分类. 于是

1. 如果 $f(1/\omega)$在 $\omega=0$ 解析(或者 $\omega=0$ 为 $f(1/\omega)$的可去奇点)，则称 $f(z)$在∞解析.

2. 如果 $\omega=0$ 是 $f(1/\omega)$的 m 阶极点，则称∞是 $f(z)$的 m 阶极点.

3. 如果 $\omega=0$ 是 $f(1/\omega)$的本性奇点，则称∞是 $f(z)$的本性奇点.[㊀]

由定理 18，我们可以把对于在某个圆盘外解析的函数的这些条件理解为：

288

1′. 如果对充分大的 $|z|$，$|f(z)|$有界，则称 $f(z)$在∞解析.

2′. 如果 $z\to\infty$ 时，$f(z)\to\infty$，则称∞为 $f(z)$的极点.

3′. 如果对充分大的 $|z|$，$|f(z)|$无界，当 $z\to\infty$ 时，$|f(z)|$也不趋于无穷，则称∞为$f(z)$的本性奇点.

例 1 确定函数 z^2+2，$(\mathrm{i}z+1)/(z-1)$和 $\sin z$ 在∞的奇点类别.

解 显然∞是 $f(z)=z^2+2$ 的极点. 因为

$$f\left(\frac{1}{\omega}\right)=\frac{1}{w^2}+2$$

以 $\omega=0$ 为 2 阶极点，所以∞为 $f(z)$的 2 阶极点.

因为 $z\to\infty$ 时，

$$\frac{\mathrm{i}z+1}{z-1}\to\mathrm{i},$$

函数在∞解析.

最后，考虑 $\sin z$，即使对实数 z，当 $z\to\infty$ 时，$\sin z$ 也没有极限(它是振荡的). 所以∞必为它的本性奇点.[㊁] ■

例 2 求所有在扩充复平面上处处解析的函数f.

解 因为f在∞解析，它在 $|z|>M$ 时有界. 由连续性，当 $|z|\le M$ 时f也是有界的. 所以，f是有界整函数. 由刘维尔定理，f为常数. ■

例 3 将所有在扩充复平面上除一个极点外处处解析的函数分类.

解 如果 $f(z)$有一个极点，不妨设某一有限点 z_0 为它的 m 阶极点，则f的洛朗级数

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{2}$$

对所有的 $z\neq z_0$ 均收敛. 并且，因为我们已经假设 $z_0\neq\infty$，函数f在∞必然解析，所以在∞有界. 那么由式(2)，由级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 定义的整函数也在∞有界；所以它必为常数，即等于 a_0. 从

㊀ 一些作者也允许∞为可去奇点，但是我们觉得由这一一般性得不到什么. 当然，$f(z)$以∞为 m 阶零点同 $f(1/\omega)$以 0 为 m 阶零点相对应.

㊁ 另外一种方法，也可以从 $\sin(1/\omega)$在 $\omega=0$ 的洛朗展开式直接得到.

而，这样一个函数f的最一般形式为

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0. \tag{3}$$

289

如果$z=\infty$为$f(z)$的极点，则$f(1/\omega)$以原点为极点，并且可以表示成如下形式

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_{-m}}{w^m} + \frac{a_{-m+1}}{w^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n. \tag{4}$$

因为$f(z)$在$z=0$附近有界，则对于充分大的$|\omega|$，$f(1/\omega)$有界，类似前面的讨论得，当$n>0$时，$a_n=0$. 所以式(4)变为

$$f(z) = a_{-m}z^m + a_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + a_{-1}z + a_0; \tag{5}$$

即$f(z)$是z的多项式.

公式(3)和(5)将扩充复平面上仅具有一个极点的所有函数归了类. ■

注意富克斯方程的理论是建立在对扩充复平面上奇点的考虑的基础上的，这有益于将许多在数理学中提出来的所谓的"特殊函数"联系起来. 参考文献[3]中讨论了这一应用.

练习 5.7

1. 确定下列各函数在∞的奇点类型(如果是零点或极点，说明它的阶).

(a) e^z　　(b) $\cosh z$　　(c) $\dfrac{z-1}{z+1}$

(d) $\dfrac{z}{z^3+i}$　　(e) $\dfrac{z^3+i}{z}$　　(f) $e^{\sinh z}$

(g) $\dfrac{\sin z}{z^2}$　　(h) $\dfrac{1}{\sin z}$　　(i) $e^{\tan 1/z}$

2. 证明：如果$f(z)$在∞解析，则它具有在某个圆盘外一致收敛的级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

3. 对下面的函数构造习题2中描述的级数.

(a) $\dfrac{z-1}{z+1}$　　(b) $\dfrac{z^2}{z^2+1}$　　(c) $\dfrac{1}{z^3-i}$

4. 对以∞为本性奇点的函数证明皮卡定理(5.6节)，并对函数e^z进行验证.

290

5. 如果$f(z)$是满足$\deg P<\deg Q$的形为$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的有理函数，∞作为零点的阶数是多少？

6. 设f在简单负向闭周线Γ上和它的外部解析. 如果进一步假定f在∞解析并且$f(\infty)=0$. 证明对Γ以外所有的z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

[提示：对圆环内的点z应用柯西积分公式并且让外半径趋近于∞.]

7. 证明：如果f在简单闭周线Γ上和它的外部解析，并且以∞为2阶或更高阶零点，则

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

如果仅仅假设f以∞为单零点，这个积分为零吗？

习题 8 ~ 12 讨论正函数类.

8. (a) 证明解析函数 f 在其 m 阶零点 z_0 的某一邻域内可以表示为 $(z-z_0)^m[c+\varepsilon(z)]$ 的形式，其中 c 是常数，$\varepsilon(z)$ 解析并且 $|\varepsilon(z)|<|c|/100$. $\left(\text{分式}\frac{1}{100}\text{没有特殊含义.}\right)$

(b) 证明解析函数 f 在其 m 阶极点 z_0 的某一邻域内可以表示为 $(z-z_0)^{-m}[c+\eta(z)]$ 的形式，其中 c 是常数，$\eta(z)$ 解析并且 $|\eta(z)|<|c|/100$.

9. 设 $f(z)$ 是一个有理函数(多项式的比)，如果 $\mathrm{Re}z>0$ 时，$\mathrm{Re}\,f(z)>0$，则称函数 $f(z)$ 为一个正函数. 1931 年 Otto Brune 证明了当 z 看作"虚频率"$\mathrm{i}\omega$ 时，任意电路的复阻抗一定是正函数(参见 3.6 节).

(a) 证明 3.6 节中所研究的电路的复阻抗

$$R_{\mathrm{eff}}=\frac{R/\mathrm{i}\omega C}{R+1/\mathrm{i}\omega C}+\mathrm{i}\omega L,$$

将 $\mathrm{i}\omega$ 用 z 替代后是正函数(对正的 R，L 和 C).

(b) 证明复导纳 $1/R_{\mathrm{eff}}$ 也是正函数.

(c) 推广：证明任意正函数的倒数也是正函数.

10. 考察因子 $(z-z_0)^{\pm m}$ 中符号的变化，用上题的结果证明，如果 f 是一个正函数，

(a) f 在右半平面没有极点或零点；

291

(b) f 的纯虚的极点或零点(如果有)必然是单(1 阶)的并且相应的习题 8 中的常数 c 为正实数.

11. 推广上一题的结论，证明正函数要么在 ∞ 解析并且不等于零，要么以 ∞ 为单极点或单零点. 这对多项式的分子和分母的次数说明了什么？

12. (a) 设 f 为在虚轴上没有极点的正函数. 应用 4.7 节的极大极小定理证明 $\mathrm{Re}f$ 在闭右半平面的极小值在虚轴上取到(包括无穷远点).

(b) 应用习题 10 给出的 f 的虚极点的特征去掉 (a) 中"无极点"的限制. [提示：用锯齿形的周线.]

(c) 证明：如果 f 是在右半平面上解析的有理函数，在虚轴(包括无穷远点)上仅有具有正"留数"(习题 8 中的常数 c)的单极点，并且在虚轴上满足 $\mathrm{Re}f\geqslant 0$，则 f 是一个正函数.

13. (a) 证明：不存在在 $|z|>1$ 内解析的 $(z^2-1)^{1/3}$ 的(单值)分支. [提示：考虑无穷远点.]

(b) 证明：的确存在在 $|z|>3$ 内解析的 $[(z-1)(z-2)(z-3)]^{1/3}$ 的(单值)分支.

*5.8 解析延拓

当给出计算在区域 D 内解析的函数 f 的公式或算法时，通常很想知道这个"解析区域"是否可以扩大—即是否存在在较大区域上解析的函数 F，对 D 上的点 z，它的值同 $f(z)$ 在这一点的值相等. 这时称 F 是 f 的解析延拓.

在某些情况下也用到这一术语. 例如，f 的原始定义域不是第 1 章意义下的一个真实的"区域"(从而原始函数 f 不解析)的情况. 我们已经遇到过这种意义下解析延拓的一些简单的例子；例如，把实多项式 x^2+1 扩充为复数 z^2+1，把函数 $f(x)=x^2+1$ 从实轴解析延拓到全平面 $\mathbf{C}$ 上. 函数 e^z，$\sin z$ 和 $\log z$ 都可用解析延拓来解释.

解析延拓在许多工程系统的分析中被提出，在那里会遇到描述以 ω 为频率的激发系统响应函数 $f(\omega)$(见 3.6 节). f 关于"复频率值"的解析延拓通常最有意义. 事实上，在第 8 章中我

292

们将用这个方法将傅里叶变换和拉普拉斯变换联系起来.

解析延拓可以是一个细微的过程. 确实，x^2+1 延拓为 z^2+1 仅仅是一个公式化的延拓方法；但恒等式(见 4.4 节)

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & \text{如果 } z \text{ 在 } C \text{ 内}, \\ 0, & \text{如果 } z \text{ 在 } C \text{ 外} \end{cases}$$

表明对函数 $f(z) := 2\pi\mathrm{i}(=\text{常数})$,在 C 内成立的"公式"$\int_C \mathrm{d}\zeta/(\zeta - z)$ 不是 f 在 C 外的正确解析延拓.

下面考虑关于解析延拓的一些有趣问题. 对于在区域 D 内解析的函数，越过 D 的边界或部分边界的解析延拓总是可能的吗？延拓函数 F 是唯一的吗？存在得出 F 的计算法则吗？本节我们将初步讨论这些问题.

泰勒级数是研究解析延拓的工具之一. 我们假定这样一种情形：需要研究由级数

$$f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}(z-1)^j}{j} \tag{1}$$

定义的函数 $f(z)$. 例如，应用 5.3 节例 1 中的幂级数的方法，通过求微分方程

$$y'' + \frac{y'}{z} = 0 \tag{2}$$

满足初始条件

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1 \tag{3}$$

的特解而得到(1)式. [事实上，$f(z)$ 是一个众所周知的函数，但是为了解释得更清楚一些，目前先不去确定它.]

因为微分方程(2)中的系数仅在 $z=0$ 处不解析，5.3 节中引入的初值定理保证级数(1)的收敛圆周至少可以扩展这一点. 所以，可以说我们已知道解析函数 f 在 C: $|z-1|=1$ 内的值(或者更确切地说，在 C 内可以准确地计算出 $f(z)$ 在任意点及其导数的值). 特别地，我们"知道"这个函数及其导数在图 5-6 中点 z_1 的值.

由这些数据，可以构造幂级数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_1)}{j!}(z - z_1)^j. \tag{4}$$

当然，这是解 f 在以 z_1 为心的某个圆内的泰勒级数，至少可以保证它在图 5-7 的小圆 C' 内收敛于 f，其中 f 已知是解析的. 然而，初值定理进一步告诉我们，幂级数(4)在从 z_1 延拓到经过原点的大圆 C'' 内收敛(这也是因为微分方程的系数在 C'' 内解析). 所以我们已经通过级数(4)解析延拓了函数 f，即将它的解析区域延拓到了圆 C 的外边. 293

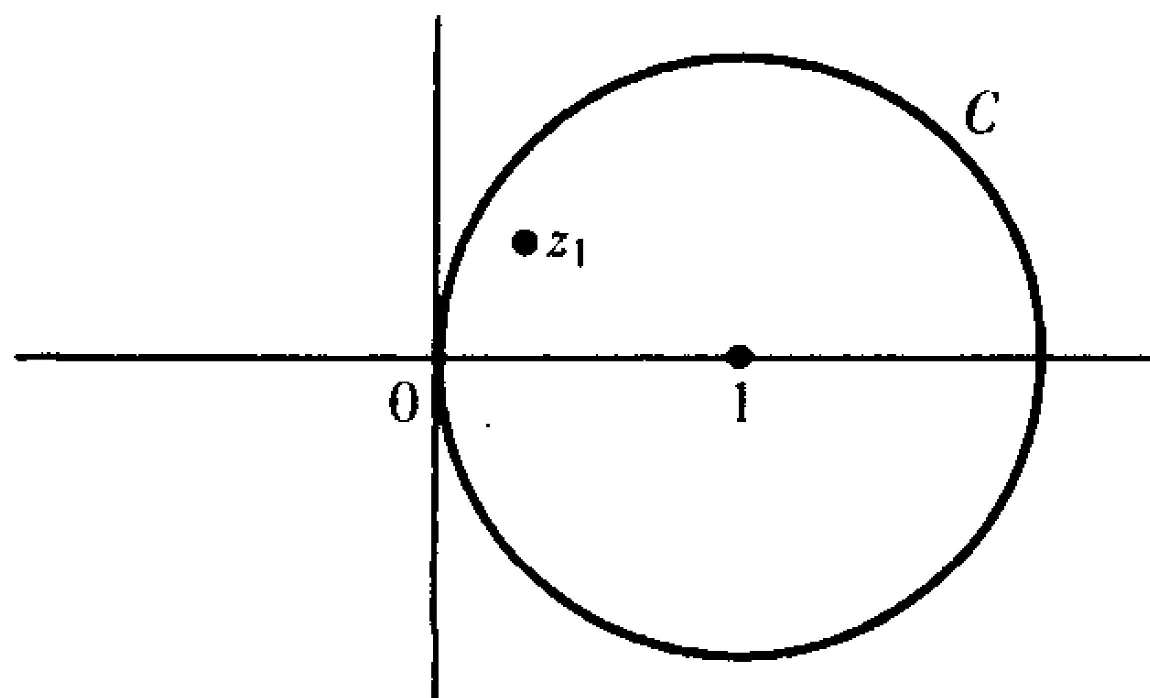


图 5-6　级数(1)的收敛圆

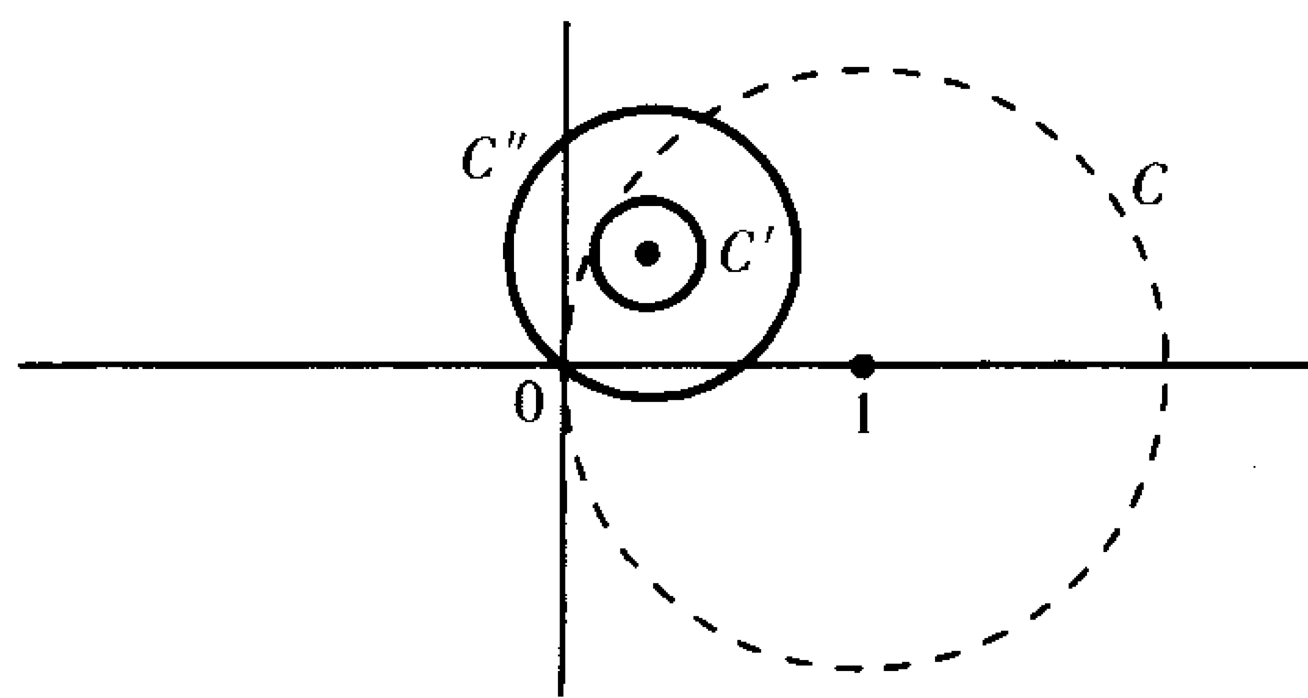


图 5-7　指定的收敛圆

级数(1)所定义的函数实际上是 Log$z$. 读者可以直接验证(1)就是 Log$z$ 的泰勒级数，并且 Log$z$ 满足微分方程(2)和初始条件(3). 这个解确实在 $z=0$ 不解析，而圆 C 和 C''确实是收敛圆.

为了继续我们的研究，需要介绍一些专用名词，它包含了刚才所分析的特殊情况.

定义 9 假设 f 在区域 D_1 内解析，g 在区域 D_2 内解析. 如果 $D_1 \cap D_2$ 非空，并且对 $D_1 \cap D_2$ 中所有的 z，$f(z)=g(z)$，则称 g 是 f 到 D_2 的**直接解析延拓**.

在上面的例子中，第一个区域 D_1 是 C 的内部，第二个区域 D_2 是 C''的内部，g 是幂级数(4)的和. 实际上，我们没有证明在整个"透镜形"区域 $D_1 \cap D_2$ 上 $f=g$，而只在 C'内建立了这一等式. 所以要用下面的定理说明(4)确实是 $f(z)$ 到 D_2 的一个直接解析延拓.

294

定理 19 如果 F 在区域 D 内解析，并且在 D 内某一开圆盘上等于零，则它在整个 D 内为零.

证 由假设，D 包含一个圆盘$\mathcal{N}$，不妨设它的圆心为 z_0，使得对$\mathcal{N}$上所有的 z，$F(z)=0$. 假设定理的结论不成立，则存在 D 内的某一点 z_1，使得 $F(z_1)\neq 0$. 设 Γ 为 D 内连接 z_0 和 z_1 的一条路径.（见图 5-8.）当 z 沿 Γ 从 z_0 开始移动时，起初我们只观察到 $F(z)=0$ 的那些点. 然而，最终必然会遇到具有如下性质的点 ω：

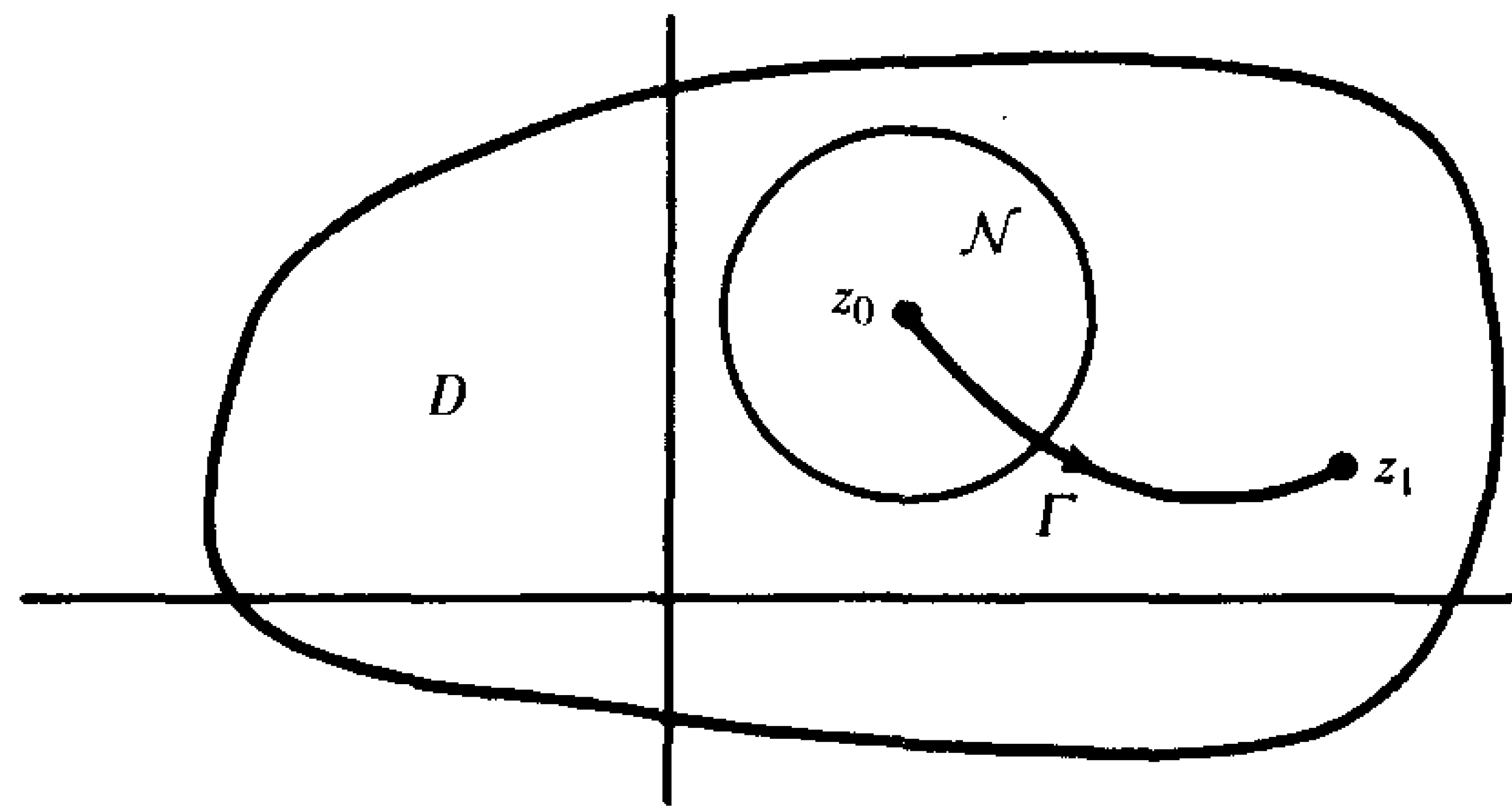


图 5-8 定理 9 的几何图形

(i)对 Γ 上先于 ω 的所有 z，有 $F(z)=0$.

(ii)在 Γ 上存在任意接近于 ω 的点 z，使得 $F(z)\neq 0$(回顾在 4.6 节定理 23 的证明中有类似情况).

首先，我们注意到，由条件(i)推出，在 Γ 上位于 ω 之前的部分，$F(z)$的导数为零，这是因为在曲线的这一部分上的任意点 z，我们可以通过让 ζ 沿着 Γ 的这一部分趋于 z 来计算

$$F'(z) = \lim_{\zeta\to z}\frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta - z},$$

其中 $F(\zeta)=F(z)=0$. 从而极限为零. 依此类推，得

$$F''(z) = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\in\Gamma}}\frac{F'(\zeta)-F'(z)}{\zeta - z} = \lim_{\substack{\zeta\to z\\ \zeta\in\Gamma}} 0 = 0,$$

依此一直进行下去，可得：在 Γ 上位于 ω 之前的部分，$F(z)$的所有阶导数都为零. 然后，再由连续性，在点 ω 处 F 及其所有阶导数也全为零，这就是说 F 在 $z=\omega$ 的泰勒系数全为零；即 F 必然在以 ω 为心的某一圆盘内为零. 但是这同条件(ii)矛盾，所以我们关于 F 不恒为零的假定是错误的. ■

295

推论 4 如果 f 和 g 都在区域 D 内解析，并且在含于 D 的某一圆盘内 $f=g$，则在整个 D 内 $f=g$.

证 只需对差 $F:=f-g$ 应用定理 19. ■

现在回到图 5-7 中所描述的情形的讨论，我们可以得出结论：因为级数(1)和(4)在圆 C' 内相等，它们必然在由 C 和 C''的内部的交所形成的透镜形区域内相等．那么，由定义 9，这蕴涵级数(4)是 $f(z)$ 的从 C 的内部到 C''的内部的直接解析延拓．

下面给出一些关于直接解析延拓的结果，它们会被经常用到．前两个比较简单，这里述而不证．

定理 20 如果 f 在区域 D_1 内解析，g 是 f 到区域 D_2 的直接解析延拓，则函数

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D_1, \\ g(z) & z \in D_2 \end{cases} \tag{5}$$

在 $D_1 \cup D_2$ 上单值解析．

定理 21 如果 f 在区域 D_1 内解析，并且 D_2 是使得 $D_1 \cap D_2$ 非空的区域，如果 f 到 D_2 的直接解析延拓存在，则它是唯一的．

定理 19 及其推论可以推广如下．

定理 22 设 f 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$ 是 D 内由不同的点组成且收敛于点 z_0 的无穷序列．如果对于 $n=1, 2, \cdots$，有 $f(z_n)=0$，那么在整个区域 D 内，$f(z)\equiv 0$.

证 由连续性，z_0 为 f 的零点．然而，由于 z_0 的任意去心圆盘内都包含序列 $\{z_n\}$ 中的点，所以它不是孤立零点．由 5.6 节推论 3，f 必然在 z_0 的某一邻域内恒为零．从而由定理 19，在整个区域 D 内 $f(z)\equiv 0$. ■

296

推论 5 设函数 f 和 g 在区域 D 内解析，$\{z_n\}$ 为 D 内由不同的点组成且收敛于点 z_0 的无穷序列．如果对 $n=1, 2, \cdots$，有 $f(z_n)=g(z_n)$，那么在整个 D 内，$f\equiv g$.

证 仍考虑 $f-g$. ■

这一推论常用来把一条曲线上的一个已知等式延拓到一个区域，下面举例说明．

例 1 应用推论 5 证明，对所有的 z，

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

解 从初等的三角学知，这一等式对所有的实数 z 成立．换句话说，两个整函数 $f(z):=\sin^2 z+\cos^2 z$ 和 $g(z):=1$ 在实轴上相等．因此由推论 5，可将这一等式延拓到整个平面． ■

现在，我们考虑一个相关的问题，即沿曲线的解析延拓．假设情况如下(参见图 5-9)：$f(z)$ 在区域 D 内解析，z_1 是 D 内的点，γ 是连接 z_1 和点 z^* 的某一路径．

由于 $f(z)$ 在 z_1 解析，将 $f(z)$ 在 z_1 处展成泰勒级数，设所得到的幂级数在一个圆内收敛于函数 $f_1(z)$，记这个圆为 C_1．在 C_1 内，沿曲线 γ 前进直到某个点 z_2，然后将 $f_1(z)$ 在点 z_2 处展开，得到的

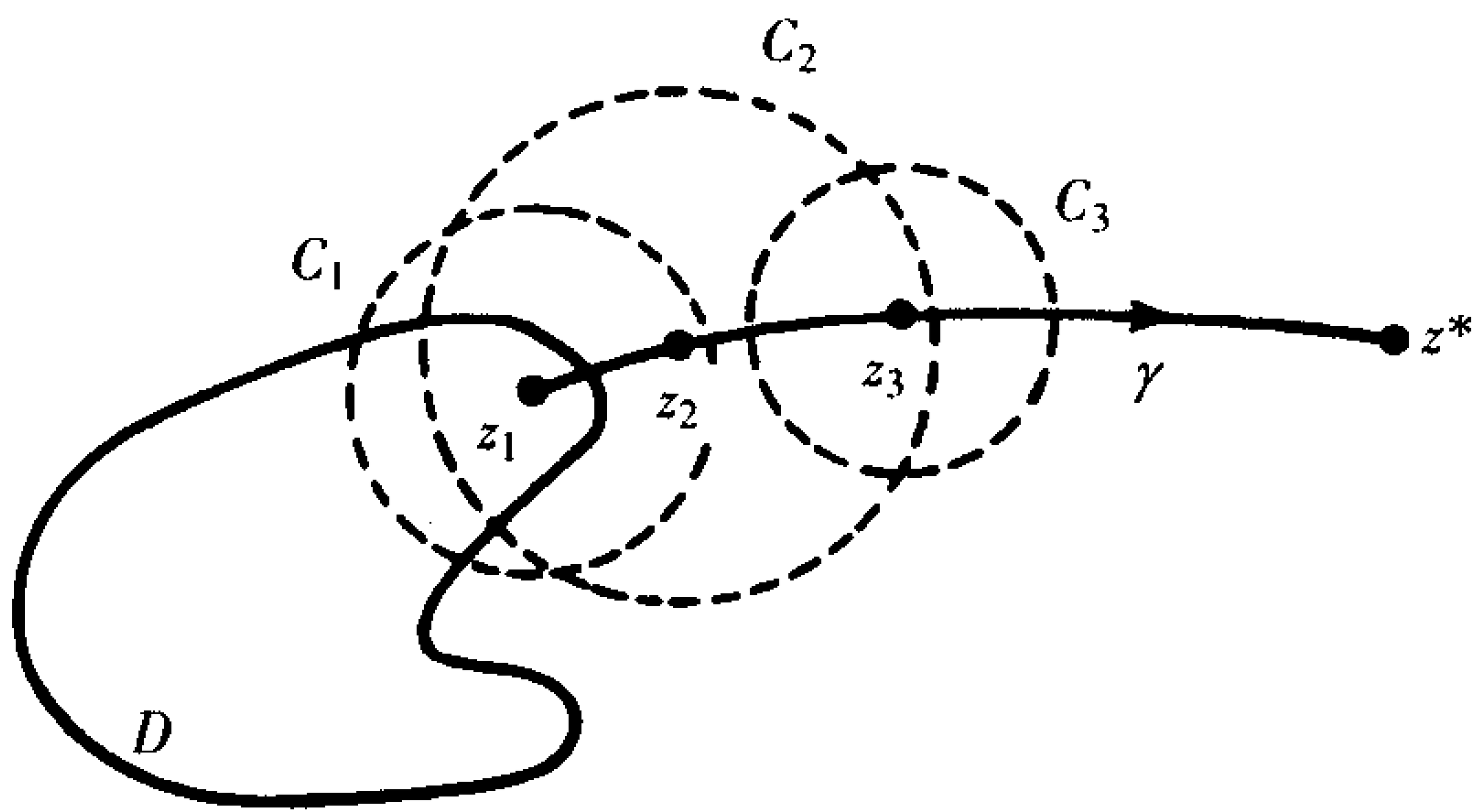


图 5-9 沿曲线的解析延拓

级数在圆 C_2 的内部收敛于解析函数 $f_2(z)$. 在 C_2 内，再沿曲线 γ 前进到达点 z_3，再把 $f_2(z)$ 在点 z_3 处展成泰勒级数. 依此一直进行下去. 如果这个过程的最后得到一个收敛圆 C_n，它包含曲线 γ 上的 z_n 和 z^* 之间的部分，这时我们称点列 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n, z^*\}$ 和相应的函数 $\{f, f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 构成了 $f(z)$ 沿曲线 γ 到 z^* 的一个解析延拓. 因此，这个解析延拓在 z^* 处的值就是 $f_n(z^*)$.

（注意可能存在 f_1 不是 f 的直接解析延拓的情况；习题 6 给出了这种可能性.）

现在我们看一下，如果对前面提到过的级数 $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}(z-1)^j/j$ 沿图 5-10 中的曲线 γ 确立一个解析延拓，将会发生什么事情. 把 $f(z)$ 在 z_1 处展开（同上），计算函数 $f_1(z)$，我们知道它在 C_1 内部等于 $\text{Log}z$. 接下来把它在 z_2 处展开，得到圆 C_2 内的函数 $f_2(z)$，见图 5-11.

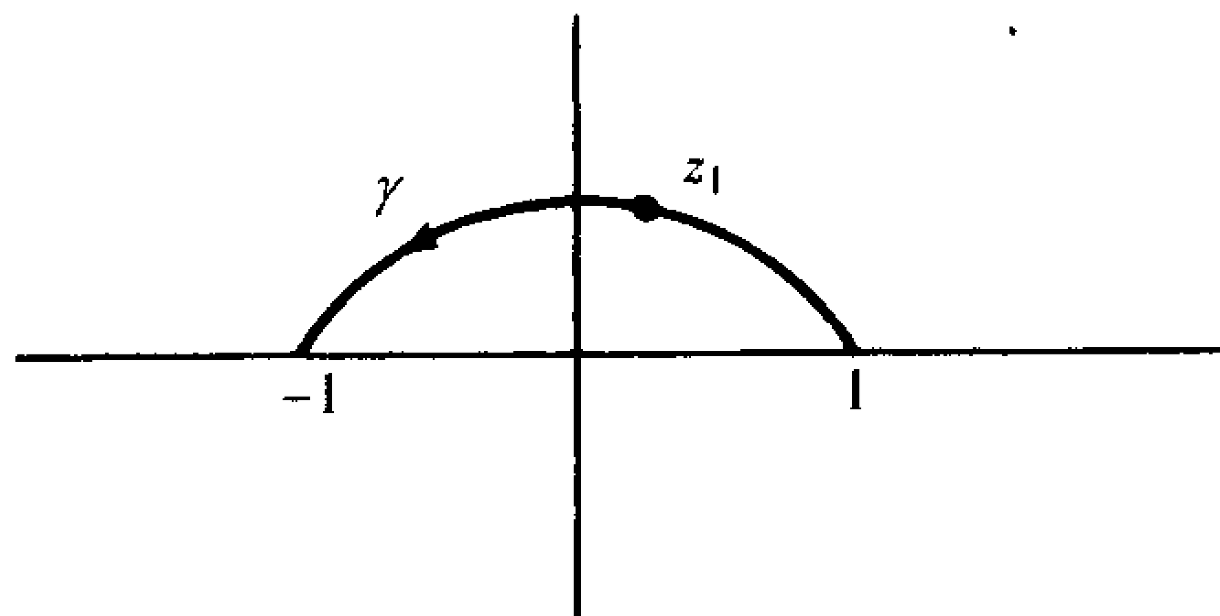


图 5-10 延拓曲线

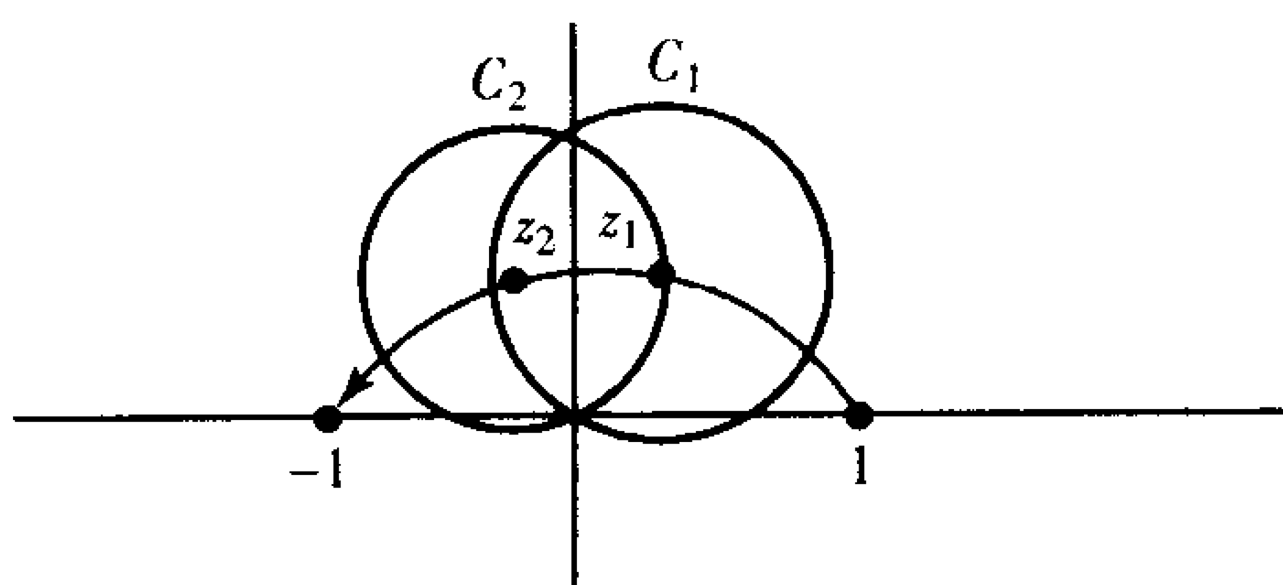


图 5-11 延拓步骤

但是现在解析函数 $f_2(z)$ 的解析区域延拓到了负实轴之外，所以不能确定在整个 C_2 内部 f_2 都和 $\text{Log}z$ 相等. 然而，$f_2(z)$ 是定义在 C_2 内的解析函数，它的值和导数都同 $\text{Log}z$ 在 z_2 处的值和导数相同；所以 $f_2(z)$ 必然等于 $\log z$ 的某一适当选取的、其分支割线和 C_2 不相交的分支. 例如，对于 $0 < \arg z \leqslant 2\pi$，由 $\text{Log}|z| + i\arg z$ 给出的分支在点 z_2 处和 $\text{Log}z$ 相等；所以在 C_2 内它和 $f_2(z)$ 相等.

最后，把 $f_2(z)$ 在点 z_3 处展开，得到在 C_3 内的解析函数 $f_3(z)$（见图 5-12）. 我们再次看到，$f_3(z)$ 是 $\text{Log}z$ 在 C_3 内的分支 $\text{Log}|z| + i\arg z, 0 < \arg z \leqslant 2\pi$ 的；特别地，$f_3(-1) = \pi i$. 简言之，我们已经沿曲线 γ 对幂级数 $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}(z-1)^j/j$ 进行了解析延拓，并且此延拓在 -1 点的值等于 πi.

297~298

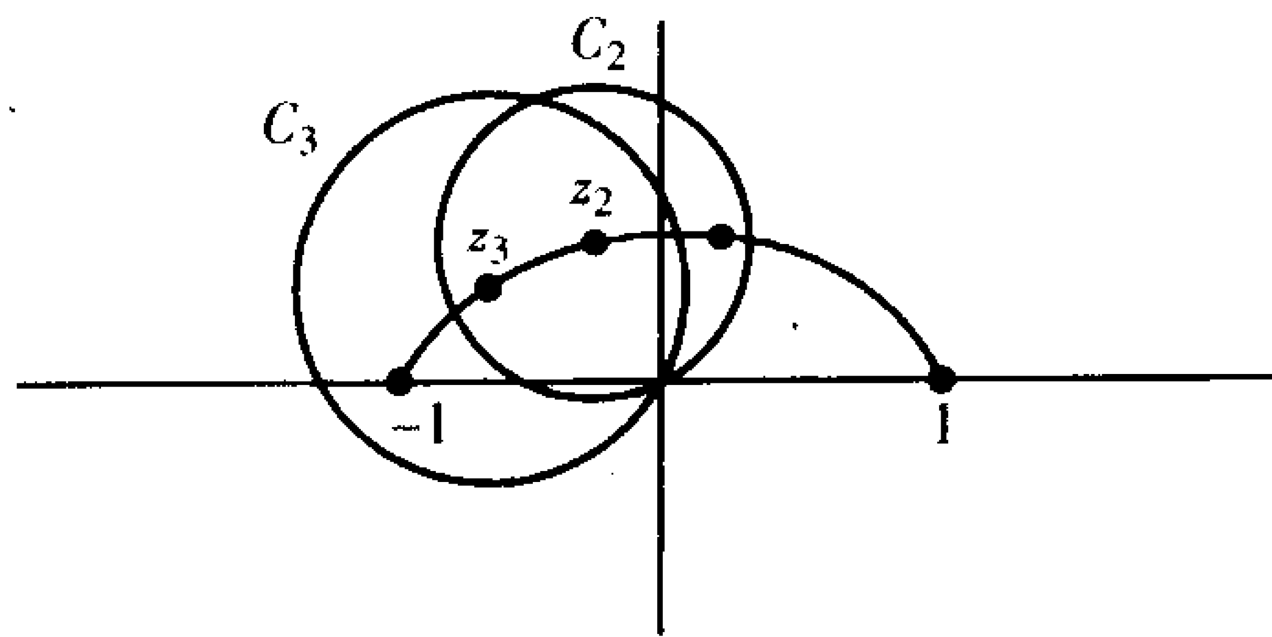


图 5-12 延拓的更多步骤

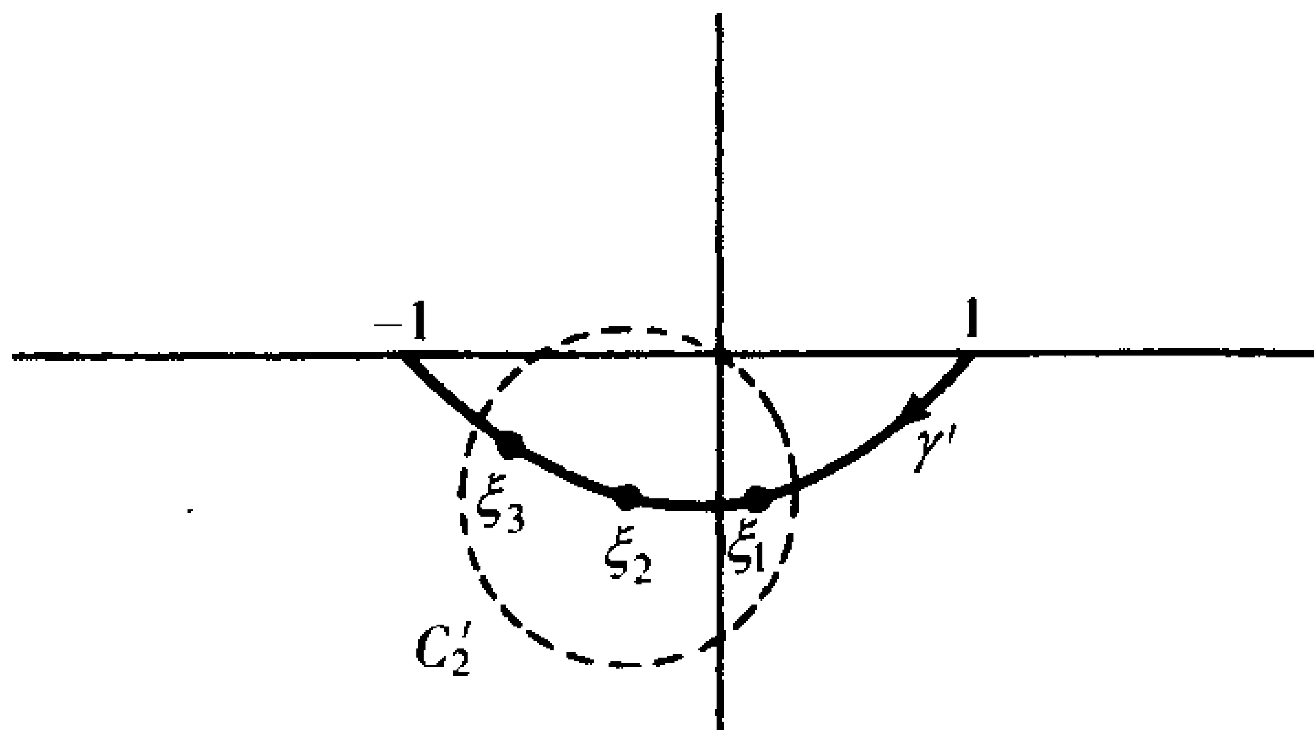


图 5-13 延拓的另一路径

研究将同一函数 f 沿图 5-13 中的曲线 γ' 延拓的结果是有意义的. 此时，这一延拓可以由点 $\{+1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, -1\}$ 和函数 $\{f, g_1, g_2, g_3\}$ 组成. 于是，在点 ξ_2 的幂级数的和应是函数 $g_2(z)$，$g_2(z)$ 的导数同 $\text{Log}z$ 的导数在 ξ_2 的值应相等，但它的解析区域（C'_2 的内部）可能包含部分负实轴. 所以，$g_2(z)$ 实际上和 $g_3(z)$ 应等于分支

$$\mathcal{L}_{-2\pi}(z) = \mathrm{Log}|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad -2\pi < \arg z \leqslant 0.$$

特别地，$g_3(-1) = -\pi \mathrm{i}$.

从上面的分析我们看到，$f(z)$沿曲线 γ 的解析延拓在 $z=-1$ 取值为 $\pi\mathrm{i}$，然而它沿曲线 γ' 的解析延拓在 $z=-1$ 取值为 $-\pi\mathrm{i}$. 由此可得出一个一般的结论，沿曲线的解析延拓得到的值可能与曲线自身有关，而不是仅仅依赖于它的终点.

到现在，机灵的读者可能已经猜测到这一反常现象的原因是 $\log z$ 的所有分支在原点的奇异性. 事实上的确如此，下面的结论(称为单值性定理)可以看作是沿曲线解析延拓方法的一个说明.

> **定理 23(单值性定理)** 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，γ 和 γ' 是连接 D 上点 z_1 到某一点 z^* 的两条有向光滑曲线. 进一步假定存在某个区域 D'，具有如下性质：
>
> (i) 闭路 $\Gamma = \{\gamma, -\gamma'\}$ 含于 D' 内，可以连续形变[⊖]到 D' 中的一点.
>
> (ii) $f(z)$ 可以沿 D' 内的任意光滑曲线解析延拓.
>
> 则 f 沿 γ 的解析延拓与 f 沿 γ' 的解析延拓在 z^* 的值相等.

因而，例如，如果沿上半平面内的任意曲线将 $\mathrm{Log} z$ 从 $z=+1$ 延拓到 $z=-1$，我们会得到值 $\pi\mathrm{i}$，而沿下半平面内的任意曲线延拓所得的值为 $-\pi\mathrm{i}$.

单值性定理的证明要用到一些读者可能不太熟悉的拓扑结构的知识，所以略去(参见参考文献[5]). 然而，应该要注意的是，定理的结论之一是(我们已经默认了)这样一个事实：函数沿特定曲线的解析延拓不依赖于点 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n, z^*\}$ 的选取——严格的证明建议读者参见参考文献.

299

例 2 考虑对 $\mathrm{Re} z > 0$ 定义的 $z^{1/2}$ 的主值分支函数 $f(z)$，即这一分支在 $z=1$ 处取值为 $+1$. 求 f 沿起点为 $z=1$，终点也为 $z=1$ 的正向简单闭曲线 γ 的解析延拓所得到的值.

解 必须考虑三种可能性：原点在 γ 上，原点在 γ 外，原点在 γ 内.

情形 1：原点在 γ 上. 这时不可能沿 γ 解析延拓；因为奇点在 $z^{1/2}$ 的泰勒级数的每个收敛圆的外部，不存在可以通过"障碍"$z=0$ 的点列和幂级数. 见图 5-14.

情形 2：原点在 γ 的外部. 取 γ' 为仅含单点 $z=1$ 的曲线，D' 为整个平面除去原点所确定的区域，于是满足单值性定理的条件. 所以沿 γ'(因而是 γ)的延拓结果当然是 $+1$. 见图 5-15.

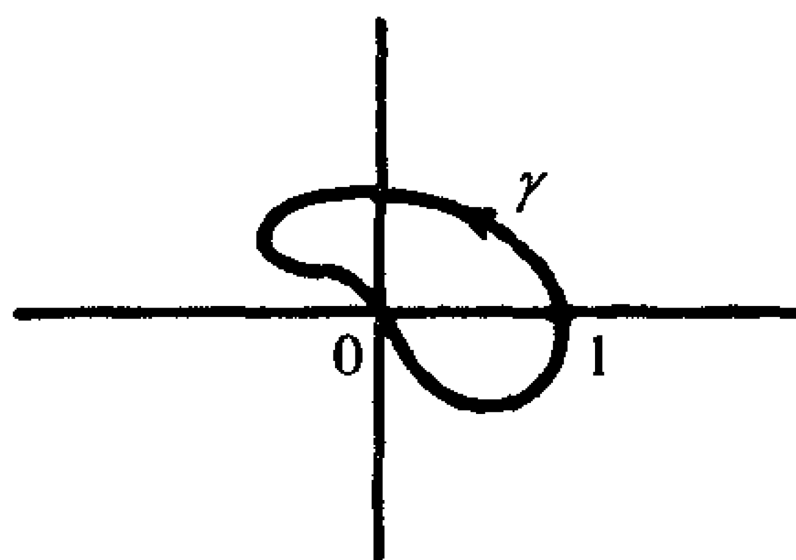


图 5-14 原点在 γ 上

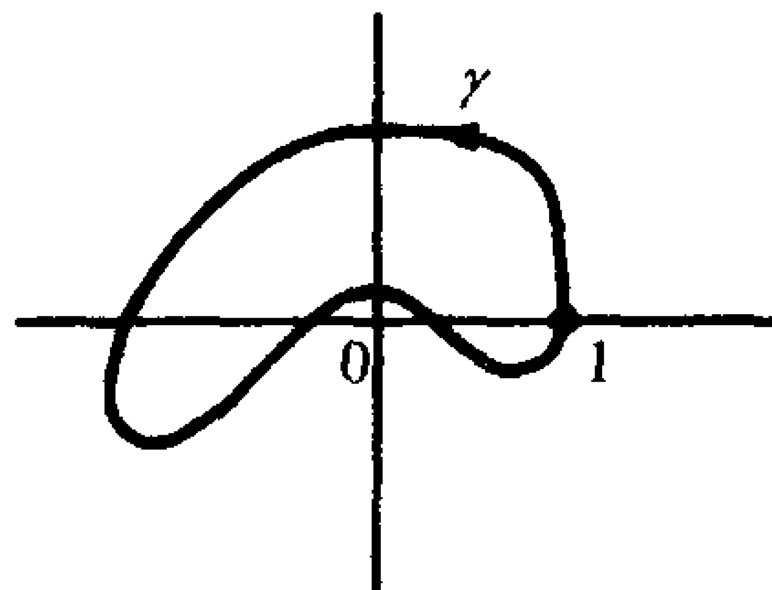


图 5-15 原点在 γ 外

⊖ 同 4.4.1 节比较.

情形3：原点在γ的内部．我们可以应用单值性定理，仍取D'为除去原点的平面，而取γ'为正向单位圆周$|z|=1$(见图5-16)．为了得到沿γ'的延拓，对$z^{1/2}$应用棣莫弗公式．那么如果将γ'表示成参数形式$z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，显然$z^{1/2}$的延拓在$z=e^{i\theta}$处的值是$e^{i\theta/2}$；于是在终点$z=1$处的值为$e^{i2\pi/2}=-1$．从而我们知道，沿闭曲线的解析延拓可以得到与原来不同的函数值．■

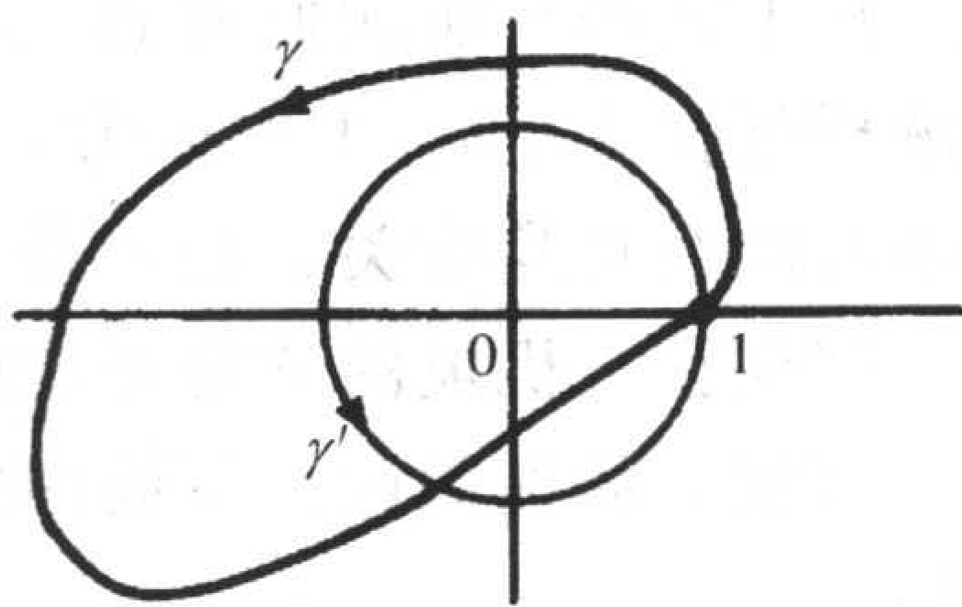


图5-16　原点在γ内

最后我们指出，存在区域D上解析、但不能延拓到D外任一点的函数．这时D的边界称为自然边界．习题10证明了这种情况．习题13和习题15讨论的施瓦茨反射原理给出了在一些情形下实现解析延拓的简单法则．

300

练习5.8

1. 已知$f(z)$在$z=0$解析，并且$f(1/n)=1/n^2, n=1,2,\cdots$，求$f(z)$．

2. 证明：如果$f(z)$解析，并且在实轴的某一段上，对$z=x$，$f(z)$和多项式$\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$相等，则在整个平面上$f(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$．

3. 是否存在不恒为零的函数$f(z)$，它在开圆盘$D:|z|<1$内解析，并且在D内无穷多个点上取值为零？

4. 证明：如果f在一个$z=0$的去心邻域内解析，并且对所有的$n=\pm1,\pm2,\cdots$，$f(1/n)=0$，则f或者恒等于零或者以$z=0$为本性奇点．

5. 设$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j$，$|z|<1$．当$\alpha(|\alpha|<1)$取何值时，由$f(z)$在$z=\alpha$处的泰勒展开式可以得到$f(z)$扩展到$|z|<1$外部的圆盘上的直接解析延拓？

6. 证明：当函数f沿曲线解析延拓时(如图5-9所示)，在曲线γ的起始点z_1处，由f的幂级数展开式生成的第一个函数$f_1(z)$不一定是f的直接解析延拓．[提示：选取$f(z)=\text{Log}z$，D和z_1如图5-17所示．]

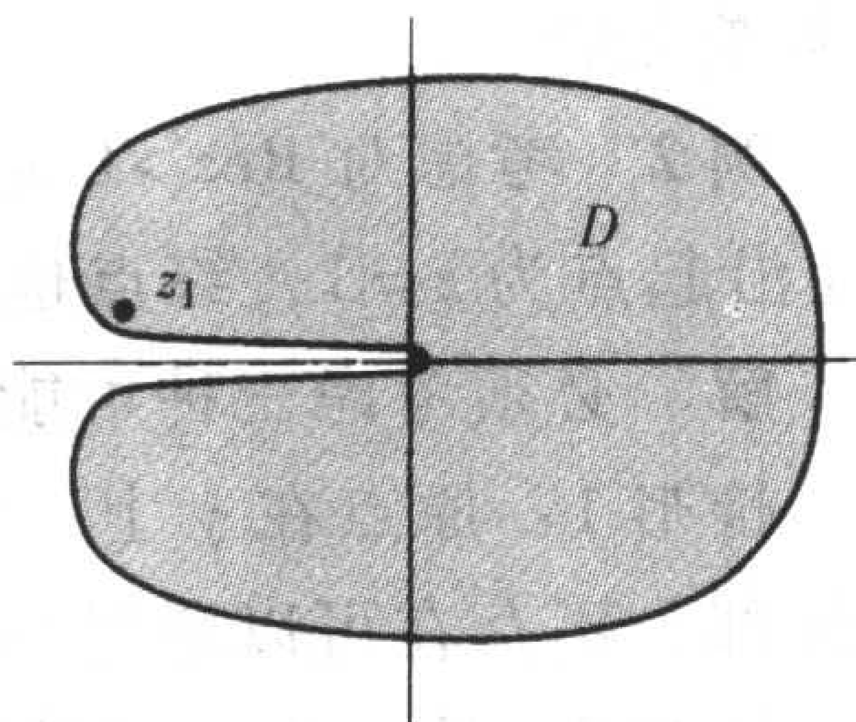


图5-17　习题6的例子

301

7. 通过级数求和，证明$-\sum_{j=0}^{\infty}(2-z)^j$是$\sum_{j=0}^{\infty}z^j$沿某一曲线的解析延拓．

8. 当$\text{Re}z>0$时，伽马函数$\Gamma(z)$定义为积分

$$\Gamma(z):=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt.$$

(a) 证明：当$\text{Re}z>0$时，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$．

(b) 在多数高级的数学教材中已经证明$\Gamma(z)$在右半平面上解析．假设这一命题成立，证明：可以应用(a)中的函数方程将$\Gamma(z)$解析延拓到除去非正整数$z=-n(n=0,1,2,\cdots)$外的整个平面．

(c) 证明：对于正整数n，有$\Gamma(n)=(n-1)!$．

9. 对下列各函数，选取在圆$|z-2|<1$内的一个解析分支．然后沿图5-18中所给出的曲线γ解析延拓这一解析分支．所得到的新函数值和原来的函数值相同吗？

(a) $3z^{2/3}$　　(b) $\sin 5z$　　(c) $(e^z)^{1/3}$

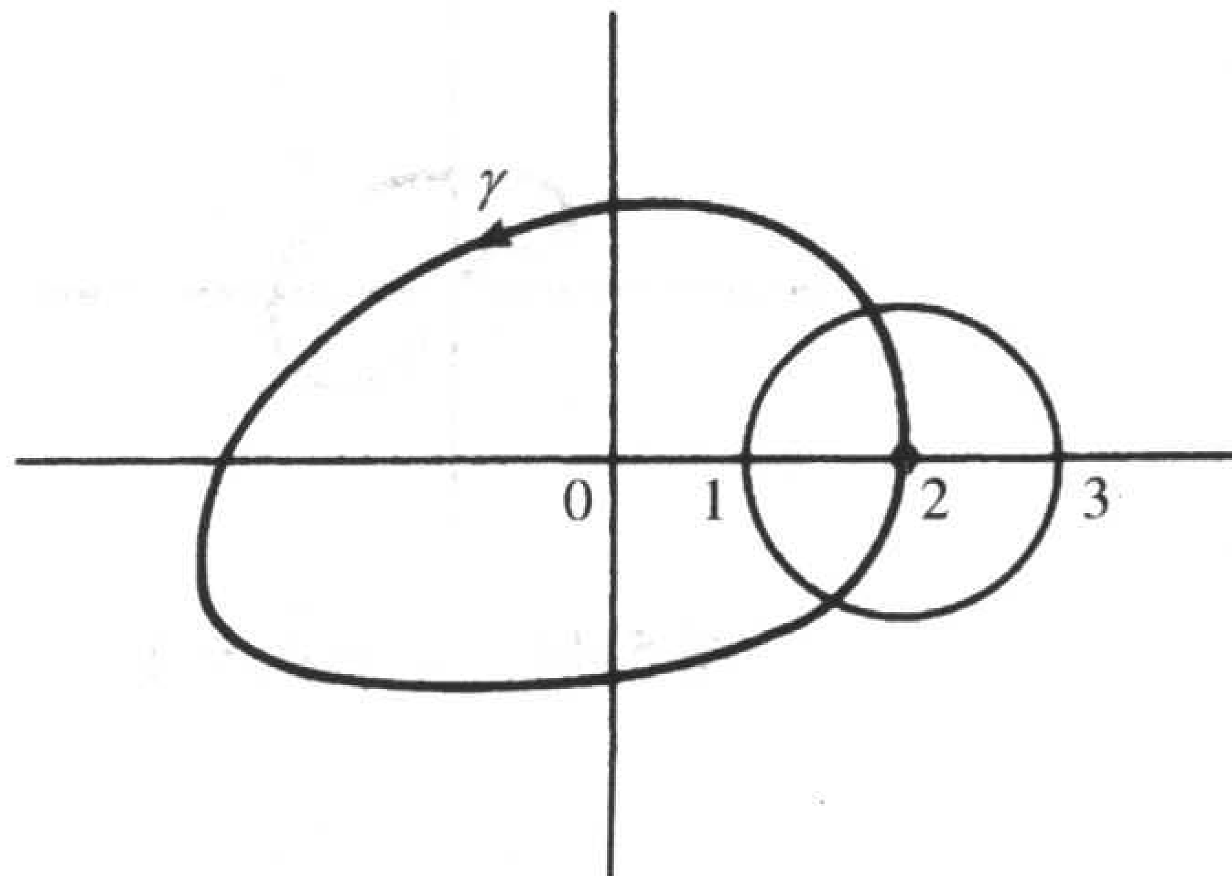


图5-18　习题8的延拓路径

(d) $\sin(z^{1/2})$　　(e) $(z^{1/2})^2$　　(f) $(z^2)^{1/2}$

10. 证明：单位圆 $|z|=1$ 是函数 $f(z)=\sum_{j=1}^{\infty} z^{j!}(|z|<1)$ 的自然边界.[提示：证明对任意有理数 p，当 $r\to 1^-$ 时，$|f(re^{ip\pi})|\to\infty$.]

11. 证明：$|z|=1$ 是函数 $g(z)=\sum_{j=1}^{\infty} z^{j!}/j!$ 的自然边界，尽管 $|z|=1$ 时这个级数收敛.[提示：将函数 $g(z)$ 同习题 10 中的函数 $f(z)$ 联系起来.]

12. 证明：$|z|=1$ 是级数 $\sum_{j=0}^{\infty} z^{2^j}$ 的自然边界.

13. 施瓦茨反射原理给出了在某些条件下沿直线段解析延拓的公式. 它的最简形式如下：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在单连通域 D 内解析，D 位于上半平面内，且以实轴上一条线段 γ 为其边界的一部分(见图 5-19). 进一步假定当 (x,y) 趋于 γ 时，$v(x,y)\to 0$，$u(x,y)$ 在 γ 上也取连续极限值，记为 $U(x)$[所以 $U(x)$ 在 γ 上连续]. 则函数 f 可以越过 γ 解析延拓到 D 的关于实轴的反射区域 D'. 特别地，定义函数 302

$$F(z)=\begin{cases} u(x,y)+iv(x,y) & z=x+iy\in D,\\ U(x) & z=x \text{ 在 } \gamma \text{ 上},\\ u(x,-y)-iv(x,-y) & z=x+iy\in D',\end{cases}$$

则 $F(z)$ 在区域 $D\cup\gamma\cup D'$ 内解析. 按下列步骤证明这一原理.

(a) $F(z)$ 在 D' 内满足柯西–黎曼方程.

(b) $F(z)$ 在 $D\cup\gamma\cup D'$ 内连续.

(c) 如果将积分周线 Γ 按图 5-20 所示分解，可以对 $F(z)$ 应用莫雷拉定理.

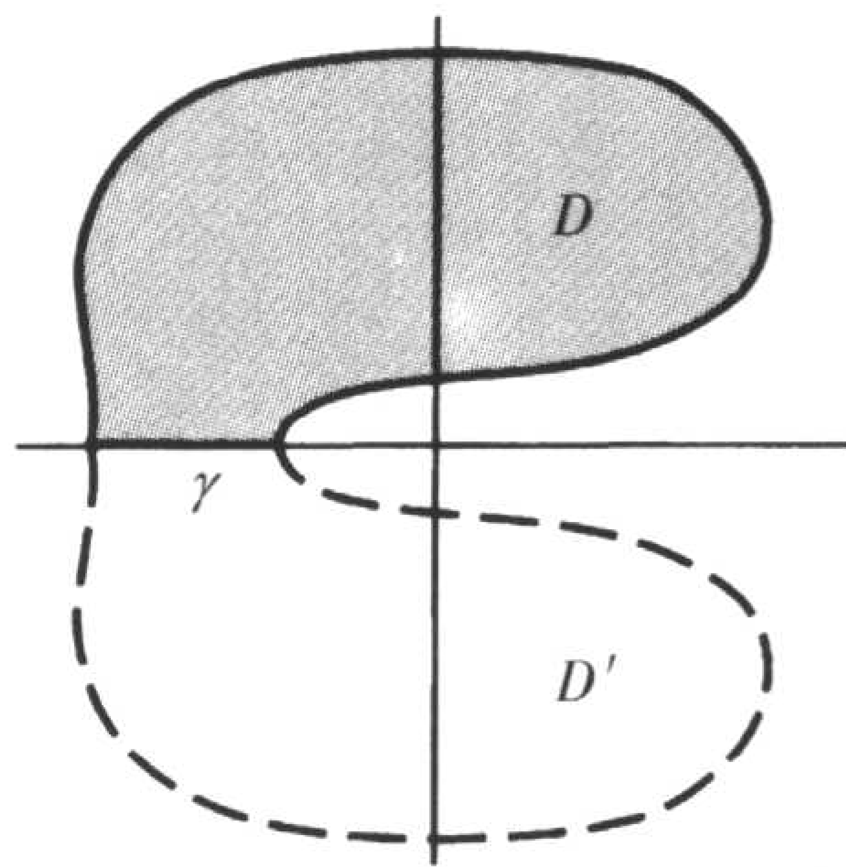


图 5-19　习题 13 中的区域

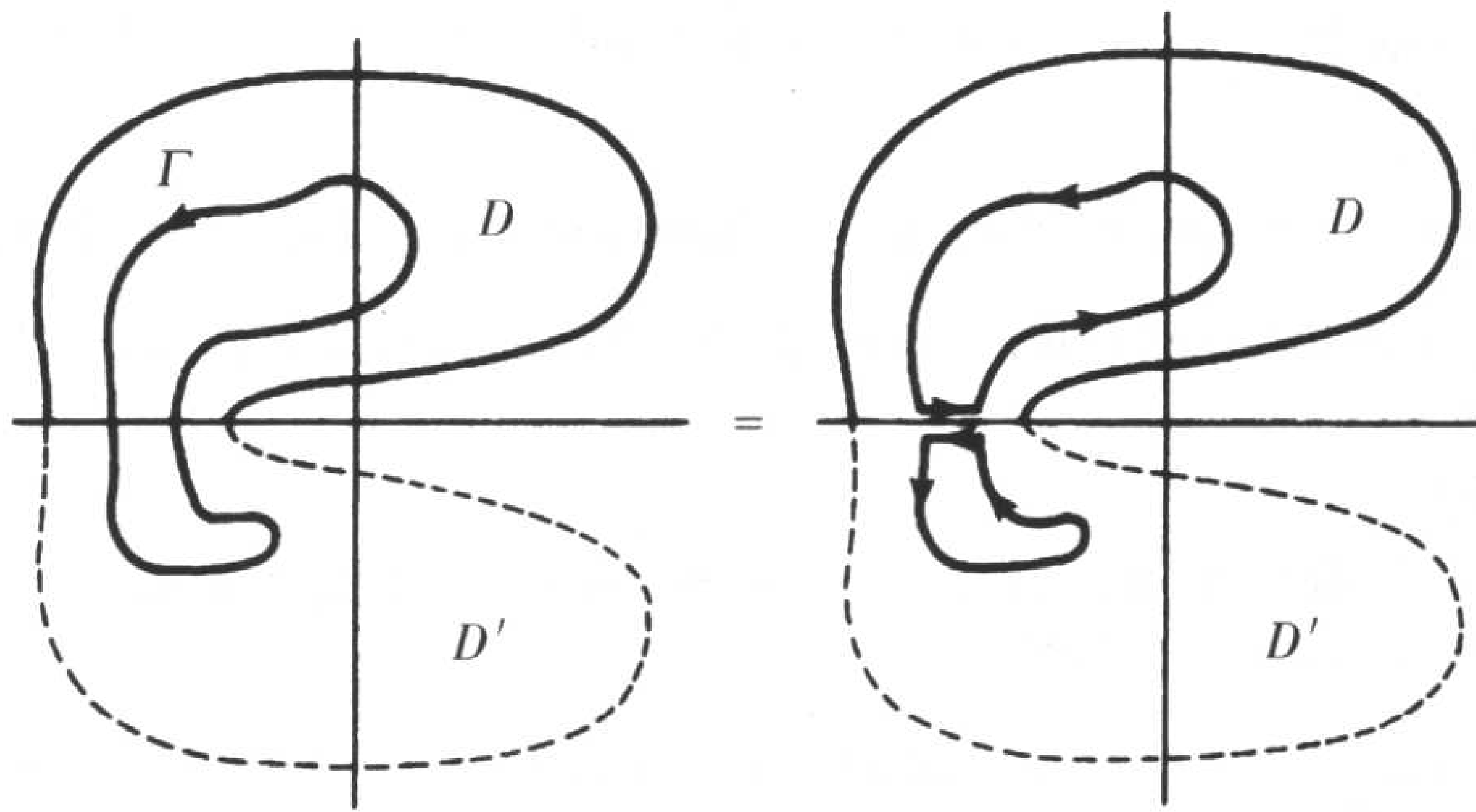


图 5-20　$F(z)$ 沿 Γ 的积分是零

14. 叙述并证明施瓦茨反射原理在下面情况的推广：区域 D 的边界包含任意线段，$f(z)$ 在此线段上的极限值全部位于某一直线上(例如，如果这些极限值都是实数就是这种情况).

15. 在施瓦茨反射原理的基础上，叙述并证明调和函数 $\phi(x,y)$ 的两个反射原理. 一个包括在实轴上 $\phi(x,y)\to 0$ 的情况，另一个将应用于在实轴上 $\partial\phi/\partial y\to 0$ 的情况.

16. 证明 4.6 节中定理 23 的如下推广：如果 f 在区域 D 内解析，并且 $|f(z)|$ 在 D 内的点 z_0 处取得局部最大值，则 f 在 D 内为常数. 303

小结

这一章的主要内容(粗略地说)是在解析函数和收敛幂级数之间建立等价关系. 等价性是指：任意函数 f 在它的任一解析点 z_0 处都可以表示成一个幂级数，并且这个级数在除去 f 的奇异点外的任意(以 z_0 为心)闭圆盘

内一致收敛. 这个级数称为泰勒级数并且具有形式

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j.$$

另一方面,在圆盘 $|z-z_0|<R$ 内收敛的任何幂级数 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ 的和是一个解析函数,事实上,这个幂级数就是这个函数的泰勒级数.

像一致收敛的解析函数列一样,幂级数也可以逐项相加、逐项积分和逐项微分. 并且,幂级数可以像多项式一样相乘.

如果函数 f 在某些点不解析,而在围绕或者去掉这些点的圆环内解析,则它可以被展成一个洛朗级数

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j,$$

它在任意闭子圆环上一致收敛. 不解析性体现在展开式中出现的负指数项上. 实际上,如果点 z_0 是函数 f 的孤立奇点,可以用洛朗级数将 z_0 分为三类:可去奇点(f 在 z_0 附近有界)、极点(在 z_0 处,$|f|\to\infty$)或者本性奇点(上面两种情况都不满足). 类似地,泰勒级数可以用来判别 f 的孤立零点的阶.

304

利用在形如 $|\omega|\leq\rho<1$ 的闭圆盘上一致收敛于 $(1-\omega)^{-1}$ 的几何级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\omega^j$ 进行泰勒和洛朗展开式的证明以及许多泰勒和洛朗级数的计算比较简便.

最后,我们看到,利用幂级数展开式可能会扩大解析函数 f 的定义域. 然而,解析开拓是一个精妙的过程,它可能会导致函数的多值.

参考文献

这一章中,对一些问题的更详细的处理可以在下列文献中找到:

级数理论

[1] Dienes, P. *The Taylor Series*. Dover Publications, Inc., New York, 1957.

[2] Knopp, K. *Infinite Sequences and Series*. Dover Publications, Inc., New York, 1956.

微分方程

[3] Birkhoff, G., and Rota, G. C. *Ordinary Differential Equations*, 4th ed. John Wiley & Sons, New York, 1989.

[4] Rainville, E. D. *Intermediate Differential Equations*, 2nd ed. Chelsea, New York, 1972.

解析延拓和反射原理

[5] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vol. II, 2nd ed. Chelsea, New York, 1973.

[6] Nehari, Z. *Conformal Mapping*. Dover, New York, 1975.

正函数和电路分析

[7] Van Valkenburg, M. E. *Introduction to Modern Network Synthesis*. John Wiley & Sons, New York, 1960.

[8] Levinson, N., and Redheffer, R. M. *Complex Variables*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.

贝塞尔和勒让德函数的应用

305

[9] Snider, A.D., *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River NJ, 1999.

第6章 留数理论

前面我们已经看到，周线积分理论是研究解析函数的性质的重要工具．这一章我们将探讨这一理论的另一应用，即用它来计算某些实积分．我们先从称为留数理论的周线积分计算技巧开始．

6.1 留数定理

首先考虑计算积分

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 Γ 是正向简单闭周线，除 Γ 内的一个孤立奇异点 z_0 外，$f(z)$ 在 Γ 内和 Γ 上解析．我们知道，函数 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心圆域内具有收敛的洛朗级数展开式

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j, \tag{1}$$

特别地，式(1)对图 6-1 所示的小的正向圆周 C 上的所有的点 z 成立．用4.4 节的方法，沿 Γ 的积分可以转换成沿 C 的积分，且积分值不变：

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

后一个积分可以通过对级数(1)沿曲线 C 逐项积分来计算．当 $j\neq -1$ 时，积分值为零，当 $j=-1$ 时，积分值为 $2\pi i a_{-1}$. 所以

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}. \tag{2}$$

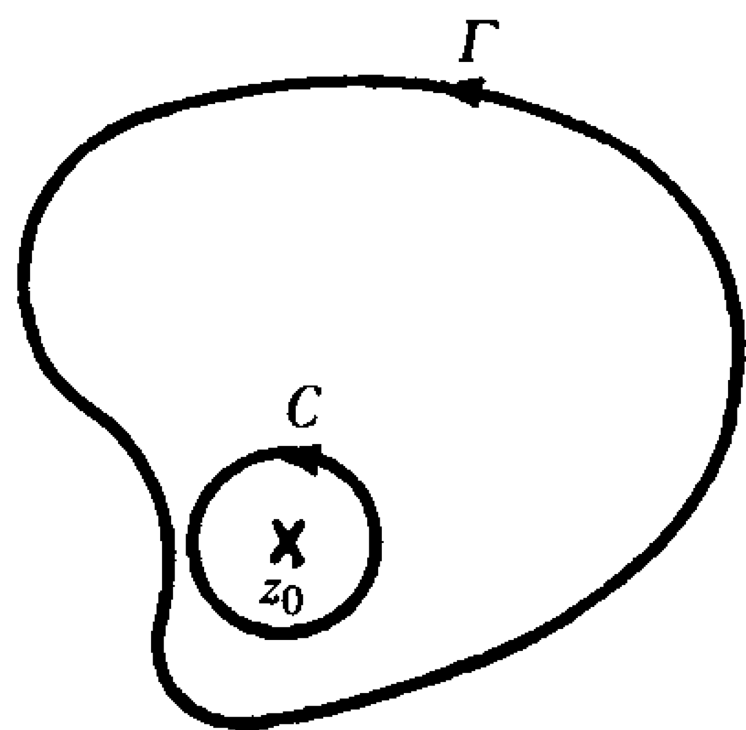


图 6-1 周线积分

307

[将它同第 5 章定理 14 中给出的计算 a_{-1}的公式相比较．]

于是，常数 a_{-1}在周线积分中就有了重要作用．为此，我们给出如下定义．

> **定义 1** 设 z_0 是 f 的孤立奇点，则 f 在 z_0 处的洛朗展开式中的 $1/(z-z_0)$ 项的系数 a_{-1} 称为 **f 在 z_0 处的留数**(residue)，记为
>
> $$\mathrm{Res}(f;z_0)\ 或\ \mathrm{Res}(z_0).$$

例 1 求函数 $f(z)=ze^{3/z}$在 $z=0$ 处的留数，并计算

$$\oint_{|z|=4} ze^{3/z}\,\mathrm{d}z.$$

解 因为对所有的 ω，e^{ω} 的泰勒展开式为

$$e^{\omega} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^j}{j!},$$

因此，$ze^{3/z}$在 $z=0$ 处的洛朗展开式为

$$ze^{3/z} = z\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{3}{z}\right)^j = z + 3 + \frac{3^2}{2!z} + \frac{3^3}{3!z^2} + \cdots.$$

所以

$$\text{Res}(0) = \frac{3^2}{2!} = \frac{9}{2},$$

又因为 $z=0$ 是 $ze^{3/z}$ 在 $|z|=4$ 内的唯一奇点，由公式(2)，得

308

$$\oint_{|z|=4} ze^{3/z}dz = 2\pi i\cdot\frac{9}{2} = 9\pi i. \qquad \blacksquare$$

如果 z_0 为 f 的可去奇点，在其洛朗展开式中 $(z-z_0)$ 的所有负幂项的系数均为零，因此，f 在点 z_0 处的留数为零．如果 z_0 是 f 的极点，我们可以用公式计算它在 z_0 处的留数．首先假设 z_0 是单极点，即一阶极点．则对 z_0 附近的 z，有

$$f(z) = \frac{a-1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

所以

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + (z-z_0)[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots].$$

当 $z\to z_0$ 时取极限，得到

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = a_{-1} + 0.$$

所以在单极点处

$$\text{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{3}$$

例如，$z=0$ 和 $z=-1$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+1)}$ 的单极点，所以

$$\text{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{e^z}{z+1} = 1$$

和

$$\text{Res}(f;-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z} = -e^{-1}.$$

在下面的例子中可得到公式(3)的另一个结论．

例 2 设 $f(z)=P(z)/Q(z)$，其中函数 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在点 z_0 处解析，并且 Q 以 z_0 为单零点，且 $P(z_0)\neq 0$. 证明

$$\text{Res}(f;z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

证 显然 z_0 是 f 的单极点(参见 5.6 节)，所以可应用公式(3)．由 $Q(z_0)=0$，可直接得到

309

$$\text{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \qquad \blacksquare$$

例 3 计算 $f(z)=\cot z$ 在每个奇点处的留数．

解 因为 $\cot z=\cos z/\sin z$，它的奇点是 $z=n\pi$，$n=0$，± 1，± 2，…，且均为单极点．令

$P(z)=\cos z$，$Q(z)=\sin z$，由例 2，在这些奇点处的留数为

$$\operatorname{Res}(\cot z;n\pi)=\left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=n\pi}=\frac{\cos n\pi}{\cos n\pi}=1.$$ ■

要得到一般的 m 阶极点处的留数的公式，我们需要用从洛朗展开式中求出系数 a_{-1} 的一些方法．下面推导 3.1 节中得到的有理函数的公式（见公式(21)），在此过程中读者不会遇到困难．

定理 1 如果 z_0 是 f 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].\tag{4}$$

证 f 在 z_0 处的洛朗展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

两边同乘以 $(z-z_0)^m$，

$$\begin{aligned}(z-z_0)^m f(z)=&a_{-m}+\cdots+a_{-2}(z-z_0)^{m-2}+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}\\&+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots.\end{aligned}$$

两端微分 $m-1$ 次，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\\&=(m-1)!a_{-1}+m!a_0(z-z_0)+\frac{(m+1)!}{2}a_1(z-z_0)^2+\cdots.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!a_{-1}+0,$$

于是得到公式(4)． ■ [310]

例 4 计算函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$ 在各奇点处的留数．

解 函数以 $z=0$ 为 2 阶极点，以 $z=\pi$ 为 3 阶极点．应用公式(4)得

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(0)&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^2 f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\right]\\&=\lim_{z\to 0}\left[\frac{-(z-\pi)\sin z-3\cos z}{(z-\pi)^4}\right]=\frac{-3}{\pi^4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(\pi)&=\lim_{z\to\pi}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(z-\pi)^3 f(z)]=\lim_{z\to\pi}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^2}\left[\frac{\cos z}{z^2}\right]\\&=\lim_{z\to\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{(6-z^2)\cos z+4z\sin z}{z^4}\right]=\frac{-(6-\pi^2)}{2\pi^4}.\end{aligned}$$ ■

当 $f(z)$ 在 Γ 内只有一个奇点时,我们已经知道如何计算积分 $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$. 现在考虑更一般的情况:$\Gamma$ 是正向简单闭周线,除 Γ 内有有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外, $f(z)$ 在 Γ 内和 Γ 上处处解析(参见图 6-2). 注意到用 4.4 节的方法,可以将沿 Γ 的积分用沿图 6-3 中的圆周 C_j 的积分来表示:

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

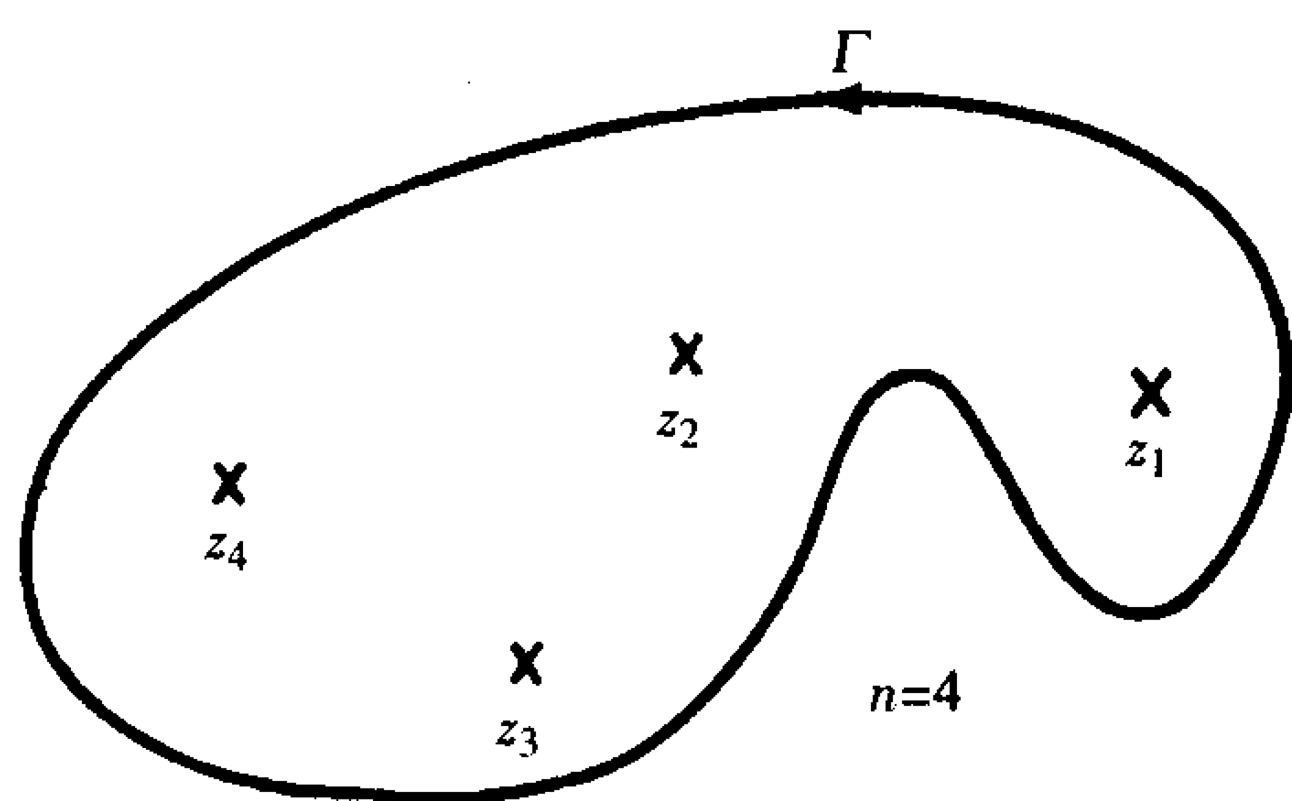


图 6-2　周线内的孤立奇点

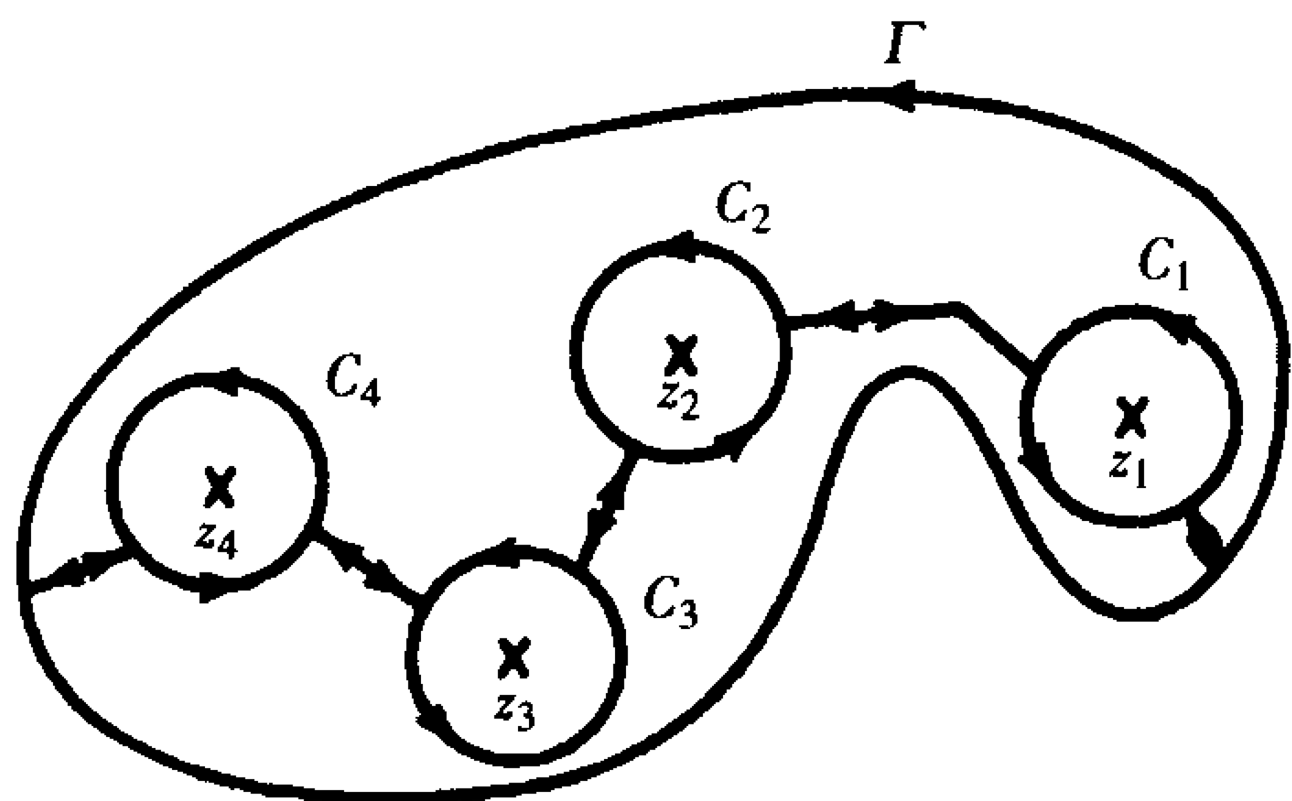


图 6-3　积分相等的周线

然而,因为 z_j 是 f 在 C_j 内的唯一奇点,所以

311

$$\int_{C_j} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(z_j).$$

从而我们得到如下的重要结果.

定理 2(柯西留数定理)　如果 Γ 为正向简单闭周线,除 Γ 内的点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外, f 在 Γ 内和 Γ 上处处解析,则

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(z_j). \tag{5}$$

例 5　计算

$$\oint_{|z|=2}\frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)}\mathrm{d}z.$$

解　被积函数 $f(z)=(1-2z)/[z(z-1)(z-3)]$ 以 $z=0$, $z=1$, $z=3$ 为单极点. 然而,这些点中只有前两个位于 Γ: $|z|=2$ 的内部. 从而由留数定理,

$$\oint_{|z|=2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(1)],$$

又因为

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1-2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{Res}(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1-2z}{z(z-3)} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5\pi i}{3}.$$ ■ 312

例 6 计算

$$\oint_{|z|=5}\left[ze^{3/z}+\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}\right]dz.$$

解 给定的积分显然可以表示为和式

$$\oint_{|z|=5} ze^{3/z}dz+\oint_{|z|=5}\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}dz,$$

由留数定理，上式等于

$$2\pi i\left[\operatorname{Res}(ze^{3/z};0)+\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3};0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3};\pi\right)\right].$$

在例 1 和例 4 中已经计算过这些留数；所以答案为

$$2\pi i\left[\frac{9}{2}-\frac{3}{\pi^4}-\frac{(6-\pi)^2}{2\pi^4}\right].$$ ■

练习 6.1

1. 确定下列各函数的所有孤立奇点，并求出在各个奇点处的留数．

(a) $\frac{e^{3z}}{z-2}$ (b) $\frac{z+1}{z^2-3z+2}$ (c) $\frac{\cos z}{z^2}$ (d) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$

(e) $\frac{e^z}{z(z+1)^3}$ (f) $\sin\left(\frac{1}{3z}\right)$ (g) $\tan z$ (h) $\frac{z-1}{\sin z}$

(i) $z^2/(1-\sqrt{z})$，其中$\sqrt{z}$为主值分支

2. 解释为什么柯西积分公式可以看作是留数定理的一种特殊形式．

3. 用柯西留数定理计算下列积分．

(a) $\oint_{|z|=5}\frac{\sin z}{z^2-4}dz$ (b) $\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z-2)^3}dz$

(c) $\oint_{|z|=2\pi}\tan z\,dz$ (d) $\oint_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{z^2(z-2)(z+5i)}dz$

(e) $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2\sin z}dz$ (f) $\oint_{|z|=3}\frac{3z+2}{z^4+1}dz$

(g) $\oint_{|z|=8}\frac{1}{z^2+z+1}dz$ 313

4. 假设 z_0 为 f 的孤立奇点（f 在 z_0 的去心邻域内解析）．证明导数 f' 在 z_0 处的留数为零．

5. 存在以 z_0 为单极点并且满足 $\operatorname{Res}(f;z_0)=0$ 的函数 f 吗？那么以 z_0 为 2 阶极点并且满足 $\operatorname{Res}(f;z_0)=0$ 的函数呢？

6. 假设 f 解析并且以 z_0 为 m 阶极点．证明函数 $g(z)=f'(z)/f(z)$ 以 z_0 为单极点并且满足 $\operatorname{Res}(g;z_0)=m$.

7. 计算

$$\oint_{|z|=1} e^{1/z}\sin(1/z)\,dz.$$

6.2 [0, 2π]上三角函数的积分

本节的目的是应用留数定理计算形如

$$\int_0^{2\pi} U(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

的实积分，其中 $U(\cos\theta, \sin\theta)$是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$(具有实系数)的有理函数，并且在[0, 2π]上取有限值．这类积分的一个例子是

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta.$$

下面我们证明，(1)式可以转化为某一复值函数 F 沿正向单位圆周 C: $|z| = 1$ 的周线积分 $\int_C F(z)\,dz$ 的参数化形式．为了建立这一恒等式,可把 C 写成参数形式

$$z = e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

对这样的 z，有

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta},$$

又因为

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

可得恒等式[⊖]

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \tag{2}$$

并且，当沿 C 积分时，

314

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta,$$

所以

$$d\theta = \frac{dz}{iz}. \tag{3}$$

在(1)式中作变量代换(2)和(3)，得

$$\int_0^{2\pi} U(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \int_C F(z)\, dz, \tag{4}$$

其中新的被积函数 F 为

$$F(z) := U\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \cdot \frac{1}{iz};$$

因此在[0, 2π]上的积分可用沿 C 的积分来代替．

由 U 的形式知，函数 F 必为 z 的有理函数．所以它只有可去奇点(在计算积分时可以被忽略)或极点．因而，由留数定理，我们的三角积分等于 F 在 C 内各极点处的留数的和乘以 $2\pi i$.

⊖ 当然，可以用 $\bar{z}$ 代替 $1/z$，但是这样做会失去函数的解析性．

下面举例说明计算过程.

例 1 计算

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta.$$

解 首先注意到分母 $5+4\cos\theta$ 不等于零，所以被积函数在 $[0, 2\pi]$ 上取有限值. 把(2)式和(3)式关于 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 和 $d\theta$ 的表示式代入被积函数，得到

$$I=\int_C\frac{\left[\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}{5+4\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\frac{dz}{iz},$$

整理后得

$$I=-\frac{1}{4i}\int_C\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)}dz.$$

显然被积函数

$$g(z):=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)}=\frac{(z^2-1)^2}{2z^2\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}$$

以 $z=-\frac{1}{2}$ 和 $z=-2$ 为单极点，以原点为 2 阶极点. 然而，只有 $-\frac{1}{2}$ 和 0 在单位圆周 C 内，所以

315

$$I=-\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(g;-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Res}(g;0)\right].$$

应用上一节的公式，有

$$\operatorname{Res}\left(g;-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to-1/2}\left(z+\frac{1}{2}\right)g(z)=\lim_{z\to-1/2}\frac{(z^2-1)^2}{2z^2(z+2)}=\frac{3}{4}$$

和

$$\operatorname{Res}(g;0)=\lim_{z\to0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}[z^2g(z)]=\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{2z^2+5z+2}\right]$$

$$=\left.\frac{(2z^2+5z+2)\cdot2(z^2-1)2z-(z^2-1)^2(4z+5)}{(2z^2+5z+2)^2}\right|_{z=0}$$

$$=\frac{-5}{4}.$$

所以

$$I=\frac{-1}{4i}2\pi i\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right]=\frac{\pi}{4}.$$ ■

注意例 1 中的积分是实的、非负的，所以 I 必然是一个正实数，同我们的答案 $\pi/4$ 相一致.

例 2 计算

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}.$$

解 这里被积函数的积分在$[0, \pi]$上而不在$[0, 2\pi]$上．然而，因为 $\cos\theta = \cos(2\pi-\theta)$，可知

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta},$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = 2I.$$

代换 $\cos\theta$ 和 $d\theta$，得

$$2I = \int_C \frac{1}{2-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{z^2-4z+1}. \tag{5}$$

由平方公式，分母的零点为

316

$$z_1 := 2-\sqrt{3} \quad 和 \quad z_2 := 2+\sqrt{3},$$

所以被积函数

$$g(z) := \frac{1}{z^2-4z+1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

以这些点为单极点．但是只有 z_1 在 C 内，并且在这一点的留数为

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g;z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)g(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{(z-z_2)} \\ &= \frac{1}{z_1-z_2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

从而由(5)式得

$$2I = -\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

或

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

■

练习 6.2

应用留数的方法，验证下列各式．

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{8d\theta}{5+2\cos\theta} = \frac{8\pi}{\sqrt{21}}$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(3+2\cos\theta)^2} = \frac{3\pi\sqrt{5}}{25}$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2}$

5. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}},\quad a^2<1$

6. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}),\quad a>|b|>0$

7. $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\sin^2\theta)^2}=\frac{\pi(2a+1)}{2\sqrt{(a^2+a)^3}},\quad a>0$

8. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{ab},\quad a,b>0$

317

9. $\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2n}d\theta=\frac{\pi\cdot(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2},\quad n=1,2,\cdots$

10. $\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta=\frac{2\pi}{n!},\quad n=1,2,\cdots$

11. $\int_0^{\pi}\tan(\theta+ia)d\theta=\pi i\cdot\operatorname{sign}a$，$a$ 为非零实数

6.3 $(-\infty,+\infty)$上某些函数的反常积分

如果 $f(x)$ 是非负实轴 $0\leqslant x<\infty$ 上的连续函数，如果极限 $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$ 存在[⊖]，则 f 在 $[0,+\infty)$ 上的反常积分定义为

$$\int_0^{\infty}f(x)dx:=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx,\tag{1}$$

例如，

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2x}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-2x}}{2}\Big|_0^b$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-e^{-2b}}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

类似地，当 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上连续时，令

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx:=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 f(x)dx.\tag{2}$$

如果函数 f 在整个实轴上连续，极限(1)和(2)都存在，则称 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分存在，并记为

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx:=\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^{\infty}f(x)dx.$$

这时 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分的值可以通过取单极限来计算，即

318

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}f(x)dx.$$

⊖ 更一般地，如果极限存在，$\int_a^{\infty}f(x)dx:=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

然而，读者要注意，对某些函数f，即使$(-\infty, +\infty)$上的反常积分不存在，上式中的极限也可能存在．例如，考虑$f(x)=x$，因为极限

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{2}$$

不存在(作为一个有限数)，所以它在$(-\infty, +\infty)$上的反常积分不存在．然而，

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} x\mathrm{d}x = \lim_{\rho\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\rho}^{\rho} = \lim_{\rho\to\infty} 0 = 0.$$

为此引入如下术语：对于任何在$(-\infty, +\infty)$上给定的连续函数f，极限(如果存在的话)

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} f(x)\,\mathrm{d}x$$

称为f在$(-\infty, +\infty)$上的积分的**柯西主值**，并记为

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如，

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x = 0.$$

我们再次强调，只要反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$存在，它必然等于其主值(p. v.).

现在我们举例证明如何用留数定理计算某类函数f的 p. v. 积分．

例 1 计算

$$I = \text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}\left(=\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}\right).$$

解 首先，我们把由

$$I_\rho := \int_{-\rho}^{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$$

定义的积分I_ρ转化成解析函数的周线积分；事实上

$$I_\rho = \int_{\gamma_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4},$$

319 其中γ_ρ是实轴上从$-\rho$到$+\rho$的直线段．现在利用留数定理求I的关键在于(对每个充分大的ρ值)构造一条简单闭周线Γ_ρ，使得γ_ρ是它的一部分，即$\Gamma_\rho=(\gamma_\rho, \gamma'_\rho)$，并且$1/(z^4+4)$沿另一部分$\gamma'_\rho$的积分是已知的．这样就有

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4} = I_\rho + \int_{\gamma'_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4},$$

如果Γ_ρ是正向的，由留数定理，

$$2\pi\mathrm{i}\cdot\sum\left(\text{在 }\Gamma_\rho\text{ 内}\frac{1}{z^4+4}\text{的留数}\right) = I_\rho + \int_{\gamma'_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4}.$$

因此，如果右边的极限存在，积分I就可以按如下方法计算：

$$I=\lim_{\rho\to\infty}I_\rho=\lim_{\rho\to\infty}2\pi\mathrm{i}\sum(\text{在 }\Gamma_\rho\text{ 内}\frac{1}{z^4+4}\text{的留数})-\lim_{\rho\to\infty}\int_{\gamma_\rho'}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4}. \tag{3}$$

实际上，由(3)式可知，要应用留数定理只需知道沿 γ_ρ' 的积分的极限值.

在众多可以"封闭周线 γ_ρ"(即起点为 $z=\rho$，终点为 $z=-\rho$)的曲线中，如何选取合适的曲线 γ_ρ' 呢? 注意到当 $|z|$ 很大时，被积函数 $1/(z^4+4)$ 的模很小. 这表明如果我们选取曲线 γ_ρ' 离原点足够远，在 γ_ρ' 上的积分可以忽略不计，即当 $\rho\to\infty$ 时趋于零. 所以显然应该选择 γ_ρ' 为上半圆 C_ρ^+，其参数形式为

$$C_\rho^+: z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\quad(0\leqslant t\leqslant\pi) \tag{4}$$

(参见图 6-4). 现在看看它是否合适，注意到在 C_ρ^+ 上 $|z|=\rho$，所以由三角不等式

$$\left|\frac{1}{z^4+4}\right|\leqslant\frac{1}{|z|^4-4}=\frac{1}{\rho^4-4}\quad(\text{对 }\rho^4>4),$$

有

$$\left|\int_{C_\rho^+}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4}\right|\leqslant\frac{1}{\rho^4-4}\cdot\pi\rho,$$

当 $\rho\to\infty$ 时，它当然趋于零.

现在我们只需计算(3)式中的留数. 首先找出 $1/(z^4+4)$ 的奇点，它们就是 z^4+4 的零点，即

$$z_1=1+\mathrm{i},\quad z_2=-1+\mathrm{i},\quad z_3=-1-\mathrm{i},\quad z_4=1-\mathrm{i},$$

并且这些点是函数

$$\frac{1}{z^4+4}=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

的单极点. 因为 z_3 和 z_4 在下半平面内，它们总是在图 6-4 所示的半圆周线 Γ_ρ 之外，而对每个 $\rho>\sqrt{2}$，z_1 和 z_2 都在 Γ_ρ 之内. 所以，对这样的 ρ，

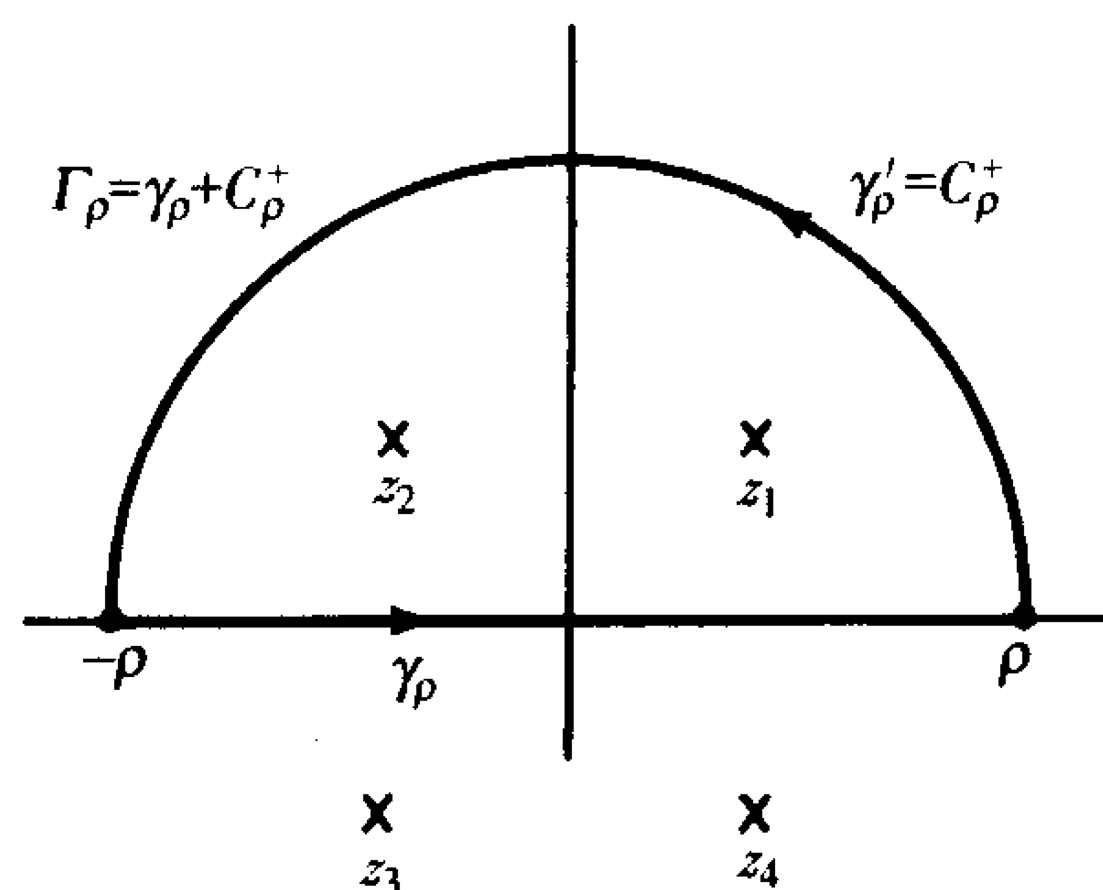


图 6-4　封闭周线

320

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4}&=2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}(z_1)+\mathrm{Res}(z_2)]\\&=2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^4+4}+\lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^4+4}\right)\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}+\frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2(2+2\mathrm{i})2\mathrm{i}}+\frac{1}{(-2)(2\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{-1-\mathrm{i}}{16}+\frac{1-\mathrm{i}}{16}\right]=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

将所得结果都代入到(3)式(这里 $\gamma_\rho'=C_\rho^+$)中，我们有

$$I=\lim_{\rho\to\infty}\frac{\pi}{4}-\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho^+}\frac{\mathrm{d}z}{z^4+4}=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

■

利用扩展的半圆周线 Γ_ρ 的方法可以很容易地应用到一般的被积函数类 f 上．实际上，在例 1 的计算过程中，只依赖于如下两个条件：

(i) f 在实轴上解析，在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内除去有限个孤立奇点外解析(这保证了对充分大的 ρ，上半平面内的所有奇点都在图 6-4 所示的周线 Γ_ρ 内).

321

(ii) $\lim\limits_{\rho \to \infty} \int_{C_\rho^+} f(z)\,dz = 0.$

只要满足这些条件，积分

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

的值便为 f 在上半平面各孤立奇点处的留数的和乘以 $2\pi i$. (当然，类似的条件在下半平面成立时，也可在下半平面考虑；见习题 8.)

下面的引理给出一类具有性质(ii)的有理函数．

引理 1 如果 $f(z)=P(z)/Q(z)$ 是满足

$$\operatorname{degree} Q \geqslant 2+\operatorname{degree} P \tag{5}$$

的两个多项式的商，则

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{C_\rho^+} f(z)\,dz = 0, \tag{6}$$

其中 C_ρ^+ 是(4)式中定义的半径为 ρ 的上半圆周．

证 先估计 $f(z)$ 的模．记

$$|f(z)| = \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = \frac{|a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m|}{|b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n|}$$

$$= \frac{|a_0/z^m+a_1/z^{m-1}+a_2/z^{m-2}+\cdots+a_m|}{|b_0/z^n+b_1/z^{n-1}+b_2/z^{n-2}+\cdots+b_n|} \cdot \frac{|z^m|}{|z^n|}.$$

当 $|z|\to\infty$ 时，上式第一项趋近于 $|a_m|/|b_n|$，所以对充分大的 $|z|$，它当然小于 $|a_m|/|b_n|+1$. 因此当 $n\geqslant 2+m$ 并且 $\rho\to\infty$ 时，

$$\left|\int_{C_\rho^+} f(z)\,dz\right| \leqslant \left(\frac{|a_m|}{|b_n|}+1\right)\rho^{m-n}\cdot \pi\rho = \left(\frac{|a_m|}{|b_n|}+1\right)\pi\rho^{1+m-n} \to 0. \quad \blacksquare$$

我们需要强调的是，如果用沿下半圆周 C_ρ^-: $z=\rho e^{-it}\,(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的积分代替沿 C_ρ^+ 的积分，同样可证明(6)式成立．

例 2 计算

322

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

解 因为被积函数在实轴上没有奇点，分子的次数是 2，分母的次数是 4，由引理 1，可以用扩展半圆周线的方法．记

$$f(z):=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}=\frac{z^2}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2},$$

可知$f(z)$的极点为$z=\pm\mathrm{i}$. 所以，对任意的$\rho>1$，沿图6-5中的闭周线Γ_ρ的积分为

$$\int_{\Gamma_\rho}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f;+\mathrm{i}).$$

因为$+\mathrm{i}$是2阶极点，由留数计算公式(定理1)知

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;+\mathrm{i})&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-\mathrm{i})^2f(z)]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2}\right]\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\left[\frac{(z+\mathrm{i})2z-2z^2}{(z+\mathrm{i})^3}\right]=\frac{1}{4\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

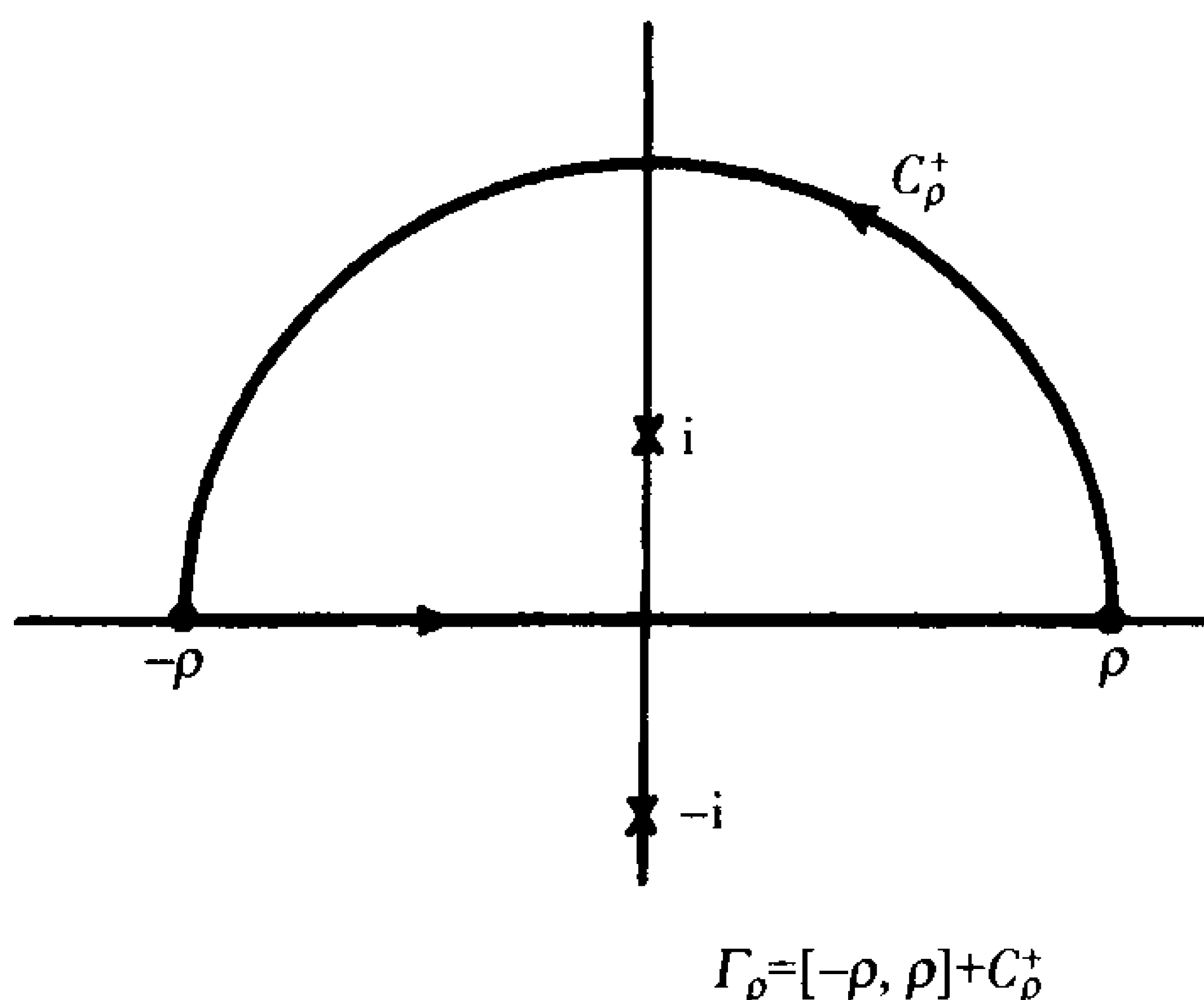


图6-5　例2中的闭周线

所以对所有$\rho>1$,

$$\int_{\Gamma_\rho}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4\mathrm{i}}=\frac{\pi}{2}.\qquad(7)$$

另一方面，

$$\int_{\Gamma_\rho}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-\rho}^{\rho}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_\rho^+}f(z)\,\mathrm{d}z,$$

对上式$\rho\to\infty$时取极限，应用(7)式和引理1，得到

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}f(x)\,\mathrm{d}x+0.$$

323

因此

$$\frac{\pi}{2}=\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

■

我们下一节将会看到，半圆周线在计算某类含有三角函数的积分时也很有用．下面介绍另外一个在许多应用中出现的非典型积分的例子，它的闭周线不是半圆周．

例3　对于$0<a<1$，计算

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$$

解　注意到函数$\mathrm{e}^{ax}/(1+\mathrm{e}^x)$在上下半平面都有无穷多奇点；它们是

$$z=(2n+1)\pi\mathrm{i}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因此，如果我们使用扩展半圆周的方法，则来自留数的贡献将形成一个无穷级数，这不是我们所希望的．此外，也没有很好的办法对半圆周自身的贡献进行估计!

仔细考虑被积函数，可以发现一个比较好的"闭路". 如果把z平移$2\pi\mathrm{i}$，函数$\mathrm{e}^{az}/(1+\mathrm{e}^z)$的分母不变，而分子改变了因子$\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}$. 所以，如果我们考虑图6-6中的矩形周线，则沿$\gamma_3$的积分容易估计；它就是沿$\gamma_1$的积分的$-\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}$倍(因为路径是从右向左，所以取负值). 因而，

$$\int_{\gamma_3}\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z.$$

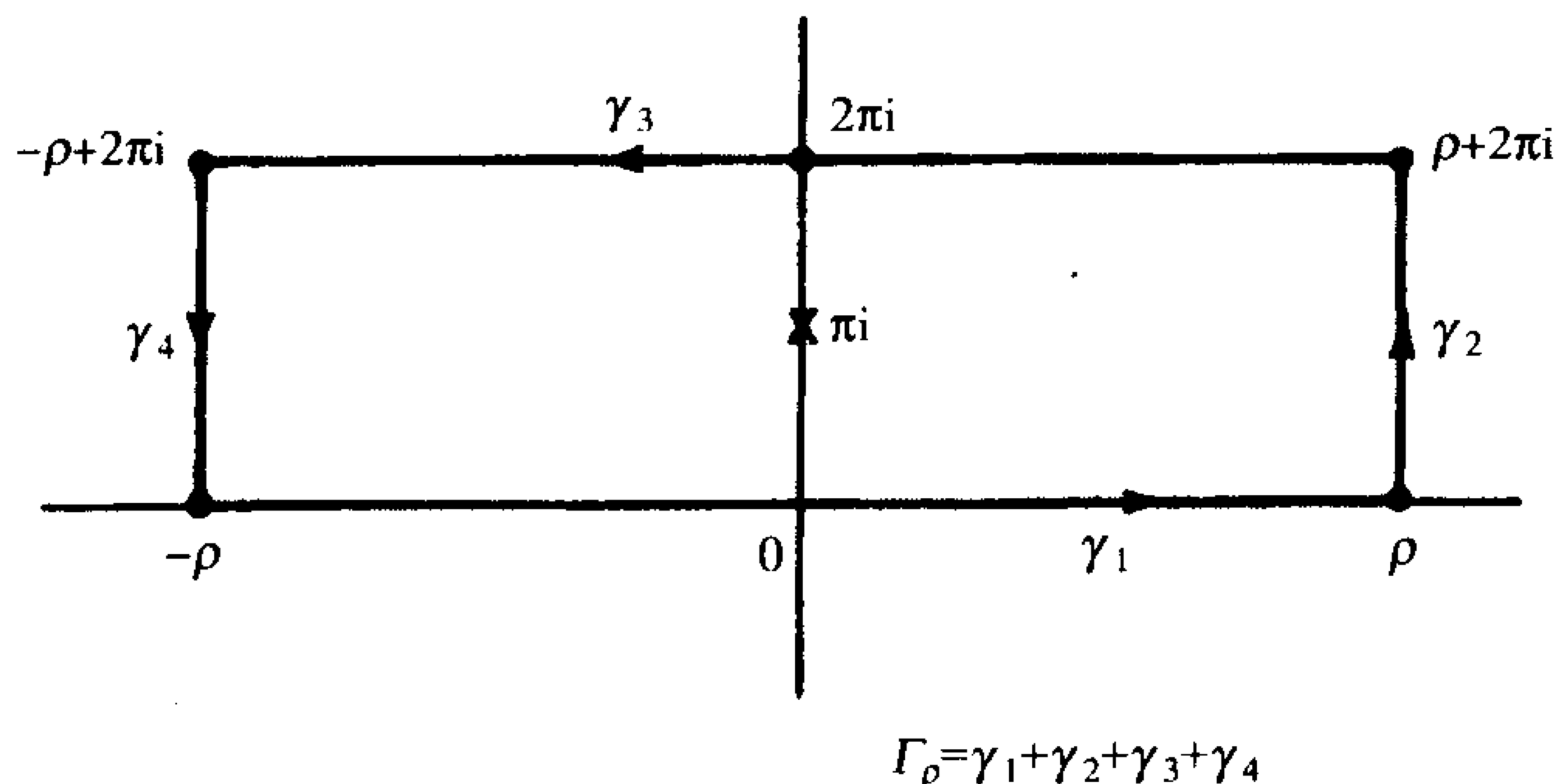


图 6-6 例 3 中的闭周线

对 γ_2：$z=\rho+\mathrm{i}t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，我们有

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{a(\rho+\mathrm{i}t)}}{1+\mathrm{e}^{\rho+\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{a\rho}}{\mathrm{e}^{\rho}-1}\cdot 2\pi,$$

因为 $a<1$，当 $\rho\to\infty$ 时上式趋于零.

类似地，在 γ_4：$z=-\rho+\mathrm{i}(2\pi-t)\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 上，有

324

$$\left|\int_{\gamma_4}\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{a[-\rho+\mathrm{i}(2\pi-t)]}}{1+\mathrm{e}^{-\rho+\mathrm{i}(2\pi-t)}}(-\mathrm{i})\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-a\rho}}{1-\mathrm{e}^{-\rho}}\cdot 2\pi,$$

因为 $a>0$，当 $\rho\to\infty$ 时上式仍趋于零.

于是，当 $\rho\to\infty$ 时取极限，得

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z=(1-\mathrm{e}^{a2\pi\mathrm{i}})\,\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x. \tag{8}$$

现在我们用留数定理计算(8)式中的周线积分. 对每个 $\rho>0$，函数 $\mathrm{e}^{az}/(1+\mathrm{e}^z)$ 在 Γ_ρ 内和 Γ_ρ 上除单极点 $z=\pi\mathrm{i}$ 外解析，在此点处的留数为

$$\mathrm{Res}(\pi\mathrm{i})=\left.\frac{\mathrm{e}^{az}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+\mathrm{e}^z)}\right|_{z=\pi\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}}=-\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}} \tag{9}$$

(回顾 6.1 节中的例 2). 所以，由(8)式和(9)式，得

$$\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{a2\pi\mathrm{i}}}\cdot(2\pi\mathrm{i})(-\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}})=\frac{-2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-a\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$ ■

练习 6.3

用留数验证习题 1 ~ 7 中的积分公式.

325

1. $\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\pi$

2. $\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$

3. $\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

4. $\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{\pi}{6}$

5. $\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{27}$

6. $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$

8. 如果$f(z) = P(z)/Q(z)$是满足$\deg Q \geqslant 2 + \deg P$的两个多项式的商，其中$Q$没有实零点，则$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$等于$-2\pi\mathrm{i}\cdot\sum$[$f(z)$在下半平面的极点处的留数].

9. 通过沿顶点为$z=\pm\rho$, $\rho+\mathrm{i}$, $-\rho+\mathrm{i}$的矩形周线对$\mathrm{e}^{2z}/\cosh(\pi z)$积分，证明

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\cosh(\pi x)}\mathrm{d}x = \sec 1.$$

10. 已知

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

沿顶点为$z=0$, ρ, $\rho+\lambda\mathrm{i}$和$\lambda\mathrm{i}$($\lambda>0$)的矩形周线对e^{-z^2}积分，令$\rho\to\infty$，推导下式

(a) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\lambda^2}$

(b) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2\lambda x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda^2}\int_0^{\lambda} \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$

((b)式右边是λ的函数，称为 Dawson 积分，由 Abramowitz 和 Stegun 在参考文献[5]中给出.)

11. 沿扇形周线S_ρ: $\{z=re^{\mathrm{i}\theta}: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3, 0\leqslant r\leqslant\rho\}$对函数$1/(z^3+1)$积分，令$\rho\to\infty$，证明

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

12. 验证练习 4.7 中习题 18 所讨论的积分的值.

326

13. 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

级数的和

14. 设$f(z)$是满足$\deg Q\geqslant 2+\deg P$的形如$P(z)/Q(z)$的有理函数. 如果$z=0$, ±1, ±2, $\cdots$不为$f(z)$的极点，分步证明求和公式

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N} f(k) = -\{\pi f(z)\cot(\pi z)\text{ 在 } f(z) \text{ 的各极点处的留数和}\}. \tag{10}$$

(a)证明：对函数$g(z):=\pi f(z)\cot(\pi z)$，有

$$\mathrm{Res}(g;k) = f(k), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots.$$

(b)设Γ_N是顶点依次为$\left(N+\frac{1}{2}\right)(1+\mathrm{i})$, $\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1+\mathrm{i})$, $\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-\mathrm{i})$, $\left(N+\frac{1}{2}\right)(1-\mathrm{i})$的正方形的边界，其中$N$是正整数. 证明存在与$N$无关的常数$M$，使得对$\Gamma_N$上所有的$z$有$|\pi\cot(\pi z)|\leqslant M$.

(c)证明

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N} \pi f(z)\cot(\pi z)\mathrm{d}z = 0,$$

其中Γ_N如前所定义.

(d)用留数定理、(a)和(c)推出(10).

15. 应用习题 14 中的求和公式验证：

(a) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \pi\coth(\pi)$[提示:取$f(z) = 1/(z^2+1)$.]

(b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} = \pi^2$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$[提示：修改习题 14 中的公式以适应 $f(z) = 1/z^2$ 在极点 $z = 0$ 的情况 .]

16. 对正整数 n，证明

327

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1}\pi^{2n} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}B_{2n},$$

其中常数 B_{2n} 是由幂级数展开式

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!}z^k$$

定义的伯努利数[同习题 15(c)相比较].[提示：为了确定 $f(z) = 1/z^{2n}$ 在点 $z = 0$ 处的留数，证明

$$\pi z\cot(\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi z)^{2k}.]$$

17. 如果 a 是非整数的实数，且 $0 < r < 1$，证明

(a) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = \pi^2\csc^2\pi a$

(b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a$

(c) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k^2 - a^2}{(k^2 + a^2)^2} = -\pi^2\operatorname{csch}^2\pi a$

(d) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-r)^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\sinh 2\pi a}{\sin^2\pi r + \sinh^2\pi a}$

(e) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(k-r)^2 - a^2}{[(k-r)^2 + a^2]^2} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1 - \cos 2\pi r\cosh 2\pi a}{(\sin^2\pi r + \sinh^2\pi a)^2}$

(f) 对于哪些复数值 a，上面的恒等式成立?

18. 为了计算形如 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k)$ 的交错级数的和，通过由 $\pi f(z)\csc(\pi z)$ 代替 $\pi f(z)\csc(\pi z)$ 来修改习题 14 中的方法．仍然假设 $f(z)$ 是满足 $\deg Q \geq 2 + \deg P$ 的形如 $P(z)/Q(z)$ 的有理函数，并且 f 的极点不是整数，推导公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k) = -\{\pi f(z)\csc(\pi z)\text{ 在 } f \text{ 的各极点处的留数的和}\}.$$

19. 用习题 18 中的公式验证

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

6.4 涉及三角函数的反常积分

这一节的目的是用留数理论计算一般形式为

328

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,dx, \quad \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,dx$$

的积分，其中 m 是实数，$P(x)/Q(x)$ 表示在 $(-\infty, \infty)$ 上连续的有理函数．在下面的例子中我们将证明，可以应用前一节的半圆周线的方法，但需做一些必要的调整．

例 1 计算

$$I = \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4}dx.$$

解 在用半圆作周线时，首先要考虑复函数

$$\frac{\cos 3z}{z^2+4}. \tag{1}$$

然而，因为(1)的模无论在上半平面还是在下半平面都不趋于零，所以把它选择为 $f(z)$ 是肯定不合适的．事实上，当 $z=\pm\rho\mathrm{i}$ 时，有

$$\left|\frac{\cos 3z}{z^2+4}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3z}}{2(z^2+4)}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-3\rho}+\mathrm{e}^{3\rho}}{2|-\rho^2+4|}, \tag{2}$$

当 $\rho\to\infty$ 时它趋于无穷．

但是，从(2)式可以找到如何避开这一困难的信息．由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}3z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{-3y}$ 在上半平面有界，而 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}\mathrm{e}^{3y}$ 在下半平面有界，所以记

$$I = I_1+I_2 = \text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}}{2(x^2+4)}\mathrm{d}x + \text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}}{2(x^2+4)}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

对于积分 I_1，可用上半平面上的半圆周作一条封闭周线，对于积分 I_2，可用下半平面上的半圆周作一条封闭周线．具体地说，对 I_1，我们考虑函数

$$f_1(z) := \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{2(z^2+4)}.$$

它的奇点为 $z=\pm 2\mathrm{i}$. 因为

$$|f_1(z)| = |f_1(x+\mathrm{i}y)| = \frac{|\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\cdot\mathrm{e}^{-3y}|}{2|z^2+4|} = \frac{\mathrm{e}^{-3y}}{2|z^2+4|},$$

所以在上半平面($y\geqslant 0$)上有

$$|f_1(z)| \leqslant \frac{1}{2|z^2+4|}.$$

所以对于任意的 $\rho>2$，在图 6-7 中上半圆周 C_ρ^+ 上的积分有界，即

$$\left|\int_{C_\rho^+} f_1(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\pi\rho}{2(\rho^2-4)},$$

329

因此 $\rho\to\infty$ 时它趋于零．此外，因为 $+2\mathrm{i}$ 是 $f_1(z)$ 在上半平面仅有的奇点，对 $\rho>2$ 有

$$\int_{-\rho}^{\rho} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_\rho^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f_1;2\mathrm{i}).$$

所以当 $\rho\to\infty$ 时取极限，得

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}}{2(x^2+4)}\mathrm{d}x + 0 = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f_1;2\mathrm{i}).$$

但

$$\operatorname{Res}(f_1;2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}(z-2\mathrm{i})f_1(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{2(z+2\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{-6}}{8\mathrm{i}},$$

所以

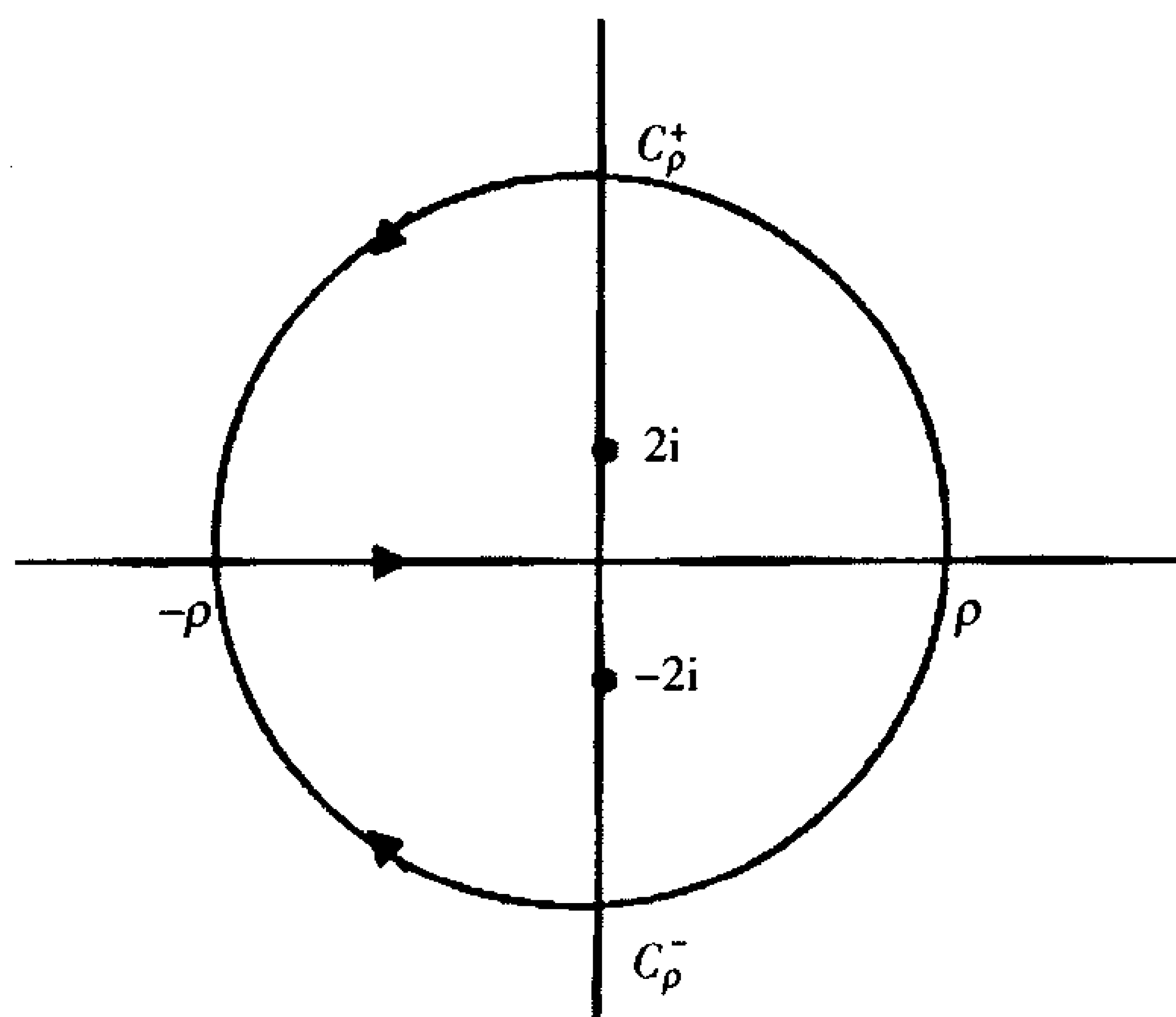


图 6-7 例 1 中的周线

$$I_1 = 2\pi i \cdot \frac{e^{-6}}{8i} = \frac{\pi}{4e^6}.$$

积分 I_2 的计算与 I_1 类似：使用函数

$$f_2(z) := \frac{e^{-3iz}}{2(z^2+4)},$$

它的奇点同 f_1 的奇点相同，并且它在图 6-7 中下半圆周 C_ρ^- 上的积分也满足

330

$$\left|\int_{C_\rho^-} f_2(z)\,dz\right| \leqslant \frac{\pi\rho}{2(\rho^2-4)}.$$

然而，组合

$$\int_{-\rho}^{\rho} f_2(x)\,dx + \int_{C_\rho^-} f_2(z)\,dz$$

等于负的 $2\pi i \operatorname{Res}(f_2;\ -2i)$，这是因为此时包含奇点 $-2i$ 的周线是顺时针方向！所以，当 $\rho\to\infty$ 时取极限，得

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-3ix}}{2(x^2+4)}dx + 0 = -2\pi i \lim_{z\to -2i}(z+2i)f_2(z)$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -2i}\frac{e^{-3iz}}{2(z-2i)} = \frac{\pi}{4e^6}.$$

因此 $I = I_1 + I_2 = \pi/(2e^6)$[⊖]. ■

例 1 中的方法可用来计算如下形式的任何积分

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx \quad (m>0), \tag{4}$$

其中 P 和 Q 都是多项式，Q 没有实零点，并且 Q 的次数至少比 P 的次数高 2 次．事实上，函数 $e^{imz}P(z)/Q(z)$ 只有有限个奇点，并且对充分大的 ρ，它在 C_ρ^+ 上的积分以 $1\cdot(K/\rho^2)\cdot\pi\rho$ 为界，而 $\rho\to\infty$ 时，$1\cdot(K/\rho^2)\cdot\pi\rho$ 趋于零．当然，如果 $m<0$，我们就用 C_ρ^-．然而，在应用中有时需要计算形如(4)式但 Q 的次数只比 P 高 1 次的积分．例如，在下面的积分中，

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}x}{1+x^2}dx. \tag{5}$$

如果用前面的方法估计 $e^{iz}z/(1+z^2)$ 在 C_ρ^+ 上的积分，我们会发现它的上界为 $1\cdot(K/\rho)\cdot\pi\rho = K\pi$，其中 K 为某一常数．因为 $\rho\to\infty$ 时它不趋零，在计算(5)时半圆周线的方法是否起作用并不明显．

令人惊讶的是，这样一个函数在 C_ρ^+ 上的积分当 $\rho\to\infty$ 时确实趋于零；然而，要证明这一点需要更精细的积分估计．这就需要用到若尔当引理．首先，建立一个相当显然的不等式．

引理 2 假设 $f(t)$ 和 $M(t)$ 都是实区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数，f 是复值的，M 是实值的．如果在这个区间上 $|f(t)| \leqslant M(t)$，则

331

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b M(t)\,dt. \tag{6}$$

⊖ 参见本节最后的注记：计算 I 的另一种方法．

证 为了给出(6)式的详细证明，我们需要用到第4章中的积分理论．选取区间$[a, b]$的任意一个细分，譬如

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = b,$$

作f的黎曼和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta\tau_k.$$

因为对所有的t，$|f(t)| \leq M(t)$，由三角不等式得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta\tau_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} M(c_k)\Delta\tau_k,$$

注意上式右端是$M(t)$在区间$[a, b]$上的黎曼和．因为这个不等式对$[a, b]$的每个划分都成立，所以让这个划分的最大子区间长度趋于零，即得不等式(6)． ■

作为这个引理的一个直接推论，对于任意的复值连续函数$f(t)$，有

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

引理3(若尔当引理) 如果$m>0$，P/Q是两个多项式的商且满足

$$\mathrm{degree}Q \geq 1 + \mathrm{degree}P, \tag{8}$$

则

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{C_\rho^+} \mathrm{e}^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z = 0, \tag{9}$$

其中C_ρ^+是半径为ρ的上半圆周．

证 将C_ρ^+参数化得

$$\int_{C_\rho^+} \mathrm{e}^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z = \int_0^\pi g(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中

$$g(t) := \mathrm{e}^{im(\rho\mathrm{e}^{it})}\frac{P(\rho\mathrm{e}^{it})}{Q(\rho\mathrm{e}^{it})}\rho i\mathrm{e}^{it}.$$

现在

$$\left|\mathrm{e}^{im(\rho\mathrm{e}^{it})}\right| = \left|\mathrm{e}^{im\rho\cos t - m\rho\sin t}\right| = \mathrm{e}^{-m\rho\sin t}.$$

进而，由(8)式知存在某个常数K，使得

$$\left|\frac{P(\rho\mathrm{e}^{it})}{Q(\rho\mathrm{e}^{it})}\right| \leq \frac{K}{\rho},\quad (\rho\text{ 充分大时}).$$

所以

$$|g(t)| \leq \mathrm{e}^{-m\rho\sin t}\cdot\frac{K}{\rho}\cdot\rho = K\mathrm{e}^{-m\rho\sin t},$$

由引理2得

$$\left|\int_{C_\rho^+} \mathrm{e}^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq K\int_0^\pi \mathrm{e}^{-m\rho\sin t}\mathrm{d}t. \tag{10}$$

332

为了估计右边的积分，首先注意到$[0, \pi]$上的函数$e^{-m\rho\sin t}$是关于$t=\pi/2$对称的．从而

$$\int_0^{\pi} e^{-m\rho\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-m\rho\sin t}dt.$$

并且，我们注意到 $\sin t$ 的图形在$[0, \pi/2]$上是向下凹的；所以它位于图 6-8 所示的虚线的上方．换句话说，当$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$时，

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t,$$

从而当 $m\rho>0$ 时，在$[0, \pi/2]$上，

$$e^{-m\rho\sin t} \leqslant e^{-m\rho 2t/\pi},$$

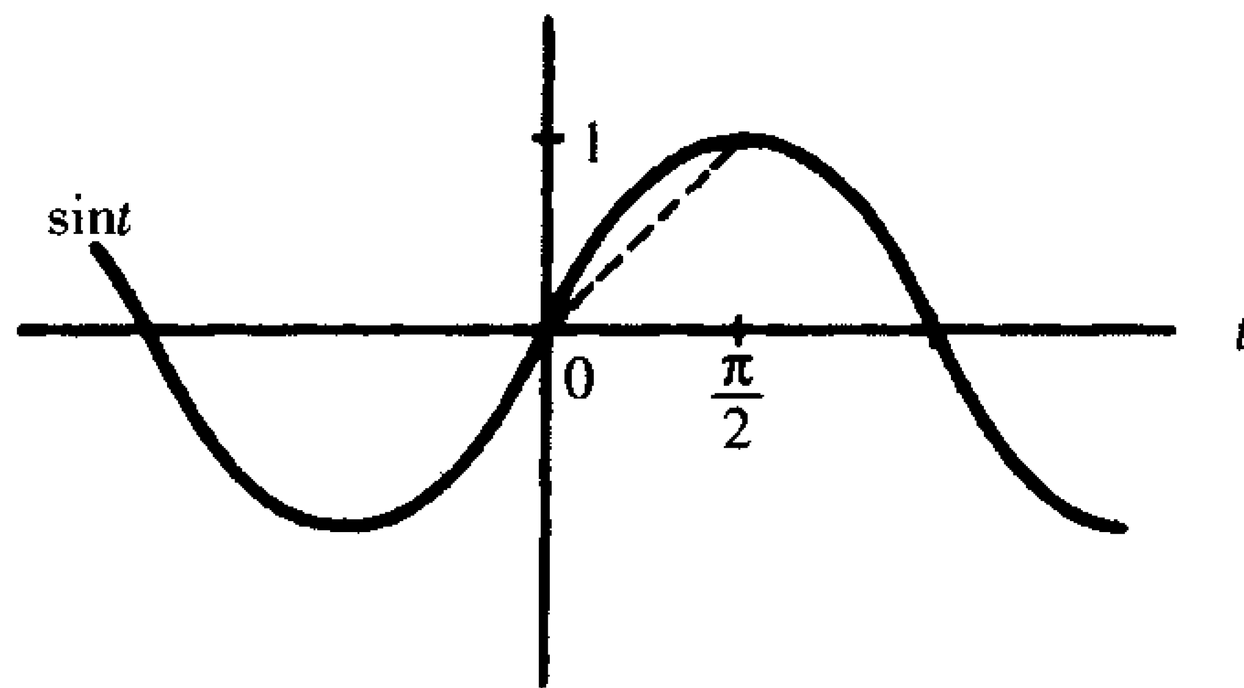


图 6-8 $\sin t$ 的图像

所以

$$\int_0^{\pi} e^{-m\rho\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-m\rho\sin t}dt \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-m\rho 2t/\pi}dt$$

333

$$= 2\left(\frac{-\pi}{m\rho 2}\right)[e^{-m\rho}-1] < \frac{\pi}{m\rho}.$$

因此，由公式(10)知

$$\left|\int_{C_\rho^+} e^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leqslant K\cdot\frac{\pi}{m\rho};$$

故当$\rho\to\infty$时，积分趋于零． ■

显然，当 m 是负数时，$e^{imz}P(z)/Q(z)$在上半平面上无界，但是在假设(8)式下，

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho^-} e^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 0 \quad (m<0),$$

其中 C_ρ^- 是半径为 ρ 的下半圆周．要证明这一结果，我们只需对(9)式作变量代换 $w=-z$ 即可．

例 2 计算

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx.$$

解 因为 $\sin x=(e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$，首先计算积分

$$I_1 := \text{p. v.}\ \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx.$$

因为 $m=1$ 和 $P/Q=x/(1+x^2)$时满足若尔当引理的假设，积分 I_1 等于 $ze^{iz}/[2i(1+z^2)]$在上半平面的留数的和乘以 $2\pi i$. 记

$$\frac{ze^{iz}}{2i(1+z^2)} = \frac{ze^{iz}}{2i(z+i)(z-i)},$$

求得函数在 $z=+i$ 处的留数为

$$\lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{2i(z+i)} = \frac{ie^{i^2}}{2i(i+i)} = \frac{-ie^{-1}}{4}.$$

所以

$$I_1 = 2\pi i \cdot \frac{-ie^{-1}}{4} = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

同理，在下半平面作封闭周线，计算

$$I_2 := -\text{p. v.} \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{1+x^2}dx,$$

得到

$$I_2 = (-2\pi i)\text{Res}\left(\frac{-ze^{-iz}}{2i(z+i)(z-i)}; -i\right) = -2\pi i \frac{ie^{(-i)^2}}{2i(-i-i)} = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

因此，$I = I_1 + I_2 = \pi/e$. ■ [334]

例 3 计算

$$I = \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x+i}dx.$$

解 作代换

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

得到

$$I = \text{p. v.} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i}dx + \text{p. v.} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}dx, \tag{11}$$

分别计算上式右端的各个积分.

对

$$I_1 := \text{p. v.} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i}dx$$

用上半平面上的半圆周 C_ρ^+ 与周线$[-\rho, \rho]$作闭周线. 由若尔当引理，

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2}\int_{C_\rho^+} \frac{e^{iz}}{z+i}dz = 0.$$

又因为被积函数的唯一奇点是下半平面的 $z=-i$ 点，从而推出 $I_1 = 0$.

对于第二个积分

$$I_2 := \text{p. v.} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}dx$$

用下半平面上的半圆周 C_ρ^- 与周线$[-\rho, \rho]$作闭周线，使 $-i$ 含在这条闭周线的内部. 得

$$I_2 = -2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-iz}}{2(z+i)}; -i\right)$$

$$= \frac{-2\pi i}{2} \lim_{z\to -i} e^{-iz} = -i\pi e^{-1}.$$

故 $I = I_1 + I_2 = -i\pi/e$. ■

我们也可以用更简便的方法计算例 1 和例 2. 由于例子中的积分可以分别表示为

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}dx = \text{Re p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2+4}dx$$

和

[335]

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\ \text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

所以只需在上半平面做一次留数计算，最后再取实部或虚部即可．然而，因为

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x+\mathrm{i}}\mathrm{d}x \neq \operatorname{Re}\ \text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\mathrm{d}x.$$

所以这种方法对例 3 无效．事实上，正如我们已经看到的，左边的数是纯虚数．

练习 6.4

应用留数的方法验证习题 1 ~ 3 中的积分公式．

1. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\mathrm{e}^2}$

2. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3\mathrm{e}^3}(3\cos 1+\sin 1)$

3. $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$

计算习题 4 ~ 9 中的积分．

4. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}}{x-2\mathrm{i}}\mathrm{d}x$

5. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(3x)}{x^4+4}\mathrm{d}x$

6. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{x^2+4}\mathrm{d}x$

7. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$

8. $\int_0^{\infty}\frac{x^3\sin(2x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

9. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{x-3\mathrm{i}}\mathrm{d}x$

10. 推导公式

[336]

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x-w}\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} & \text{如果 } \operatorname{Im}w>0,\\ -\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} & \text{如果 } \operatorname{Im}w<0.\end{cases}$$

11. 给出下面公式成立的条件：

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum[\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}P(z)/Q(z)\text{在上半平面各极点处的留数}].$$

12. 已知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$，沿圆扇形 $S_\rho:\{z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:0\leqslant\theta\leqslant\pi/4, 0\leqslant r\leqslant\rho\}$ 的边界对 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ 积分并令 $\rho\to+\infty$，证明

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+\mathrm{i}).$$

6.5 凹周线

在前一节中，假设被积函数 f 在整个积分区间上有定义并且连续．现在转向计算当 x 趋于某些有限点时，$|f(x)|\to\infty$ 的特殊积分．首先是给出这种 f 的积分的精确含义．

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，则 f 在区间 $[a, c]$，$[c, b]$ 以及 $[a, b]$ 上的反常积分定义为

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x := \lim_{r\to 0^+}\int_a^{c-r}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{s\to 0^+}\int_{c+s}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

和

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to 0^+}\int_a^{c-r} f(x)\,dx + \lim_{s\to 0^+}\int_{c+s}^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

这里假设以上各个极限存在．例如，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_s^1$$

$$= \lim_{s\to 0^+}[2-2\sqrt{s}] = 2,$$

因此，尽管渐近线是垂直的，但图 6-9 中图像的面积是有限的．

另一方面，图 6-10 所示的函数 $f(x)=1/(x-2)$ 的图像中垂直渐近线两边的面积都是无限的，这是因为当 $s\to 0^+$ 时，

337

$$\int_{2+s}^4 \frac{dx}{x-2} = \mathrm{Log}\,|x-2|\,\Big|_{x=2+s}^{x=4} = \mathrm{Log}\,2 - \mathrm{Log}s \to \infty,$$

以及当 $r\to 0^+$ 时，

$$\int_1^{2-r} \frac{dx}{x-2} = \mathrm{Log}\,|x-2|\,\Big|_{x=1}^{x=2-r} = \mathrm{Log}r - \mathrm{Log}\,1 \to -\infty.$$

然而，如果用 $r=s$ 从两边对称地封闭渐近线，则无穷大在下面积分的计算中正好“相互抵消”：

$$\int_1^{2-r} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+r}^4 \frac{dx}{x-2} = \mathrm{Log}\,|x-2|\,\Big|_{x=1}^{x=2-r} + \mathrm{Log}\,|x-2|\,\Big|_{x=2+r}^{x=4}$$

$$= \mathrm{Log}r - \mathrm{Log}\,1 + \mathrm{Log}\,2 - \mathrm{Log}r$$

$$= \mathrm{Log}\,2.$$

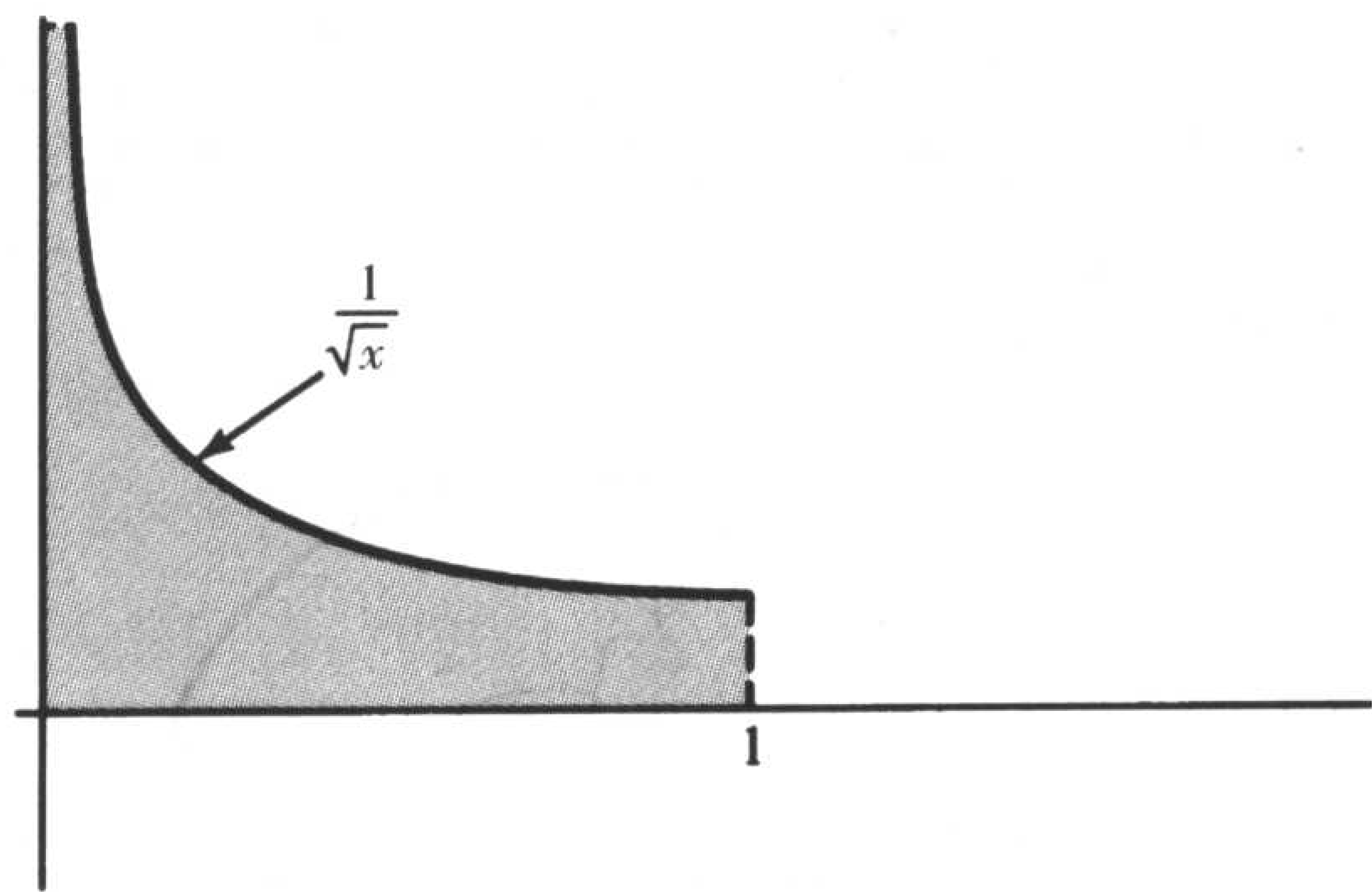


图 6-9　$1/\sqrt{x}$ 的图像

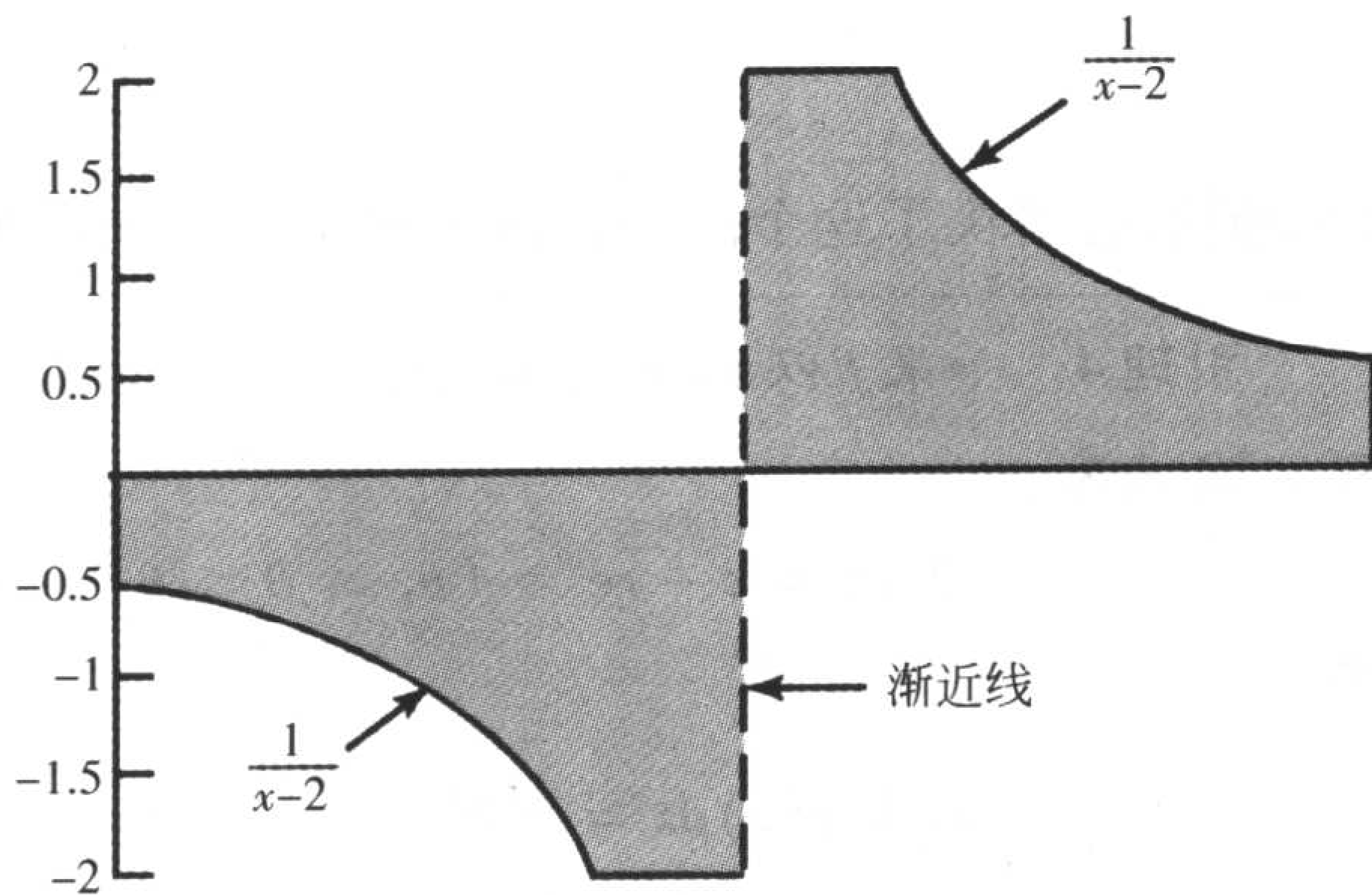


图 6-10　$1/(x-2)$ 的图像

338

为了再次利用这一点，当反常积分(1)中极限按对称选取时，我们采用反常积分的主值记号：

$$\text{p. v.}\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{r\to 0^+} = \left\{\int_a^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^b f(x)\,dx\right\}.$$

反常积分$\int_1^4 dx/(x-2)$不存在，但是它的主值是 Log 2.

如果函数$f(x)$在整个实轴上除去点c外连续，它在$(-\infty, \infty)$上的积分主值定义为

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ r \to 0^+}} \left[\int_{-\rho}^{c-r} f(x)\,dx + \int_{c+r}^{\rho} f(x)\,dx \right], \tag{2}$$

这里假定当独立地$\rho \to \infty$，$r \to 0^+$时极限存在㊀. 在函数出现几个不连续点$x = c_i$的情况下，我们用一种自然的方式扩展$(-\infty, \infty)$上积分主值的定义；即关于每个c_i，去掉一个小的对称区间$(c_i - r_i, c_i + r_i)$，然后当独立地$r_i \to 0^+$，$\rho \to \infty$时取积分的极限.（参见图 6-11.）

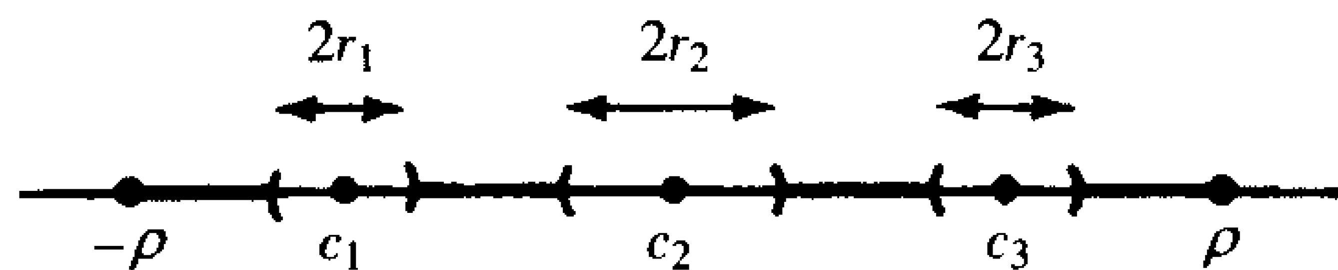


图 6-11 积分主值的积分路径

在计算形如(2)式的一些积分中，当把被积函数看作z的函数，且它在例外点c是单极点时，留数理论是很有用的. 在这种情况下，我们必须考虑f沿$[-\rho, c-r]$和$[c+r, \rho]$的积分，为了利用留数定理还必须构造某条包含这些线段的闭周线. 在之前两节，我们讨论了合适的连接$+\rho$到$-\rho$的路径，而现在需要的是连接$c-r$和$c+r$. 在连接时，我们不能沿着实轴连接，因为这样的线段必然经过奇点c，而是要想办法绕过c点，例如，构造如图 6-12 所示的半圆周S_r. 最后令r趋近于零，所以必须确定如下极限

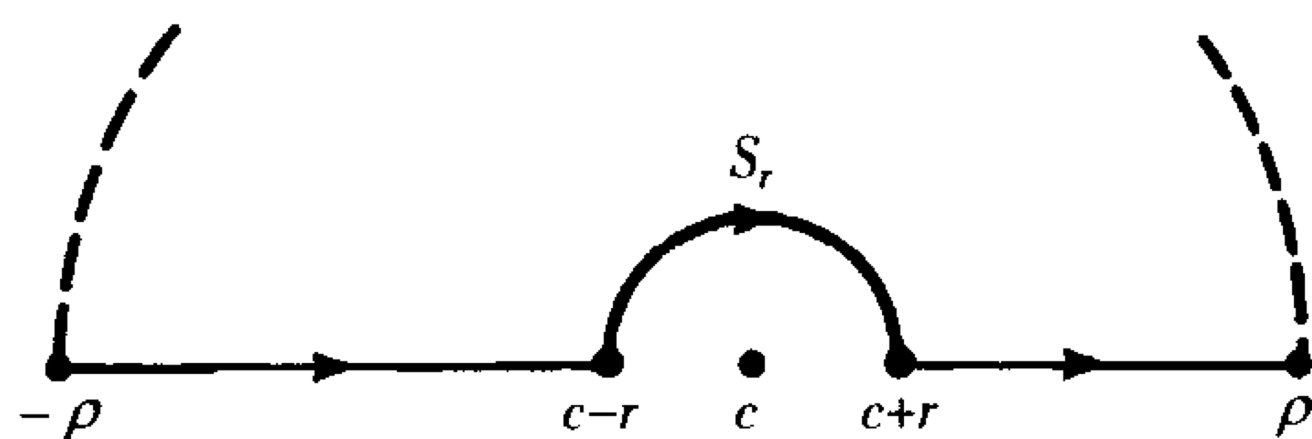


图 6-12 迂回周线

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{S_r} f(z)\,dz.$$

[339] 下面的引理解决了这个问题，该引理不仅能处理半圆周的情况，也可以处理任意圆弧的情况.

引理 4 如果f以$z = c$为单极点，T_r是如图 6-13 所示的圆弧，定义为

$$T_r: z = c + re^{i\theta} \quad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2), \tag{3}$$

则

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{T_r} f(z)\,dz = i(\theta_2 - \theta_1)\,\text{Res}(f; c). \tag{4}$$

从而，对图 6-12 所示的顺时针方向的半圆周S_r，有

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{S_r} f(z)\,dz = -i\pi\,\text{Res}(f; c). \tag{5}$$

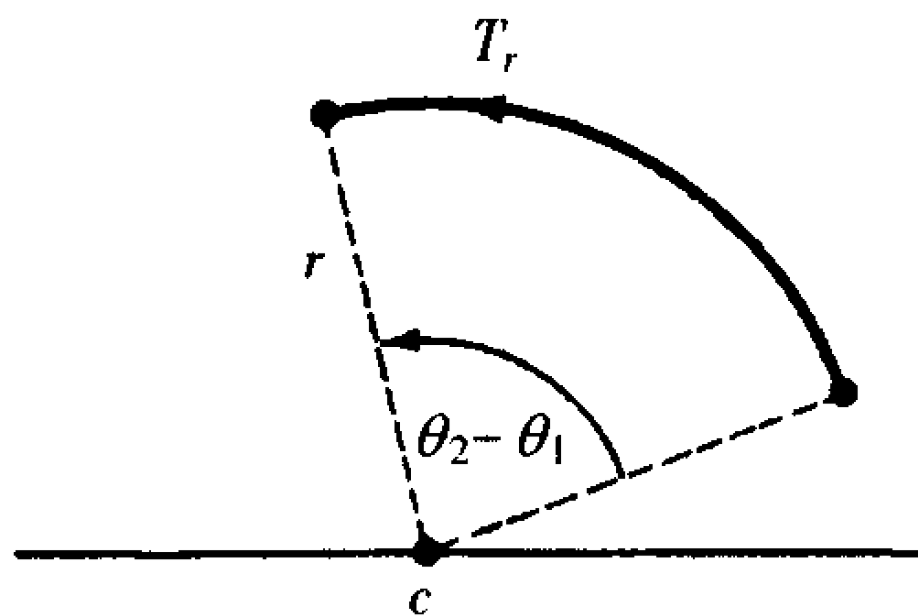


图 6-13 引理 4 中的圆弧

㊀ 更确切地讲，我们说(2)式中的极限存在且等于L是指对任意的$\varepsilon > 0$，存在正常数M和δ，使得对于$\rho > M$和$0 < r < \delta$，(2)式中方括号内的部分总在L的ε邻域内.

证 因为f以c为单极点，它在c的某一去心邻域$0<|z-c|<R$内的洛朗展开式为

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-c}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-c)^k,$$

从而对于$0<r<R$，有

$$\int_{T_r}f(z)\,dz=a_{-1}\int_{T_r}\frac{dz}{z-c}+\int_{T_r}g(z)\,dz, \tag{6}$$

其中

340

$$g(z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-c)^k.$$

现在g在c处解析(为什么?)，所以在c点的某一邻域内有界；即$|z-c|<R_1$时，

$$|g(z)|\leqslant M.$$

所以，对$0<r<R_1$，有

$$\left|\int_{T_r}g(z)\,dz\right|\leqslant M\ell(T_r)=M(\theta_2-\theta_1)r,$$

并且当$r\to 0^+$时，上式最后一项趋于零．因此

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{T_r}g(z)\,dz=0.$$

对于$1/(z-c)$的积分，应用参数形式(3)，推得

$$\int_{T_r}\frac{dz}{z-c}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{re^{i\theta}}rie^{i\theta}d\theta=i\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=i(\theta_2-\theta_1),$$

所得积分值与r无关．所以由(6)式，得到

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{T_r}f(z)\,dz=a_{-1}i(\theta_2-\theta_1)+0=\operatorname{Res}(f;c)i(\theta_2-\theta_1),$$

这正是所求的极限(4)．

特别地，当T_r是逆时针方向的半圆周时，得到极限值$i\pi\operatorname{Res}(f;c)$，所以对图6-12所示的相反方向的半圆周$S_r$，得到极限值$-i\pi\operatorname{Res}(f;c)$． ■

例1 求

$$I=\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

的值．

解 首先注意到被积函数除去$x=0$外连续．所以

$$I=\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ r\to 0^+}}\left(\int_{-\rho}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{r}^{\rho}\frac{e^{ix}}{x}dx\right).$$

现在引入复函数

$$f(z):=\frac{e^{iz}}{z},$$

它以原点为单极点但是在其他点处处解析．接下来必须构造一个包含线段$[-\rho,-r]$和$[r,\rho]$的闭周线．注意到当我们将$+\rho$和$-\rho$用上半平面的半圆C_ρ^+连接起来时，可对$f(z)$应用若尔

[341] 当引理．在连接 $-r$ 和 r 时我们用半圆周 S_r 绕过原点．这样就得到一条如图 6-14 所示的闭周线．因为 $e^{iz}z$ 在闭周线内没有奇点，所以有

$$\left(\int_{-\rho}^{-r}+\int_{S_r}+\int_{r}^{\rho}+\int_{C_\rho^+}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz=0;$$

即

$$\int_{-\rho}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{r}^{\rho}\frac{e^{ix}}{x}dx=-\int_{S_r}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_\rho^+}\frac{e^{iz}}{z}dz. \quad (7)$$

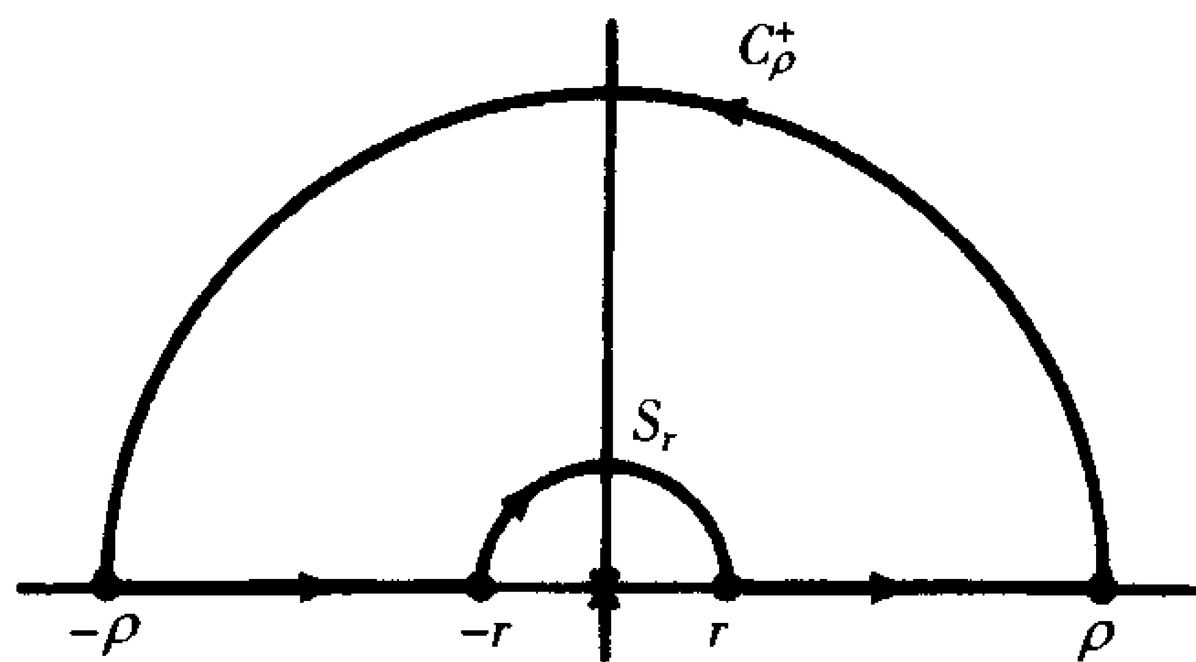


图 6-14 例 1 中的周线

由若尔当引理，

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{C_\rho^+}\frac{e^{iz}}{z}dz=0,$$

再由引理 4 的公式(5)，

$$\lim_{r\to0^+}\int_{S_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-i\pi\text{Res}(0)=-i\pi\lim_{z\to0}z\cdot\frac{e^{iz}}{z}=-i\pi.$$

所以由(7)式得

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=-(-i\pi)-0=i\pi. \quad (8)$$

■

例 2 求

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ r\to0^+}}\int_r^{\rho}\frac{\sin x}{x}dx.$$

解 注意到被积函数 $g(x):=(\sin x)/x$ 是 x 的偶函数；即对所有的 x，$g(-x)=g(x)$．所以

[342]

$$2\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

并且，右边的积分是 e^{ix}/x 在 $(-\infty,\infty)$ 上的积分的虚部，从而由例 1，它等于 $\text{Im}(i\pi)=\pi$．所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

■

注意由例 1 可得另一个结果

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx=\text{Re}(i\pi)=0,$$

但是这并不令人惊讶，因为被积函数 $h(x):=(\cos x)/x$ 是 x 的奇函数；即对所有的 x，$h(-x)=-h(x)$．

例 3 计算

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx.$$

解 被积函数在两个实数点 $x=\pm1$ 处不连续，所以我们需要求

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ r_1,r_2\to0^+}}\left(\int_{-\rho}^{-1-r_1}+\int_{-1+r_1}^{1-r_2}+\int_{1+r_2}^{\rho}\right)\frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx.$$

为此考虑

343

$$f(z):=\frac{ze^{2iz}}{z^2-1}.$$

如图 6-15 所示，绕过每个单极点作一条闭周线．因为 $f(z)$ 在闭周线内解析，得

$$\left(\int_{-\rho}^{-1-r_1}+\int_{-1+r_1}^{1-r_2}+\int_{1+r_2}^{\rho}\right)\frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx+J_{r_1}+J_{r_2}+J_\rho=0, \tag{9}$$

其中 J_{r_1}，J_{r_2}，J_ρ 分别为 $f(z)$ 沿 S_{r_1}，S_{r_2}，C_ρ^+ 的积分．由若尔当引理得

$$\lim_{\rho\to\infty}J_\rho=0,$$

由引理 4 的公式(5)，得

$$\lim_{r_1\to0^+}J_{r_1}=-i\pi\text{Res}(-1)=-i\pi\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)$$

$$=-i\pi\lim_{z\to-1}\frac{ze^{2iz}}{z-1}=\frac{-i\pi e^{-2i}}{2},$$

$$\lim_{r_2\to0^+}J_{r_2}=-i\pi\text{Res}(1)=-i\pi\lim_{z\to1}(z-1)f(z)$$

$$=-i\pi\lim_{z\to1}\frac{ze^{2iz}}{z+1}=\frac{-i\pi e^{2i}}{2}.$$

所以在式(9)中取极限，得

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2-1}dx=\frac{i\pi e^{-2i}}{2}+\frac{i\pi e^{2i}}{2}-0=i\pi\cos2.$$

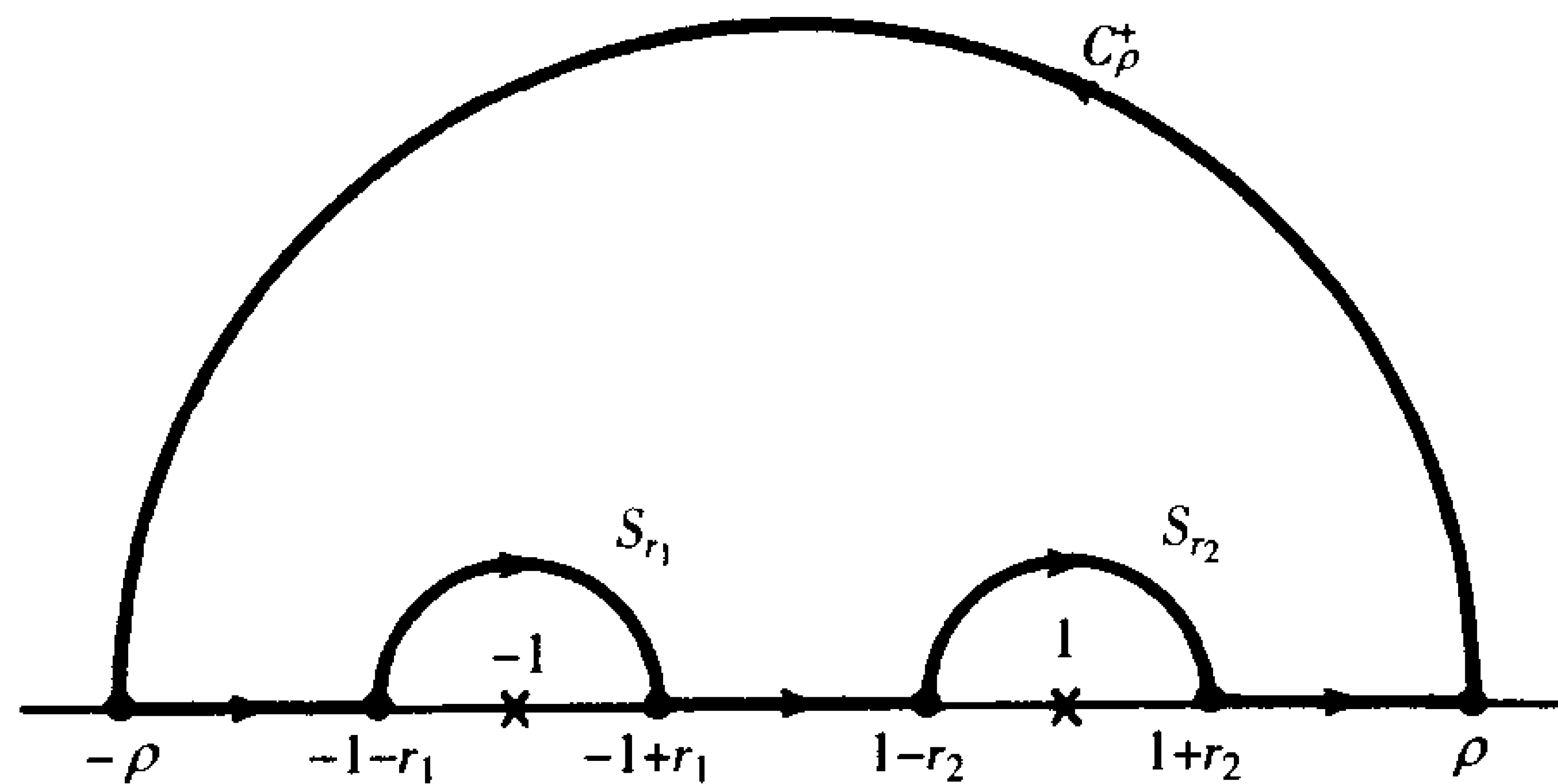


图 6-15　例 3 中的周线

■

练习 6.5

1. 沿着给定的圆弧计算下列各极限．

(a) $\lim_{r\to0^+}\int_{\Gamma_r}\frac{2z^2+1}{z}dz$，　其中 $\Gamma_r:z=re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

(b) $\lim_{r\to0^+}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{3iz}}{z^2-1}dz$，　其中 $\Gamma_r:z=1+re^{i\theta}$，　$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi$

(c) $\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma_r}\frac{\text{Log}z}{z-1}dz$, 其中 $\gamma_r: z = 1 + re^{-i\theta}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

(d) $\lim_{r\to 0^+}\int_{S_r}\frac{e^z-1}{z^2}dz$, 其中 $S_r: z = re^{-i\theta}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

用留数的方法，验证习题 2～8 中的各积分公式.

344

2. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x+1}dx = \pi i e^{-2i}$

3. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x-1)(x-2)}dx = \pi i(e^{2i} - e^{i})$

4. $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(x^2+1)^2}dx = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}\right)$

5. $\int_0^{\infty}\frac{\cos x - 1}{x^2}dx = -\frac{\pi}{2}$

6. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx = \frac{\pi}{5}[\cos(1) - e^{-2}]$

7. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-3x+2}dx = \pi[\sin(1) - 2\sin(2)]$

8. $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}e^{-\sqrt{3}}[\sin(1) + \sqrt{3}\cos(1)] + \frac{\pi\sin(2)}{3}$

9. 计算 $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$. $\left[\text{提示}:\sin^3 x = \text{Im}\left(\frac{3e^{ix}}{4} - \frac{e^{3ix}}{4} - \frac{1}{2}\right).\right]$

10. 验证

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

[提示：$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\text{Re}(1-e^{2ix})$.]

11. 对于 $0 < a < 1$，计算 $\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x - 1}dx$. [提示：作如图 6-6 所示的周线，绕过 $z = 0$ 和 $z = 2\pi i$ 两点.]

12. 对于 $a > 0$ 和 $b > 0$，验证

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab}).$$

6.6 关于多值函数的积分

用留数定理计算 $f(x)$ 的积分时，可能出现复函数 $f(z)$ 是多值的情况. 如果发生这种情况，我们需要对积分方法做适当修改，不仅要考虑孤立奇点还要考虑分支点和分支割线. 事实上，我们可以发现沿分支割线积分是必要的，所以首先讨论这一方法.

为了明确起见，设 α 表示一个非整数的实数，$f(z)$ 是将 z 的辐角限制在 0 到 2π 之间所得到的 z^{α} 的分支；即

345

$$f(z) = e^{\alpha(\text{Log}r + i\theta)}, \quad \text{其中 } z = re^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi. \tag{1}$$

在第 3 章中已经证明，这个函数在除去它的分支割线非负实轴外的平面上解析(见图 6-16). 事实上，当 z 从上半平面趋于割线上的点 $x(>0)$时，θ 趋近于零，并且

$$f(z) \to e^{\alpha\text{Log}x} = x^{\alpha} \tag{2}$$

(和微积分中一样，x^{α} 是主值)；而如果 z 从下半平面趋于 x 时，θ 趋近于 2π，所以

$$f(z) \to e^{\alpha(\mathrm{Log}x + i2\pi)} = x^{\alpha} \cdot e^{2\pi i\alpha}. \tag{3}$$

这时我们设想 f 在割线的"上沿"等于 x^{α}，在割线的"下沿"等于 $x^{\alpha} \cdot e^{2\pi i\alpha}$.

如果现在要沿割线对 $f(z)$ 进行积分，为避免混淆，需要在割线上方或下方各用一个有向箭头来表示要用的 f 的那个值．例如，f 沿图 6-17 所示的线段 γ_1 和 γ_2 的积分为

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz &= \int_{\varepsilon}^{\rho} x^{\alpha}\,dx, \\ \int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= -\int_{\varepsilon}^{\rho} x^{\alpha} \cdot e^{2\pi i\alpha}\,dx = -e^{2\pi i\alpha}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \end{aligned} \tag{4}$$

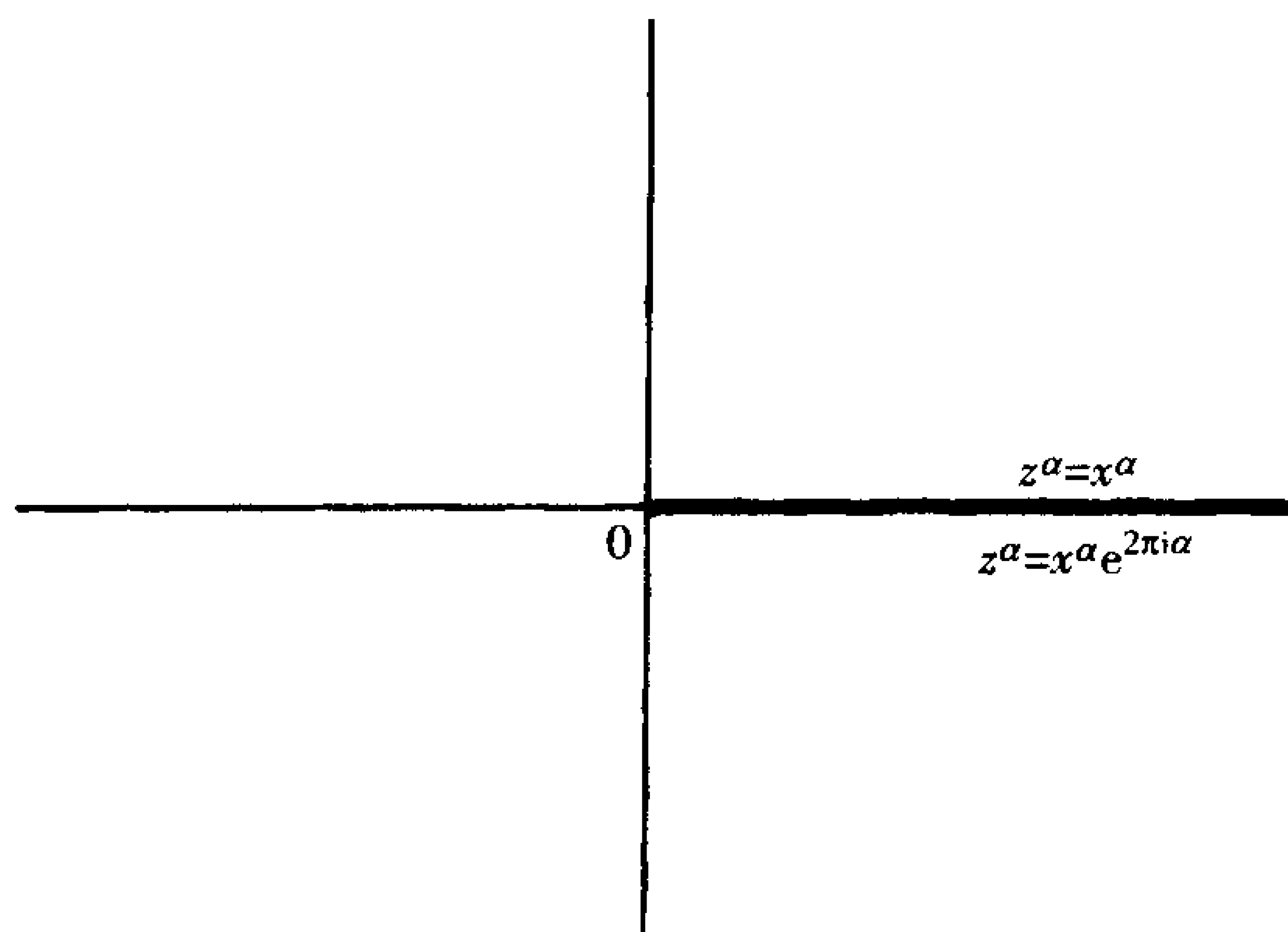


图 6-16 z^{α} 的分支割线

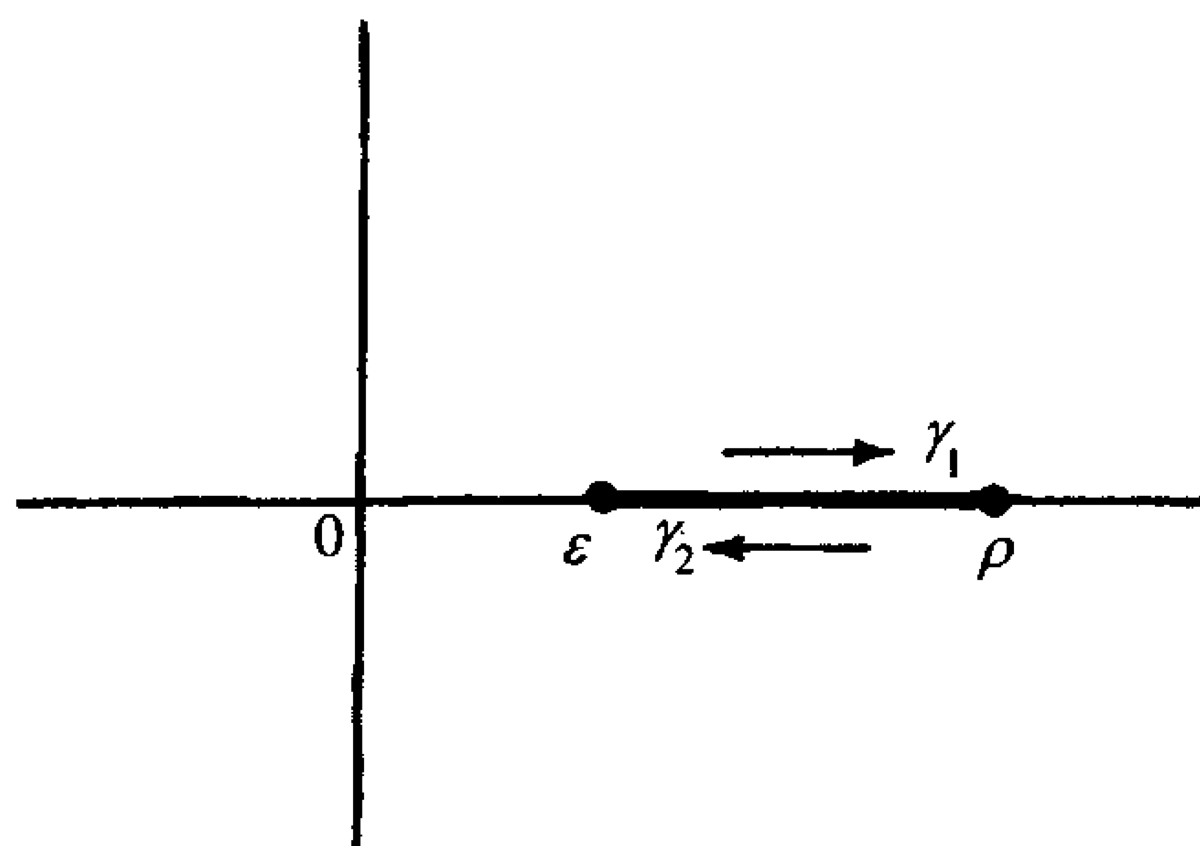


图 6-17 沿分支割线的积分

把这些记号应用到具有分支割线的任意函数—函数在割线每一侧的函数值由它在这一侧的连续性决定．我们现在举例说明对这样的函数如何应用留数定理． 346

例 1 设 α 是一个实数(非整数)，$R(z)$ 是一个在如图 6-18 所示的闭周线 Γ 上没有极点的有理函数．如果 $f(z)$ 是由将 z 的辐角限制在 $0 \sim 2\pi$ 之间得到的 $z^{\alpha}R(z)$ 的分支，即

$$f(z) = \begin{cases} e^{\alpha(\mathrm{Log}r + i\theta)} \cdot R(re^{i\theta}), & \text{对于 } z = re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi \\ x^{\alpha}R(x), & \text{对于 } z = x, \text{在 } \gamma_1 \text{ 上积分时} \\ x^{\alpha}e^{2\pi i\alpha}R(x), & \text{对于 } z = x, \text{在 } \gamma_2 \text{ 上积分时} \end{cases}$$

则

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum[\,f(z) \text{在 } \Gamma \text{ 内各极点处的留数}\,]^{\ominus}. \tag{5}$$

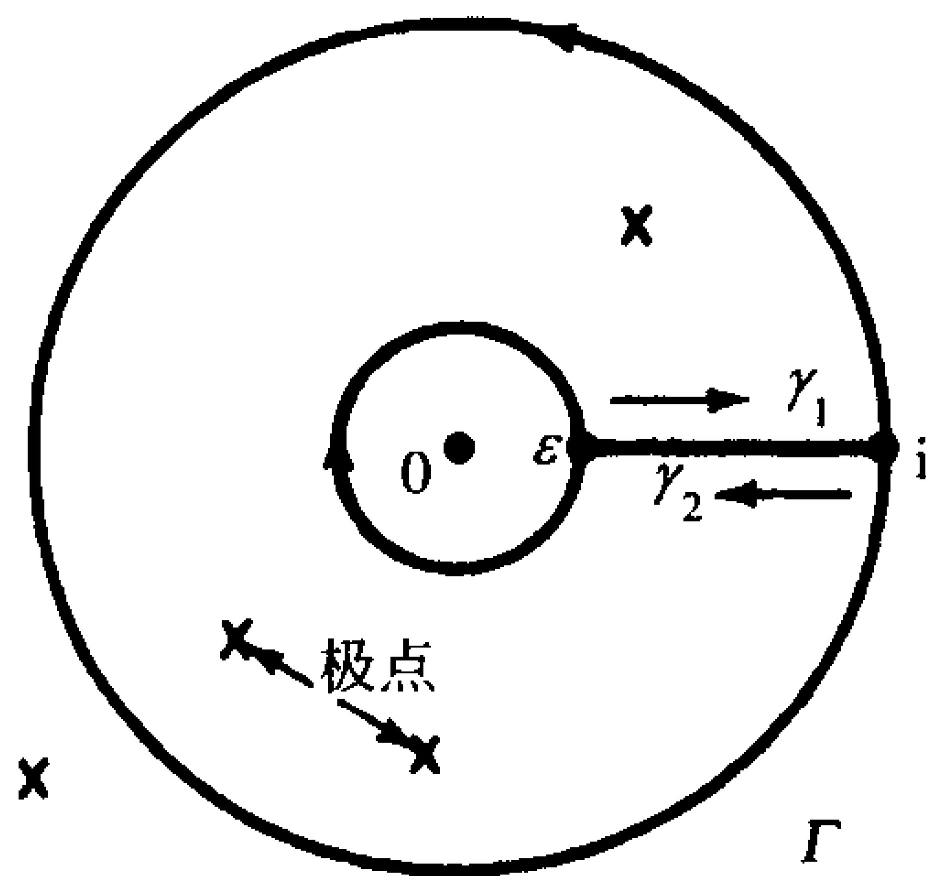


图 6-18 例 1 中的周线

证 因为被积函数在分支分割线的 $[\varepsilon, \rho]$ 部分是多值的，所以不能直接应用留数定理．(还要注意被积函数沿 γ_1，γ_2 的积分不为零．)为了克服这一困难，我们引入图 6-19 中虚线所表示的线段，它将内圆周和外圆周连接起来并且不经过 $R(z)$ 的任何极点．这样得到两条正向闭周线 Γ_1 和 Γ_2(如图 6-19 所示)，使得

⊖ 为明确起见，Γ 内我们指的是在两圆周之间但不在线段 $[\varepsilon, \rho]$ 上的那些点的集合．

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

(沿虚线段的积分为零). 因为在 Γ_1 上 $f(z)$ 是一个解析函数，所以在 Γ_1 上可以应用留数定理；事实上，对 Γ_1 内或 Γ_1 上的点 z，

347

$$f(z) = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Log} z} R(z)$$

(主值分支 Logz 沿负实轴取它的分支割线). 所以

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum (f \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 内各极点处的留数}). \tag{7}$$

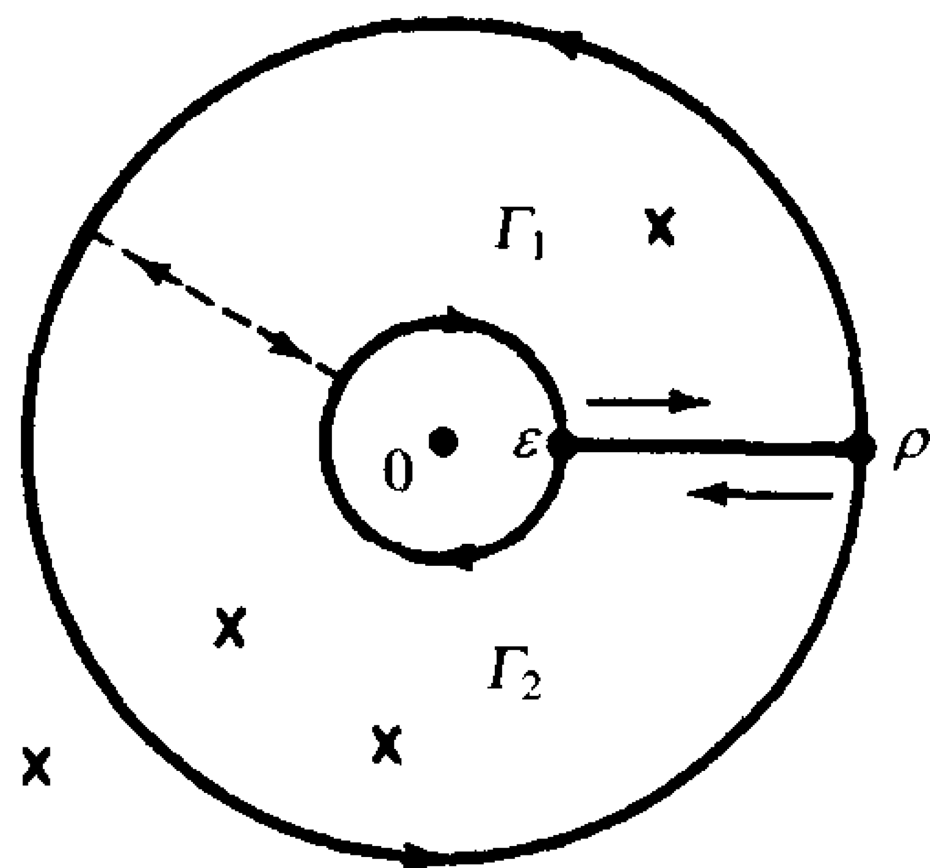


图 6-19 图 6-18 的修改

类似地，在 Γ_2 上 $f(z)$ 也是一个解析函数，例如，对 Γ_2 上的 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

$$f(z) = \mathrm{e}^{\alpha(\mathrm{Log} r + \mathrm{i}\theta)} R(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}), \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

(这时沿正虚轴作分支割线). 所以

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum (f \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 的各极点处的留数}). \tag{8}$$

348 由于 Γ 内的每个极点或者在 Γ_1 内或者在 Γ_2 内，由(7)式和(8)式，可以得到所要的(5)式. ■

有了留数定理的这一扩充，我们现在就可以处理包含 x 的分数次幂的一类函数的积分问题.

例 2 计算

$$I := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+4)},$$

其中 $\sqrt{x}$ 表示 $x > 0$ 时的主值.

解 显然这里需要求的是

$$I = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_\varepsilon^\rho \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+4)},$$

为此选取定义为

$$\sqrt{z} = \mathrm{e}^{(\mathrm{Log} r + \mathrm{i}\theta)/2}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

的 $z^{1/2}$ 的分支，它以非负实轴为分支割线. 利用所选的 $\sqrt{z}$，设

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{z}(z+4)}.$$

按照通常的习惯，对割线上沿的 $x > 0$，有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)},$$

而对割线下沿的 $x > 0$，有

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/2}(x+4)} = \frac{-1}{\sqrt{x}(x+4)}.$$

现在需要构造包含线段[ε, ρ]的闭周线，同时必须考虑在原点以及极点 $z=-4$ 的分支点．因此考虑选取图 6-20 所示的闭周线，其中 ε 充分小而 ρ 充分大，使得极点 -4 在这条周线的内部．由例 1，对这样的 ε 和 ρ 有

$$\left(\int_{\Gamma_\varepsilon}+\int_{C_\rho}+\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f;\,-4). \tag{9}$$

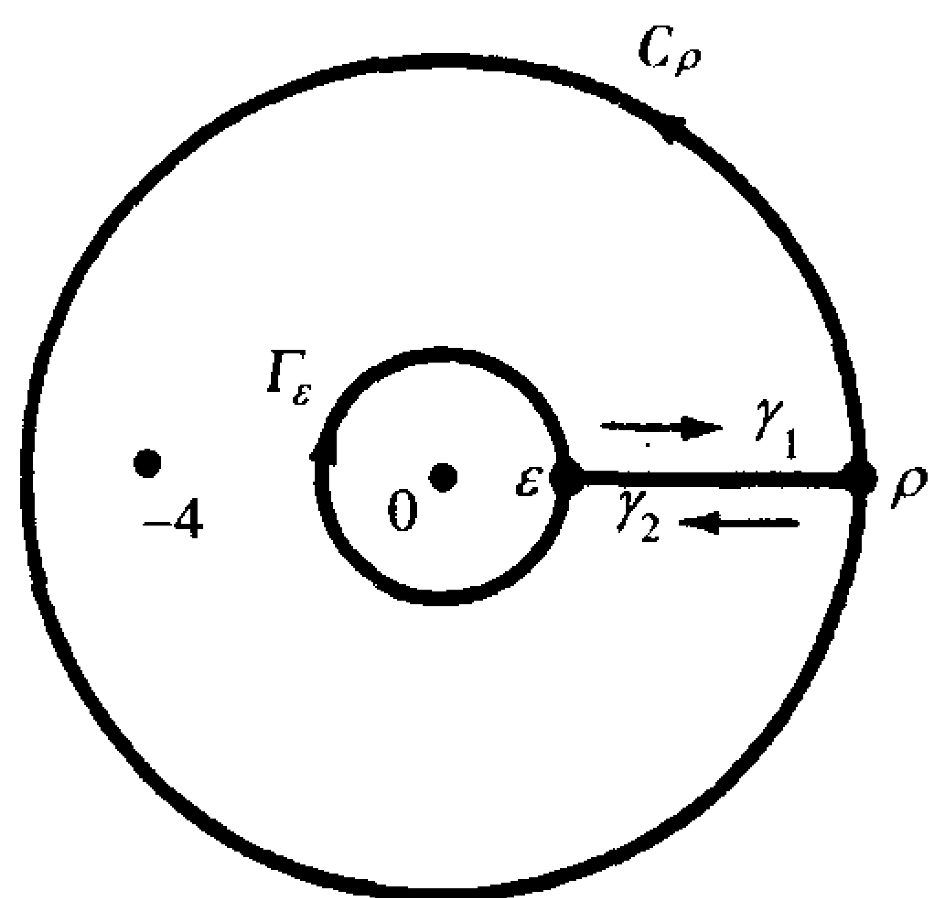


图 6-20　例 2 中的周线

类似前面的讨论，

$$\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^\rho\frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^\rho\frac{-1}{\sqrt{x}(x+4)}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_\varepsilon^\rho\frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\mathrm{d}x,$$

349

所以

$$\lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \varepsilon\to0^+}}\left(\int_{\gamma_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z\right)=2I.$$

并且，在半径为 ρ 的圆周上，有

$$|f(z)|=\frac{1}{|\sqrt{z}||z+4|}\leqslant\frac{1}{\sqrt{\rho}(\rho-4)}\quad(\rho>4),$$

于是得

$$\left|\int_{C_\rho}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{2\pi\rho}{\sqrt{\rho}(\rho-4)}.$$

所以当 $\rho\to\infty$ 时，在 C_ρ 上的积分趋于零．类似地，在半径为 ε 的内圆上，有

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(4-\varepsilon)}\quad(\varepsilon<4),$$

这蕴涵

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}(4-\varepsilon)}=\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{4-\varepsilon}.$$

从而当 $\varepsilon\to0^+$ 时，上式也趋于零．

因此，对(9)式，当 $\rho\to\infty$ 和 $\varepsilon\to0^+$ 时取极限，得

$$0+0+2I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f;\,-4). \tag{10}$$

最后，因为 $z=-4$ 是 f 的单极点，所以

$$\operatorname{Res}(f;\,-4)=\lim_{z\to-4}(z+4)f(z)=\lim_{\substack{r\to4\\ \theta\to\pi}}\frac{1}{\sqrt{z}}=\lim_{\substack{r\to4\\ \theta\to\pi}}\frac{1}{\mathrm{e}^{(\mathrm{Log}r+\mathrm{i}\theta)/2}}$$
$$=\mathrm{e}^{-(\mathrm{Log}4)/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}=\frac{1}{\sqrt{4}}(-\mathrm{i})=\frac{-\mathrm{i}}{2}.$$

350

所以由(10)式得

$$I=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

■

下面是一个情况更复杂一点的例子．

例 3　计算

$$I = \text{p. v.}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(x-4)},\quad 其中 0 < \lambda < 1.$$

解　这个例子和前面的例 2 有重大区别；本例中奇点 $x = +4$ 位于积分区间上．同时还要注意到分母已推广为 x 的指数的形式，所以必须计算

$$I = \lim_{\substack{\rho \to \infty \\ \varepsilon, \delta \to 0^+}} \left(\int_{\varepsilon}^{4-\delta} + \int_{4+\delta}^{\rho}\right) \frac{dx}{x^{\lambda}(x-4)}.$$

为此，我们要绕过奇点，并对例 2 的方法进行一些改进．选择分支

$$f(z) = \frac{1}{e^{\lambda(\text{Log} r + i\theta)}(re^{i\theta} - 4)}, z = re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi,$$

[351] 构造如图 6-21 所示的周线.

因为 $f(x)$ 在这条闭周线“内”没有奇点，沿此周线的积分必然为零．利用 f 在割线上沿和割线下沿的不同定义，我们有

$$(1 - e^{-2\pi i\lambda})\left(\int_{\varepsilon}^{4-\delta} + \int_{4+\delta}^{\rho}\right)\frac{dx}{x^{\lambda}(x-4)}$$

$$+ \left(\int_{\Gamma_{\varepsilon}} + \int_{S_{\delta}^{+}} + \int_{S_{\delta}^{-}} + \int_{C_{\rho}}\right) f(z)\,dz = 0, \quad (11)$$

其中周线如图 6-21 所示．

对于 $0 < \lambda < 1$，容易应用例 2 的估计方法证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{\Gamma_{\varepsilon}} f(z)\,dz = 0 \quad 和 \quad \lim_{\rho \to \infty}\int_{C_{\rho}} f(z)\,dz = 0. \quad (12)$$

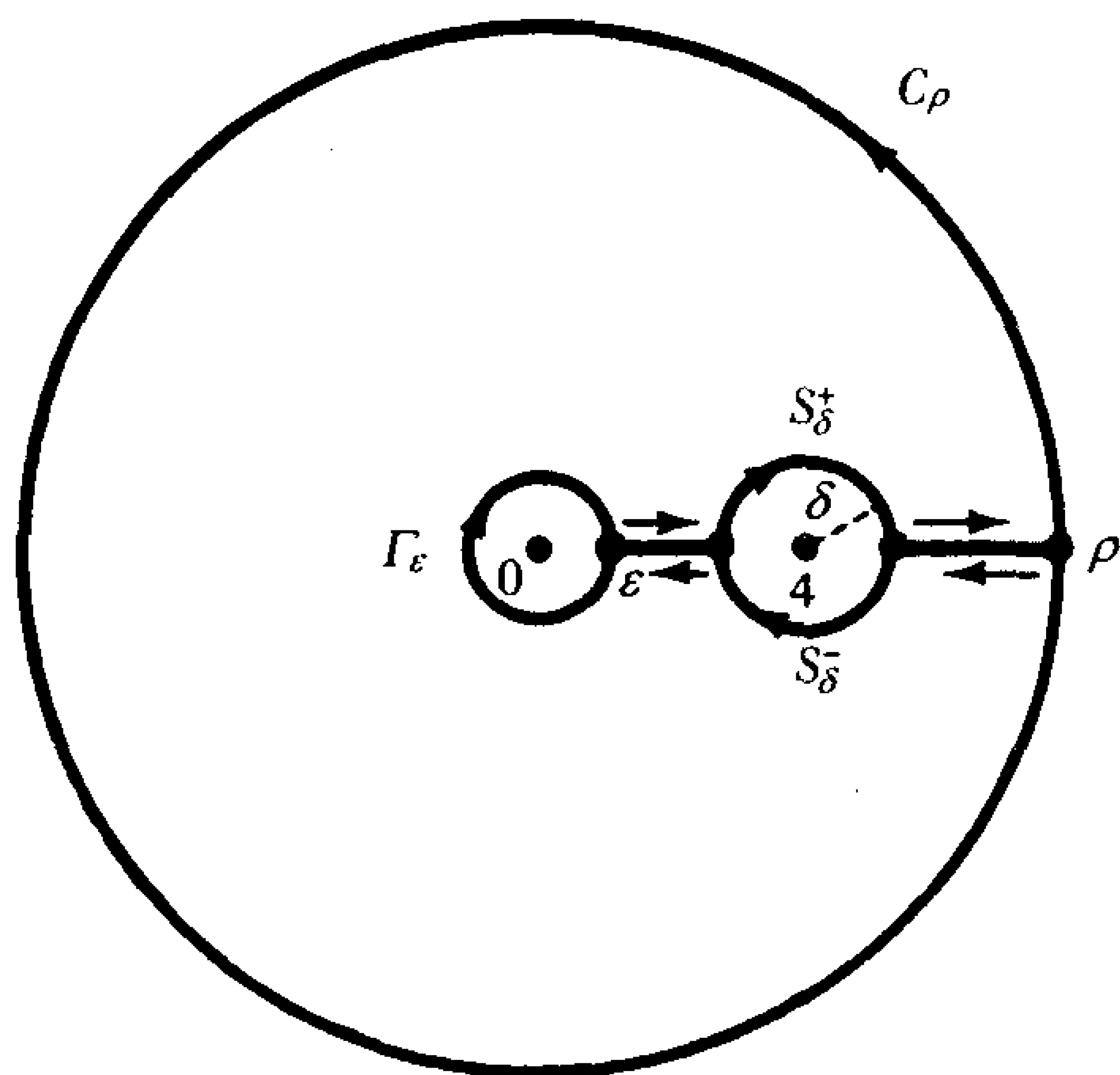


图 6-21　例 3 的周线

为了计算在 S_{δ}^{+} 和 S_{δ}^{-} 上的积分当 $\delta \to 0^+$ 时的极限，我们应用上一节关于积分在单极点附近的性质的结果．在以 $z=4$ 为心的上半圆周上，函数 f 等于主值分支

$$f_1(z) := \frac{1}{e^{\lambda \text{Log} z}(z-4)},$$

这个主值分支在正实轴上除去单极点 $z=4$ 外解析．所以由 6.5 节的引理 4，

$$\lim_{\delta \to 0^+}\int_{S_{\delta}^{+}} f(z)\,dz = -i\pi \text{Res}(f_1;4) = -i\pi \lim_{z \to 4} e^{-\lambda \text{Log} z} = -i\pi 4^{-\lambda}. \quad (13)$$

然而，在以 $z=4$ 为心的下半圆周上 $f(z)$ 等于 $e^{-2\pi i\lambda}$ 乘以 $f_1(z)$，所以

$$\lim_{\delta \to 0^+}\int_{S_{\delta}^{-}} f(z)\,dz = -i\pi 4^{-\lambda} e^{-2\pi i\lambda}. \quad (14)$$

最后，在(11)式中当 $\rho \to \infty$，$\varepsilon \to 0^+$，$\delta \to 0^+$ 时取极限，由(12)、(13)和(14)得到，

$$(1 - e^{-2\pi i\lambda})I + 0 - i\pi 4^{-\lambda} - i\pi 4^{-\lambda}e^{-2\pi i\lambda} + 0 = 0,$$

即

[352]

$$I = i\pi 4^{-\lambda}\frac{(1 + e^{-2\pi i\lambda})}{(1 - e^{-2\pi i\lambda})} = i\pi 4^{-\lambda}\frac{e^{i\pi\lambda} + e^{-i\pi\lambda}}{e^{i\pi\lambda} - e^{-i\pi\lambda}} = \pi 4^{-\lambda}\cot(\pi\lambda).$$ ■

例 4 计算

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}.$$

解 注意在这里被积函数不是 x 的偶函数，所以无法把 I 同整个实轴上的积分联系起来．根据前面的例子，我们应用对数函数的特点构造一条合适的闭周线．仍选择沿非负实轴割开的 $\log z$ 的分支，或者选择在 3.3 节注记中的$\mathcal{L}_0(z) := \text{Log}\,|z| + \text{i}\arg_0 z$，考虑沿例 2 中所用周线（图 6-20）的积分

$$I_{\varepsilon,\rho} = \int \frac{\mathcal{L}_0(z)\,dz}{(z+1)(z^2+2z+2)},$$

在割线的上沿我们有$\mathcal{L}_0(z) = \text{Log}x + \text{i}\arg_0 x = \text{Log}x$，在割线的下沿我们有$\mathcal{L}_0(z) = \text{Log}x + \text{i}2\pi$. 沿割线的两个方向来回各积分一次，注意到不想要的因子 Log$x$ 的实部正好抵消，于是得到

$$\int_\varepsilon^\rho \frac{\text{Log}x\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)} + \int_\rho^\varepsilon \frac{(\text{Log}x + \text{i}2\pi)\,dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}$$

$$= -2\pi\text{i}\int_\varepsilon^\rho \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+2)}.$$

估计沿图 6-20 所示的圆周 Γ_ε 和 C_ρ 的积分．对充分小的 ε，

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathcal{L}_0(z)\,dz}{(z+1)(z^2+2z+2)}\right| \leqslant \frac{\sqrt{(\text{Log}\varepsilon)^2 + (2\pi)^2}\,2\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon)(2-2\varepsilon-\varepsilon^2)},$$

当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，它趋于零．并且对充分大的 ρ，

$$\left|\int_{C_\rho} \frac{\mathcal{L}_0(z)\,dz}{(z+1)(z^2+2z+2)}\right| \leqslant \frac{\sqrt{(\text{Log}\rho)^2 + (2\pi)^2}\,2\pi\rho}{(\rho-1)(\rho^2-2\rho-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(\text{Log}\rho)^2 + (2\pi)^2}\,2\pi\rho}{\rho^3(1-1/\rho)(1-2/\rho-2/\rho^2)},$$

当 $\rho \to \infty$ 时它趋于零（因为$(\text{Log}\rho)/\rho^2 \to 0$）．所以，在极限意义下周线积分 $I_{\varepsilon,\rho}$趋于

$$-2\pi\text{i}\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+2)} = -2\pi\text{i}I.$$

但是，由留数定理，$I_{\varepsilon,\rho}$等于 $2\pi\text{i}$ 乘以周线内被积函数在各孤立奇点处留数的和．将 $I_{\varepsilon,\rho}$的被积函数记为

353

$$\frac{\mathcal{L}_0(z)}{[z+1][z-(-1+\text{i})][z-(-1-\text{i})]},$$

（对小的 ε 和大的 ρ）求得留数的和为

$$\frac{\mathcal{L}_0(-1)}{(-\text{i})\text{i}} + \frac{\mathcal{L}_0(-1+\text{i})}{(+\text{i})(2\text{i})} + \frac{\mathcal{L}_0(-1-\text{i})}{(-\text{i})(-2\text{i})}$$

$$= \frac{\pi\text{i}}{+1} + \frac{\text{Log}(\sqrt{2}) + 3\pi\text{i}/4}{-2} + \frac{\text{Log}(\sqrt{2}) + 5\pi\text{i}/4}{-2}$$

$$= -\text{Log}(\sqrt{2}).$$

故所求积分为 $I = 2\pi\text{i}(-\text{Log}(\sqrt{2}))/(-2\pi)\text{i} = \text{Log}(\sqrt{2})$. ■

练习 6.6

用留数定理验证习题 1 ~ 7 中的各积分公式.

1. $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

2. $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},\quad 0<\alpha<1$

3. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+9)^2}dx = \frac{9^{\alpha-1}\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)},\quad -1<\alpha<1,\alpha\neq 0$

4. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{4\cos(\alpha\pi/2)},\ -1<\alpha<3,\alpha\neq 1$

5. $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{2\alpha\pi+\pi}{6}\right)\csc(\alpha\pi),0<\alpha<2,\alpha\neq 1$

6. p. v. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2-1}dx = \frac{\pi}{2\sin(\pi\alpha)}[1-\cos(\pi a)],\quad -1<\alpha<1,\alpha\neq 0$

7. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+2x\cos\phi+x^2}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\sin(\phi\alpha)}{\sin\phi},\quad -1<\alpha<1,\alpha\neq 0,\ -\pi<\phi<\pi,\ \phi\neq 0$

8. 验证

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{Log}|x|}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{2}\text{Log }2.$$

354 [提示：将 $(\text{Log}z)/(z^2+4)$ 沿绕过原点的半圆周积分(参见图 6-12)，并且注意当 $\rho\to+\infty$ 或 $\rho\to0^+$ 时，$(\rho\text{Log}\rho)/(\rho^2-4)\to 0$.]

9. 用例 4 的方法，计算下列积分：

(a) $\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$　　(b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx$

10. 验证

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log}x}{x^2+1}dx = 0.$$

[提示：参见习题 9.]

11. 验证

$$\int_0^\infty \frac{\text{Log}x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

[提示：参见习题 9.]

12. 验证

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\sin x dx = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cdot\Gamma(\alpha)\quad(0<\alpha<1),$$

其中 $\Gamma(\alpha):=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ 是伽马函数. [提示：对 $e^{-z}z^{\alpha-1}$ 沿绕过原点的四分之一圆周积分.]

13. 沿环绕点 0 和 1 的杠铃形周线以及包含这个杠铃形周线的大圆周求积分

$$\int_0^1 (x^2-x^3)^{-1/3}dx.$$

[提示：记 $(z^2-z^3)^{1/3}=z(z^{-1}-1)^{1/3}$ 并且选取 $(z^{-1}-1)^{1/3}$ 的合适分支.]

6.7 辐角原理与儒歇定理

这一节，我们将用柯西留数定理推导两个具有重要实际应用的理论结果. 这些结果适合奇

点都是极点的函数．这类函数在下面的定义中被赋予了一个特别的名字．

> **定义 2** 如果函数 f 在区域 D 内除去极点外处处解析，则称 f 为区域 D 内的**亚纯**(meromorphic)函数．

355

特别地，我们将 D 上的解析函数看作是亚纯函数的特例．有理函数在整个平面上都是亚纯函数．

假设给定简单闭周线 C 上解析、不取零点的函数 f，它在 C 内是亚纯的．在这些条件下可以证明 f 在 C 内至多有有限个极点．其证明基于两个事实：首先，f 的所有奇点都是孤立奇点(极点)，其次，C 内的每个无限点列都有一个收敛于 C 上或 C 内的某一点的子序列．(高等微积分课程中已经证明了这一事实，称为波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理．)所以，如果 f 在 C 内有无限多个极点，它的某一子序列也应该收敛于一个奇点，但它不是 f 的一个孤立奇点．这是一个矛盾，因而 C 内的极点个数必然是有限的．

同样，如果 f 在 C 内有无穷多零点，则必有一子序列收敛于某点 z_0．但是如果 f 在 z_0 点解析，由 5.6 节推论 3，函数 f 在 z_0 的某一邻域内必然恒为零—因而由解析延拓，f 在 C 上也恒为零；而如果 f 在 z_0 点不解析，由 5.6 节的讨论，需要 z_0 为本性奇点．两种情况都同我们的假设矛盾；所以在 C 内的零点数也是有限的．

在计算函数的零点或极点的个数时，通常包含重数．例如，设 C：$|z|=4$，并取

$$f(z)=\frac{(z-8)^2z^3}{(z-5)^4(z+2)^2(z-1)^5}. \tag{1}$$

则 f 在 C 内的极点数 $N_p(f)$ 理解为

$$\begin{aligned}N_p(f) &:= \sum_{C\text{内极点}}(\text{每个极点的阶})\\ &=(\text{极点 } z=-2 \text{ 的阶})+(\text{极点 } z=1 \text{ 的阶})\\ &=2+5=7,\end{aligned}$$

而 C 内的零点数 $N_0(f)$ 为

$$N_0(f):=(\text{零点 } z=0 \text{ 的阶})=3.$$

例 1 函数 $f(z)$ 如(1)式定义，计算 $\int_C f'(z)/f(z)\,dz$，其中 C：$|z|=4$ 是一条正向周线(见图 6-22)．

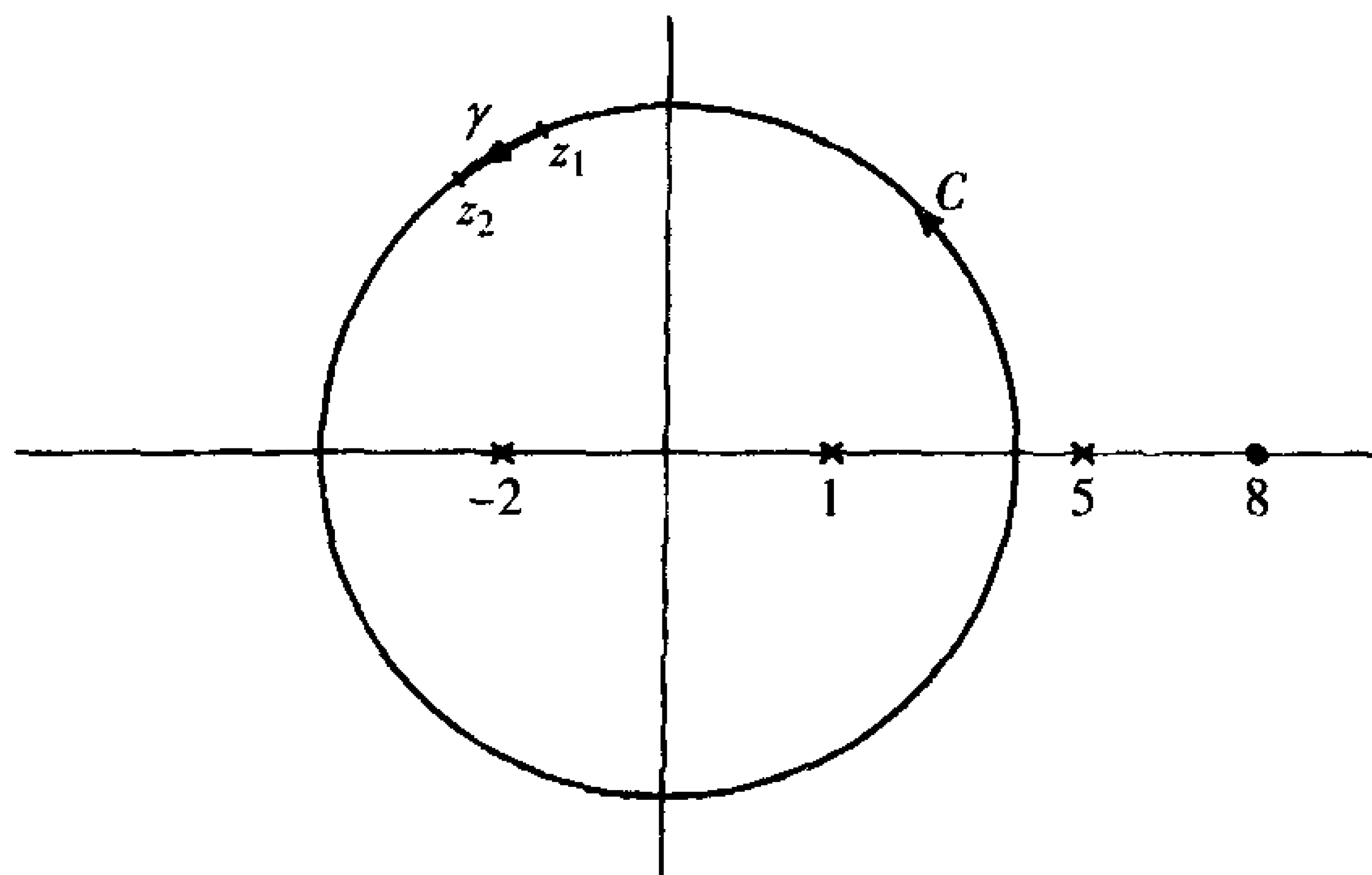


图 6-22 例 1 中的周线

356

解 为了引入新的概念，我们用非标准的方法解决这个问题．注意到在形式上，

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{d}{dz}\log f(z)\\ &= \frac{d}{dz}\{\operatorname{Log}|f(z)|+i\arg f(z)\}.\end{aligned}$$

假设 γ 是 C 的子弧段，它足够短使得 $\arg f(z)$

(的某一分支)沿 γ 的变动小于 2π. 于是存在 γ 上 $\log f(z)$ 的一个解析分支. 对这一分支，由 4.3 节定理 6，有

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \{\operatorname{Log}|f(z)| + i\arg f(z)\}\Big|_{z_1}^{z_2}, \tag{2}$$

其中 z_1 和 z_2 是 γ 的端点(见图 6-22). 如果把 C 分割成这样的小弧段，应用(2)式拼凑在一起，则有

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Delta_C \operatorname{Log}|f(z)| + i\Delta_C \arg f(z) = i\Delta_C \arg f(z), \tag{3}$$

其中 $\Delta_C \arg f(z)$ 表示当 z 沿 C 绕行一周时，$\arg f(z)$ 的纯改变量.(因为 $\operatorname{Log}|f(z)|$ 是单值的，它在闭周线上的纯改变量是零.)

由(1)知，

$$\arg f(z) = 2\arg(z-8) + 3\arg z - 4\arg(z-5) - 2\arg(z+2) - 5\arg(z-1).$$

因为 C 包含原点，当 z 沿 C 绕行一周时，$\arg z$ 的纯改变量是 2π. 类似地，因为 C 包含 -2 和 $+1$，$\arg(z+2)$ 和 $\arg(z-1)$ 的纯改变量都是 2π. 因为 8 和 5 在 C 的外部，$\arg(z-8)$ 和 $\arg(z-5)$ 的纯改变量都是零. 所以

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = i2\pi(3-2-5) = -4(2\pi i) = -8\pi i. \qquad \blacksquare$$

在这个例子中，$f(z)$ 在 C 内的每个零点对积分的贡献是 $2\pi i$ 乘以它的重数，每个极点的贡献是 $-2\pi i$ 乘以它的重数. 对所有的亚纯函数，辐角原理归纳了这一结果.

357

定理 3(辐角原理) *如果 f 在正向简单闭周线 C 上解析且没有零点，在 C 的内部亚纯，则*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_0(f) - N_p(f), \tag{4}$$

其中 $N_0(f)$ 和 $N_p(f)$ 分别表示 f 在 C 内的零点个数和极点个数(重数包含在内).

证 方法很直接：我们找出奇点并计算被积函数

$$G(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

的留数. 注意到 f 在 C 上处处解析且不等于零，所以被积函数 $G(z)$ 在 C 上处处解析. 在 C 的内部 G 的奇点只能是 f 的零点或极点.

首先考虑点 z_0 是 C 内 f 的 m 阶零点的情形. 这时 f 可以表示为

$$f(z) = (z-z_0)^m \cdot h(z),$$

其中 $h(z)$ 解析并且在 $z=z_0$ 处不等于零(见 5.6 节定理 16). 从而在 z_0 的某一去心邻域内有

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

因为函数 h'/h 在 z_0 解析，上式表明 G 以 z_0 为单极点并且在这点的留数等于 m.

另一方面，如果 f 以 z_p 为 k 阶极点，则

$$f(z) = \frac{H(z)}{(z-z_p)^k},$$

其中 $H(z)$ 在 z_p 解析并且 $H(z_p)\neq 0$（回忆 5.6 节引理 7）．这时，在 z_p 的某一去心邻域内，有

$$G(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-k}{z-z_p}+\frac{H'(z)}{H(z)},$$

又因为 H'/H 在 z_p 解析，可知 z_p 为 G 的单极点并且在这点的留数等于 $-k$. [358]

最后，由留数定理，G 沿 C 的积分必然等于 $2\pi i$ 乘以 G 在 C 内各奇点处留数之和．由前面的讨论，它等于 $2\pi i$ 乘以 f 在 C 内各零点阶数的和减去 f 在 C 内各极点的阶数的和；即

$$\int_C G(z)\,dz=\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i[N_0(f)-N_p(f)],$$

于是公式(4)得证． ■

当然，如果定理 3 中的函数 f 在 C 内没有极点，则 $N_p(f)=0$，于是有如下推论．

推论 1 如果 f 在正向简单闭周线 C 内和 C 上解析，并且 f 在 C 上没有零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N_0(f),$$

其中 $N_0(f)$ 是 f 在 C 内的零点数（重数包含在内）.

由上面的讨论，辐角原理的结论可以表示成如下形式：

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)=N_0(f)-N_p(f). \tag{5}$$

还有另一种表示 f 的辐角沿 C 变化的方法；它涉及像曲线 $f(C)$．它是曲线 C 在映射 $w=f(z)$ 下的像（在 w 平面上）；即如果把 C 用 $z=z(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 参数化，则曲线 $f(C)$ 的参数化形式为

$$w=f(z(t))\quad(a\leqslant t\leqslant b). \tag{6}$$

显然像曲线是闭曲线，但是和 C 不同，它不一定是简单的或正向的．

如果我们描绘出如图 6-23 所示的像曲线，容易得出 $f(z)$ 的辐角的净改变量．每当 $f(z(t))$ 沿正方向（逆时针方向）绕原点 $\omega=0$ 一周后，$\arg f$ 增加 2π，每当它沿负方向绕行一周，$\arg f$ 减少 2π. 因为 $f(C)$ 是闭曲线，所以 $\Delta_C\arg f(z)$ 等于 2π 乘以 $f(C)$ 以正方向绕 $w=0$ 一周的净次数，即逆时针方向的绕行次数减去顺时针方向的绕行次数[⊖].

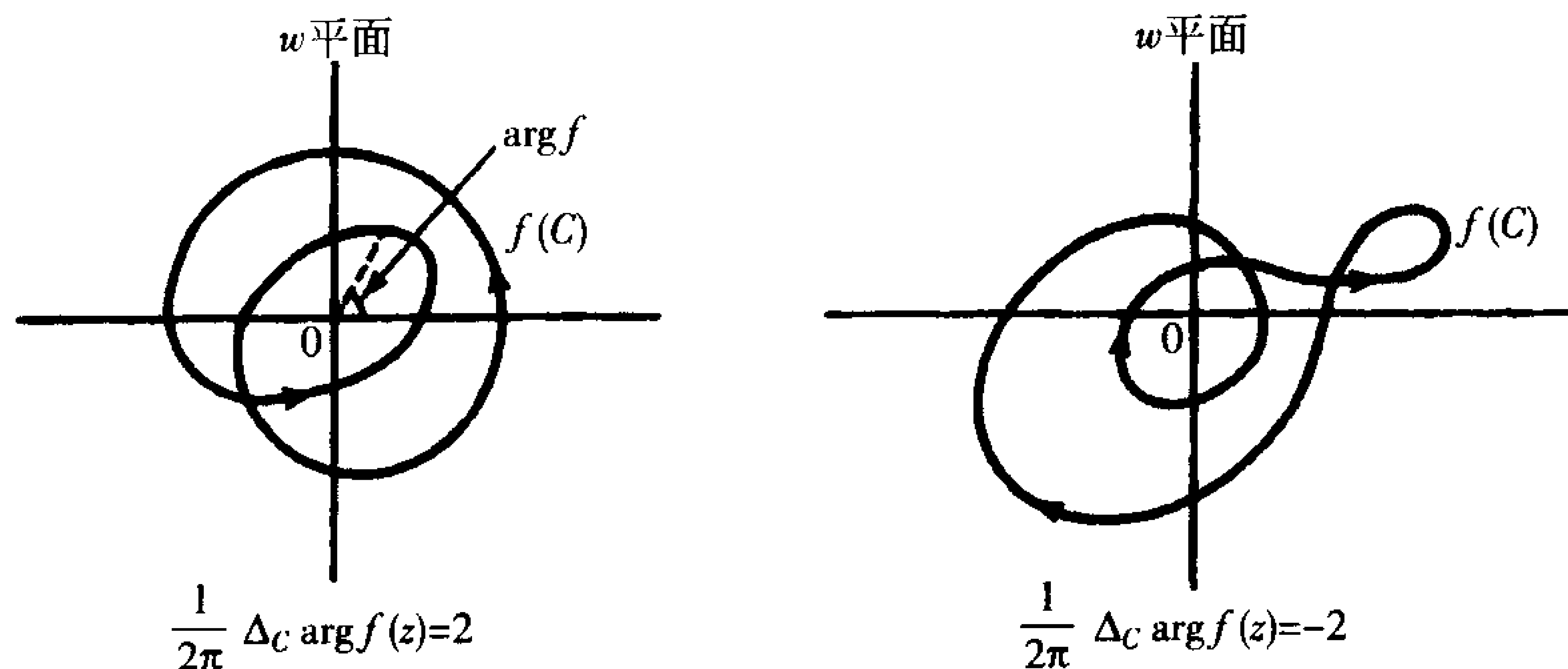


图 6-23 $\Delta_C\arg f(z)$ 的表示

⊖ 一些作者称之为 $f(C)$ 绕原点的圈数．

作为具体例子，考虑

$$f(z)=z^3 \quad 和 \quad C:z=e^{it},\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

注意在 $w=f(z)$ 下这个圆周的像沿正方向绕原点 3 周(见图 6-24)．所以 f 的辐角的纯改变量是 6π，由(5)式 $N_0(f)-N_p(f)=6\pi/2\pi=3$.

359

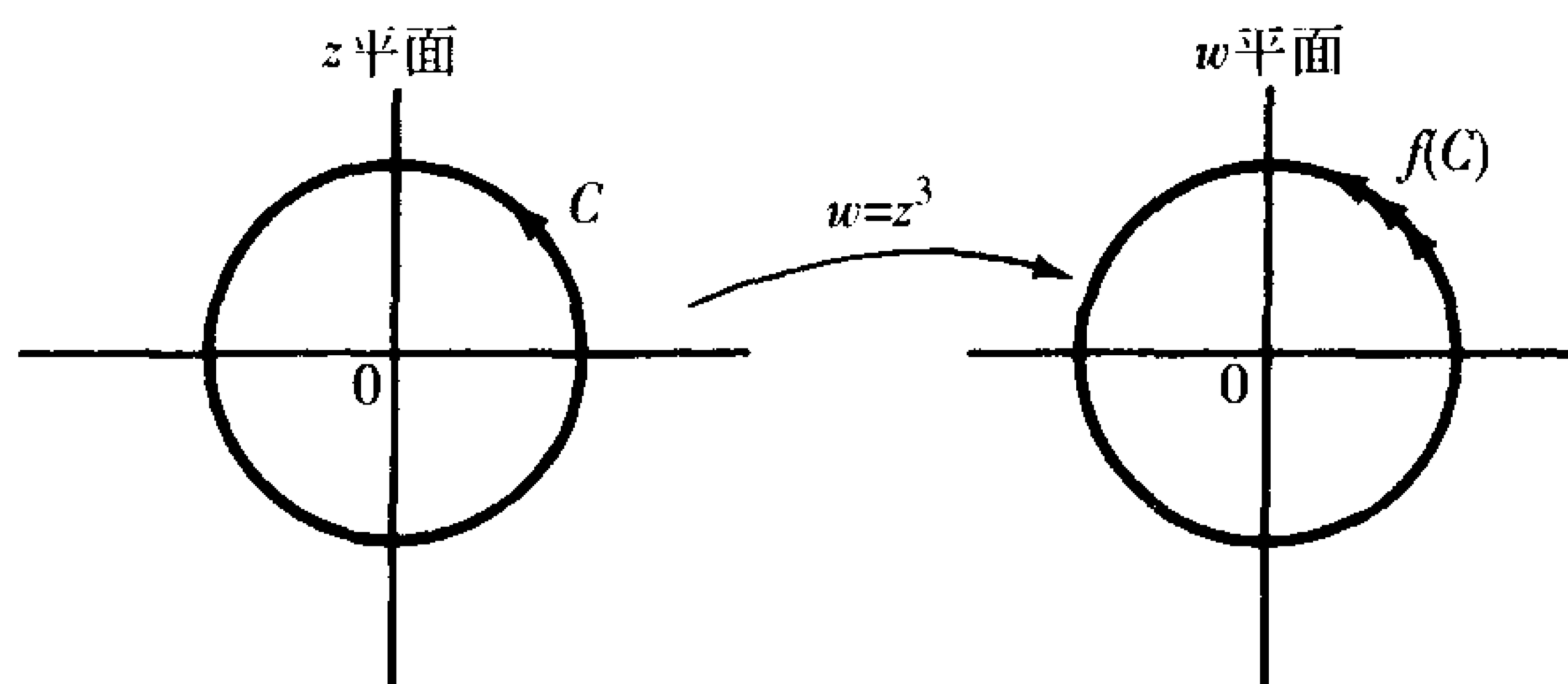


图 6-24 $\Delta_C\arg(z^3)$

下面，假设 $f(z)$ 在 C 上解析，在 C 内亚纯，我们计算 $f(C)$ 绕原点 $w=0$ 一周的次数．现在希望知道通过某一解析函数 $h(z)$ 组成的 $g(z):=f(z)+h(z)$ 关于 $f(z)$ 的扰动．我们想要知道扰动 h 要多小才能保证 $g(C)$ 绕原点 $w=0$ 一周的次数同 $f(C)$ 的相同．

这个问题类似于一个人在城市里牵着一条狗进行遛狗时的情形．如果人和狗遇到了一根电线杆，而狗带又较长时，狗必然会把狗带缠绕到电线杆上．但是，如果主人在行走时不断调整狗带的长度，使得它从不会拉长到杆子处，那么狗和人将会围绕杆子相同的次数而避免缠结．

我们把 w 平面的原点当做电线杆，曲线 $f(C)$ 是人的路径，$g(C)$ 是狗的路径(见图 6-25)，则狗带就是 $h(z)=g(z)-f(z)$，条件是狗带不会超过人到电线杆的距离—即

$$|h(z)|<|f(z)|,\quad z 在 C 上.$$

所以 $f(C)$ 和 $g(C)$ 绕原点的圈数相同．若函数 f 在 C 内无极点，将上面的讨论和辐角原理相结合，就得到儒歇定理．

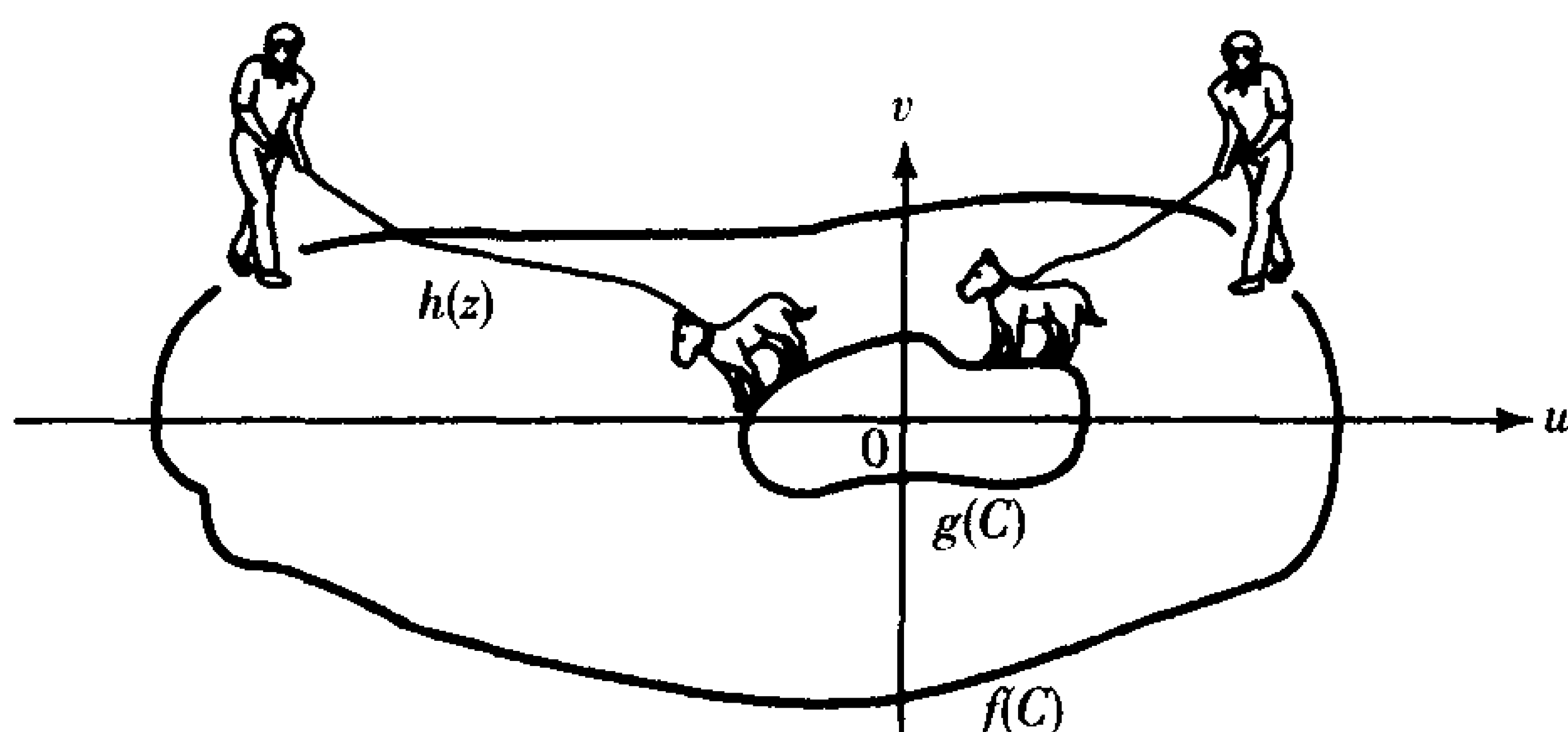


图 6-25 儒歇定理图解

360

定理 4(儒歇定理) *如果 f 和 h 都是简单闭周线 C 内和 C 上解析的函数，并且在 C 上有严格的不等式*

$$|h(z)|<|f(z)|,\tag{7}$$

则在 C 内 f 和 $f+h$ 的零点总数(按重数计算)必定相同．

注意到不等式(7)只需在 C 上而不是 C 内成立，(7)式使得 f(以及 $g=f+h$)在 C 上不等于零．对于 f 是 C 内的亚纯函数的推广情形，参见习题 15.

儒歇定理的典型用途之一是将一个复杂解析函数 g 同零点已知的解析函数相比较，推出关于其零点位置的一些信息．

例 2 证明多项式

$$g(z)=z^5+3z+1$$

的全部5个零点都位于圆盘 $|z|<2$ 内.

证 选取 C 为圆周 $|z|=2$，并且把 g 作为函数 $f(z)=z^5$ 的一个扰动，$f(z)$ 在 C 内显然有5个零点. 为了验证条件(7)，我们在 C 上用

$$|h(z)|=|3z+1|\leqslant 3|z|+1=3\cdot 2+1=7$$

估计扰动 $h(z)=3z+1$，它确实严格小于 $|f(z)|=|z^5|=2^5=32$. 因此 g 在 $|z|<2$ 内也有5个零点. ■ [361]

例 3 证明方程

$$z+3+2e^z=0$$

在左半平面只有一个根.

证 因为儒歇定理涉及由周线所界定的区域，我们不能把它直接应用到诸如半平面这样的无界集. 可以这样考虑：选取图6-26中的 C_ρ，并把函数

$$g(z)=z+3+2e^z$$

看作

$$f(z)=z+3$$

的一个扰动，这个扰动在左半平面上只有一个零点. 于是对 C_ρ 上的 z 有

$$|h(z)|=|g(z)-f(z)|=|2e^z|=2e^{\mathrm{Re}z}\leqslant 2e^0=2,$$

其中 $f(z)$ 在 C_ρ 上是下有界的，即(见图6-26)

$$|f(z)|=|z+3|\geqslant\begin{cases}3, & z=\mathrm{i}y\text{ 时},\\ |z|-3=\rho-3, & |z|=\rho\text{ 时}.\end{cases}$$

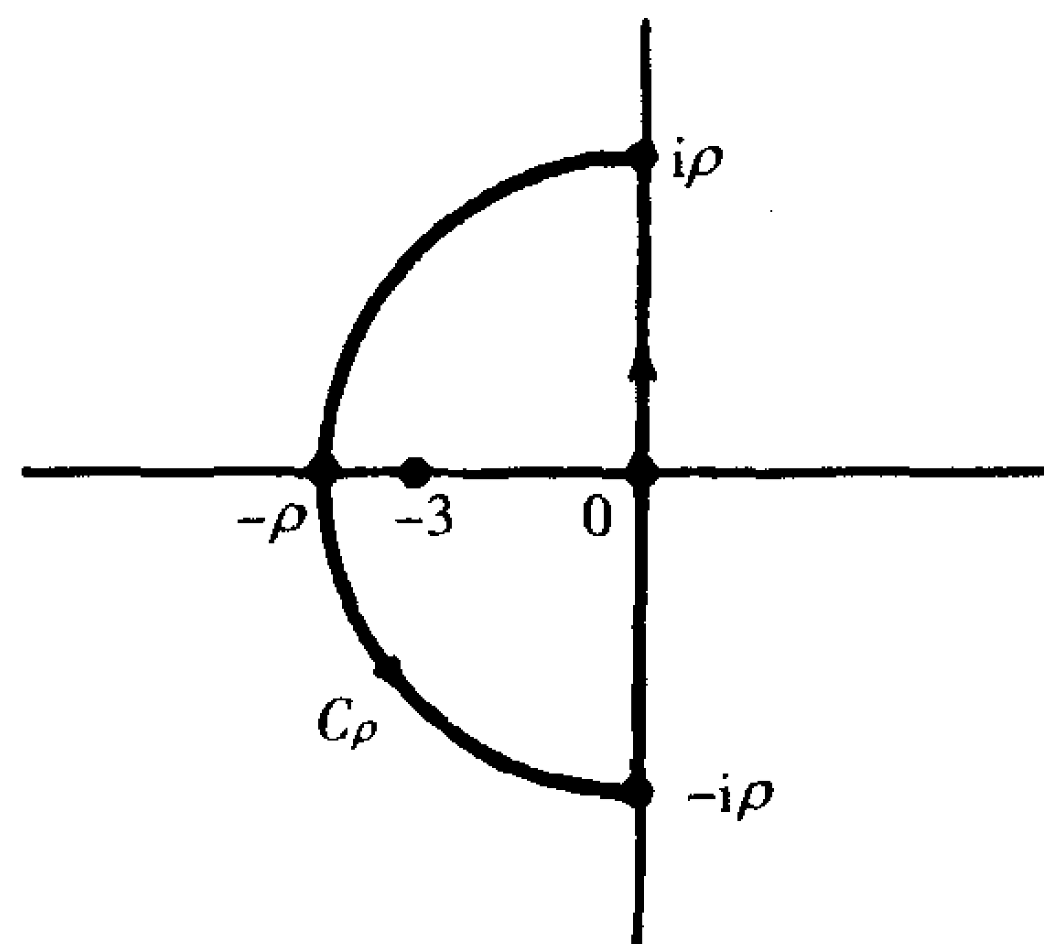


图6-26 例3中的周线

所以当 $\rho>5$ 时，对于 C_ρ 上的所有点 z，$|h(z)|<|f(z)|$. 这表明 g 在 C_ρ 内也只有一个(单)零点，所以在左半平面上也只有一个零点(令 $\rho\to\infty$). ■

儒歇定理也可用来证明代数学基本定理. [362]

例 4 证明任何 n 次多项式有 n 个零点.

证 将 n 次多项式

$$g(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

看作是以原点为 n 阶零点的函数

$$f(z)=a_nz^n$$

的扰动. 则它们的差

$$h(z)=g(z)-f(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

是一个至多 $n-1$ 次的多项式，所以不如 n 次多项式增长得快. 用更准确的话来说，在圆 C：$|z|=R$上有

$$|f(z)|=|a_n|R^n$$

和

$$|h(z)| \leq |a_{n-1}| R^{n-1} + \cdots + |a_1| R + |a_0|.$$

因此如果选取充分大的 $R(>1)$，使得

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|} + \frac{|a_0|}{|a_n|} < R,$$

则不等式 $|h(z)| < |f(z)|$ 在 C 上成立．所以，$g(z)$ 也有 n 个零点．■

假设 $f(z)$ 在点 z_0 的某一开邻域内解析，并且 $f(z_0)=0$，则由 5.6 节知，除非 f 恒为零，否则存在这个邻域内的以 z_0 为心的某个圆周 C，使得 f 在 C 上不取零值．设 σ 是 $|f(z)|$ 在 C 上关于 z 的最小值，并且用 $h(z)=-c$ 扰动 f，其中 c 是任意一个模小于 σ 的复数(由连续性推出 $\sigma>0$)．按照儒歇定理，$f(z)-c$ 在圆 C 内也有一个零点，所以 f 在圆 C 内的一个点上取值为 c.

换句话说，在 z_0 的这一邻域内，$w=f(z)$ 的值完全覆盖了 w 平面的开圆盘 $|w|<\sigma$. 因此 z_0 的每个开邻域的像都包含 $w_0=f(z_0)=0$ 的一个开邻域，除非 f 恒为零．

如果 $f(z_0)=w_0$ 不为零，对函数 $f(z_0)-w_0$ 可以进行同样的讨论并得到结论：除非 f 是常数，否则 z_0 的每个开邻域的像包含 $f(z_0)$ 的一个开邻域．这就是解析函数的开映射性质，我们叙述如下．

363

定理 5　如果 f 在区域 D 上解析并且不为常数，则其值域

$$f(D) := \{\omega \mid \omega = f(z), z \in D\}$$

是一个开集．

练习 6.7

1. 下列函数中有哪些是整个平面上的亚纯函数?

(a) $2z+z^3$　　(b) $\text{Log}z$　　(c) $\dfrac{\sin z}{z^3+1}$

(d) $e^{1/z}$　　(e) $\tan z$　　(f) $\dfrac{2i}{(z-3)^2}+\cos z$

2. 设 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，其中 $a_n\neq 0$. 解释为什么对充分大的 R,

$$\oint_{|z|=R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz = 2n\pi i.$$

3. 计算

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

其中 $f(z)=\dfrac{z^2(z-i)^3e^z}{3(z+2)^4(3z-18)^5}$.

4. 设 $f(z)$ 在闭圆盘 $|z|\leq\rho$ 上解析，并且对圆 $|z|=\rho$ 上所有的 z, $f(z)\neq w_0$. 解释为什么积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0}dz$$

的值等于 $f(z)=w_0$ 在圆盘内的解的个数．

5. 证明：如果 $f(z)$ 在简单闭周线 C 内和 C 上解析，并且在 C 上是一一的，则 $f(z)$ 在 C 内是一一的．[提示：考虑像曲线 $f(C)$.]

6. 用儒歇定理证明多项式 z^6+4z^2-1 在圆盘 $|z|<1$ 内恰好有两个零点．

7. 证明：方程 $z^3+9z+27=0$ 在圆盘 $|z|<2$ 内没有根.

8. 证明：方程 $z^6-5z^2+10=0$ 的所有根都在圆环 $1<|z|<2$ 内.

9. 求方程 $6z^4+z^3-2z^2+z-1=0$ 在圆盘 $|z|<1$ 内的根的个数.

10. 证明：方程 $z=2-e^{-z}$ 在右半平面恰好有一个根. 为什么这个根必须是实的?

11. 证明：多项式 $P(z)=z^4+2z^3+3z^2+z+2$ 在右半平面恰好有两个零点. [提示：记 $P(iy)=(y^2-2)(y^2-1)+iy(1-2y^2)$，并证明

$$\lim_{R\to\infty}\arg P(iy)\Big|_{-R}^{R}=0.]$$

364

12. 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析并且满足当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|<1$.

(a) 证明：方程 $f(z)=z$ 在 $|z|<1$ 内恰好有一个根(按重数计算). (这个根称为 f 的不动点，参见 2.7 节.)

(b) 证明：如果 $|z_0|\leqslant 1$，则由 $z_n=f(z_{n-1})(n=1,2,\cdots)$ 递推定义的序列 z_n 收敛于 f 的不动点. (参见 5.6 节习题 17.)

13. 举例证明：如果对 C 上的点 z，用不等式 $|h(z)|\leqslant|f(z)|$ 代替严格不等式 $|h(z)|<|f(z)|$，儒歇定理的结论可能不再成立.

14. 叙述并证明儒歇定理对亚纯函数 f 和 h 的推广，其结论为 $N_0(f)-N_p(f)=N_0(f+h)-N_p(f+h)$.

15. 证明：如果 f 在简单闭周线 C 上非零解析，并且在 C 内亚纯，h 在 C 上和 C 内解析并且在 C 上满足 $|h(z)|<|f(z)|$，则 f 和 $f+h$ 在 C 内具有相同的零点数(按重数计算).

16. 设 $\lambda>0$ 固定，$g(z)=\tan z-\lambda z$. 在关于热流和传输线理论的某些问题中，g 的零点是重要的. 通过完成下列各步，证明对于大的 n，$g(z)$ 在顶点为 $n\pi(1\pm i)$，$n\pi(-1\pm i)$ 的正方形 Γ_n 内恰好有 $2n+1$ 个零点.

(a) 证明

$$\tan(x+iy)=\left[\frac{\sin(2x)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}\right]+i\left[\frac{\sinh(2y)}{\cosh(2y)+\cos(2x)}\right].$$

(b) 证明：对所有大的整数 n，不等式 $|\tan z|\leqslant 2$ 在 Γ_n 的边界上成立. [提示：利用(a)部分的水平线段的公式.]

(c) 证明：对所有大的整数 n，不等式 $|g(z)+\lambda z|<\lambda|z|$ 在 Γ_n 的边界上成立.

(d) 证明：$g(z)$ 在 $\Gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 内恰好有 $2n$ 个极点.

(e) 从儒歇定理的一般形式(习题 14)推出：对大的整数 n，$g(z)$ 在 Γ_n 内恰好有 $2n+1$ 个零点.

17. 设 f 在区域 D 内解析，并且 $f(z)-f(z_0)$ 以 D 内的点 z_0 为 n 阶零点. 证明：对充分小的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对所有满足 $|w-f(z_0)|<\delta$ 的 w，方程 $f(z)-w=0$ 在 $|z-z_0|<\varepsilon$ 内恰好有 n 个根.

18. 应用开映射性质(定理 5)证明如下熟知的事实：如果 f 在区域 D 内解析，并且下列条件中任意一个成立，则 f 在区域 D 内恒为常数.

(a) $\operatorname{Re} f(z)$ 在 D 内恒为常数.

(b) $\operatorname{Im} f(z)$ 在 D 内恒为常数.

(c) $|f(z)|$ 在 D 内恒为常数.

365

19. 设 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 是圆盘 D：$|z|<R$ 内的解析函数序列，它在 D 的每个闭子集上一致收敛于解析函数 $f(z)$. 证明：如果在 $|z|=\delta(0<\delta<R)$ 上 $f(z)\neq 0$，则对每个充分大的 n，$f_n(z)$ 在 $|z|<\delta$ 内同 $f(z)$ 具有相同个数的零点.

20. 设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$，并设

$$P^*(z)=z^n\overline{P(1/\bar{z})}=\bar{a}_0z^n+\bar{a}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n.$$

证明：如果 $|a_0/a_n|>1$，则 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 内和多项式 $\bar{a}_0P(z)-a_nP^*(z)$ 具有相同的零点数. [提示：$|z|=1$ 时，$|P(z)|=|P^*(z)|$.]

21. 为了建立反馈控制系统的稳定性，一般必须确保形如 $F(z)=1+P(z)$ 的某类亚纯函数的所有零点都在左半

平面内．奈奎斯特稳定性判据过程如下：首先考虑如图 6-27 所示的周线 Γ_r，令 m 等于像周线 $P(\Gamma_r)$ 以逆时针方向绕点 $w_0=-1$ 的纯次数．令 n 等于 $P(z)$ 的具有正实部的极点个数．证明：如果对充分大的 r，m 等于 n，则 $F(z)$ 的所有零点都位于左半平面内(所以系统是稳定的)．[如果对于充分大的 r，$P(\Gamma_r)$ 经过点 $w_0=-1$，则 $F(z)$ 当然在虚轴上有一个零点；这时不能保证稳定性．]

22. Glicksberg 给出了儒歇定理的一个更强的形式(在这里假设较弱)．参考图 6-25 狗和人的情况，用 τ 表示从电线杆出发远离人的方向的射线，如图 6-28 所示．(显然当人沿路径 $f(C)$ 移动时，τ 会转动)．现在，如果把狗限制在射线 τ 的一侧或另一侧——从不让它越过——那么狗带不会缠到电线杆上，狗和人将围绕电线杆转同样的圈数．

366

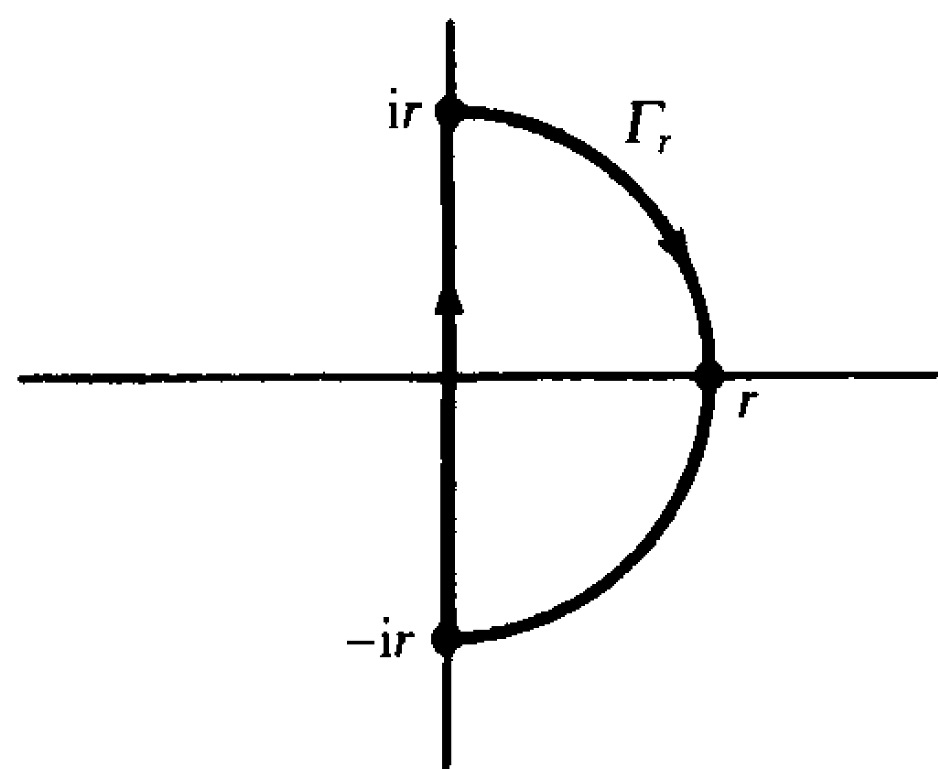


图 6-27　习题 21 的周线

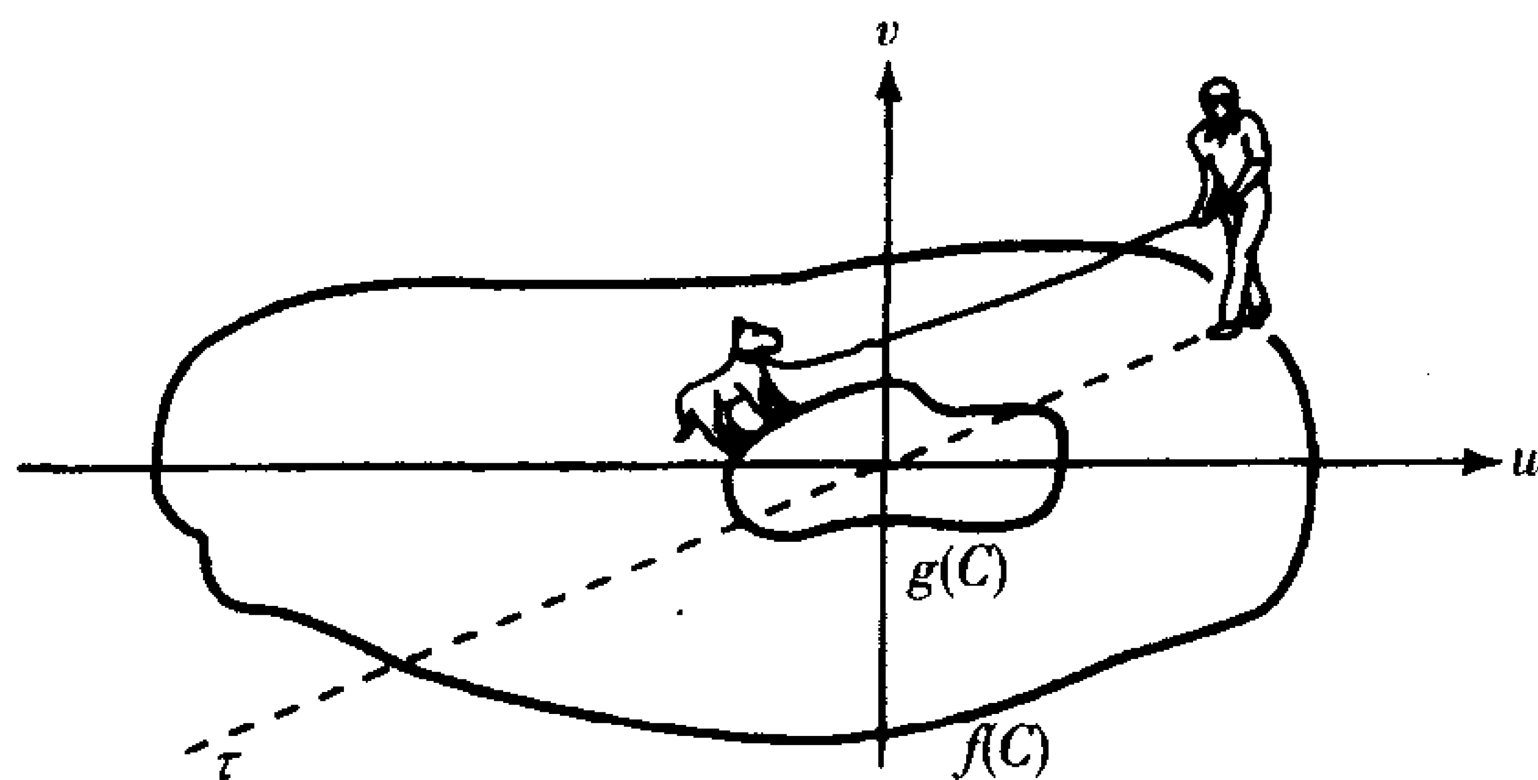


图 6-28　M. Glicksberg 和 Fritz

(a)应用前面的讨论，证明儒歇定理的条件(7)可以替换为

$$|h(z)|<|f(z)|+|f(z)+h(z)|. \tag{8}$$

[提示：不等式(8)是一个严格的三角不等式，它能保证点 $h(z)$，$f(z)$ 和 $f(z)+h(z)$ 不会不恰当地连成一线；见 1.3 节．]

(b)由(8)式蕴涵 $f/(f+h)$ 不取负值或零，从而应用推论 1 得

$$\int_C\left[\frac{f'}{f}-\frac{(f+h)'}{(f+h)}\right]dz=\int_C\left[\operatorname{Log}\frac{f}{f+h}\right]'dz=0.$$

小结

留数是计算周线积分的一个有效方法．函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 处的留数是 $f(z)$ 在点 z_0 的洛朗展开式中 $1/(z-z_0)$ 这一项的系数 a_{-1}．对于计算 $f(z)$ 在极点处的留数有简单的公式．当 $f(z)$ 的所有奇点都是孤立奇点时，它沿正向简单闭周线的积分等于 $2\pi i$ 乘以它在周线内各奇点处的留数之和．

可以用留数理论计算某些实变量函数的积分．例如，定义在 $[0,2\pi]$ 上含有 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的积分，通过下面的恒等变形

367

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\quad z=e^{i\theta},$$

可以表示成沿单位圆周的周线积分．另外，在无限区间，例如在实轴 $(-\infty,+\infty)$ 上的某类反常积分，可以通过构造包含一段实轴的辅助闭周线(例如半圆周或矩形)的方法来计算．在应用这种方法时，必须对周线进行选择，不仅它内部的留数和容易计算，而且周线的非实部分的积分的极限值是已知的．关于这类问题，一些特殊的结果(例如若尔当引理)非常有效．

当原始积分区间上有奇点时，必须适当调整这些周线，让它绕过原来积分区间上的奇异点．若复被积函数是多值的，必须沿分支割线积分．为此割线被认为是有两个不同的沿，被积函数在每一沿的定义不同．

当 $f(z)$ 的奇点都是极点时，$f(z)$ 沿简单闭周线的辐角的变化同它在周线内零点和极点的个数的差有关．由这个事实可推出儒歇定理，它提供了计算解析函数在某一区域内的零点个数的比较方法．

参考文献

留数计算

[1] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*, 2nd ed. Springer-Verlag Inc., New York, 1978.

[2] Copson, E. T. *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. Oxford University Press, Inc., New York, 1962.

[3] Eves, H. W. *Functions of a Complex Variable*, Vol. 2. Prindle, Weber & Schmidt, Inc., Boston, 1966.

[4] Henrici, P. *Applied and Computational Analysis*, Vol. 1. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

特殊函数

[5] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1974.

稳定性和控制

[6] Dorf, R. C. *Modern Control Systems*, 9th ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, 2000.

儒歇定理

[7] Glicksberg, I. "A Remark on Rouché's Theorem," *Amer. Math. Mon.* 83 (1976), 186–187.

368

第7章　共形映射

前面讨论了解析函数 $f(z)$ 的代数性质，本章我们将从另一个角度来研究它：把 f 当作从其定义域到其值域的映射，进而研究它的几何性质. 在应用上，通过一个解析函数把一个区域映到另一个区域是非常重要的，这一点我们将在7.1节看到.

7.1　拉普拉斯方程的不变性

由解析函数产生的映射(即解析映射)有许多非常重要的性质，拉普拉斯方程的不变性就是其中之一. 粗略地说，若 $\phi(x, y)$ 是 xy 平面上某一区域 D 内的调和函数，即 ϕ 在 D 内满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,$$

若

$$w=f(z) \tag{1}$$

是一个解析函数，它把 D 映到 uv 平面上的区域 D'，那么通过这个映射能把 ϕ"转化"成 D'内的调和函数.

为了准确地表达这一事实，我们需要稍微详细地阐述一下该映射的性质. 首先，假设映射 f 使得 D 中的点和 D'中的点是一一对应的[⊖]，这就意味着 $f(z_1)=f(z_2)$ 当且仅当 $z_1=z_2$. 其次，再假设导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 在 D 内不为零. 实际上，后者是前一假设的一个推论，这里我们就不证明了.

既然该映射是一一对应的，那么它就有逆映射，即 D'内的每一个点 w 对应于 D 中的一点 z，也就是 z 是 w 在 f 下的原像. 我们可把这个关系，即 $w=f(z)$ 的逆映射写作

369

$$z=f^{-1}(w). \tag{2}$$

图7-1描绘了 f 与 f^{-1}的关系. 可以看出 f^{-1}是一个单值函数(因为只有一个 z 被映到唯一的 w) 事实上，读者不难发现 f^{-1}是解析函数且它的导数由

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}w}(w)=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)}\quad[\text{其中 } w=f(z)] \tag{3}$$

给出. 这个式子也可写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}}, \tag{4}$$

我们应牢记这个函数关系. 在前面(3.3节)我们已经证明了公式(3)的一个特殊情况，即函数 $w=\mathrm{e}^z$ 和它的反函数 $z=\mathrm{Log}w$，其中 D 是带形域 $|\mathrm{Im}z|<\pi$，D'是整个平面沿着负实轴割开的区域.

有时，为了应用上的方便，把映射(1)和(2)写成实函数的形式. 这时(1)式变成

⊖ 这样的映射有时也称为是单价的或单叶的.

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y), \tag{5}$$

它的逆映射(2)式变成

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v). \tag{6}$$

现在我们讨论前面提到的拉普拉斯方程的不变性. 如果$\phi(x, y)$是定义在D上的函数，那么通过D到D'上的一一映射，ϕ可转化为D'上的函数，也就是说，可以定义函数$\psi(u, v)$为

370

$$\psi(u,v) := \phi(x(u,v), y(u,v)),$$

或者它的等价形式

$$\psi(w) := \phi(f^{-1}(w)),$$

它与$\phi(x, y)$在对应的点上的值相等. 下面需要证明的是：若ϕ是D内的调和函数，则ψ是D'内的调和函数.

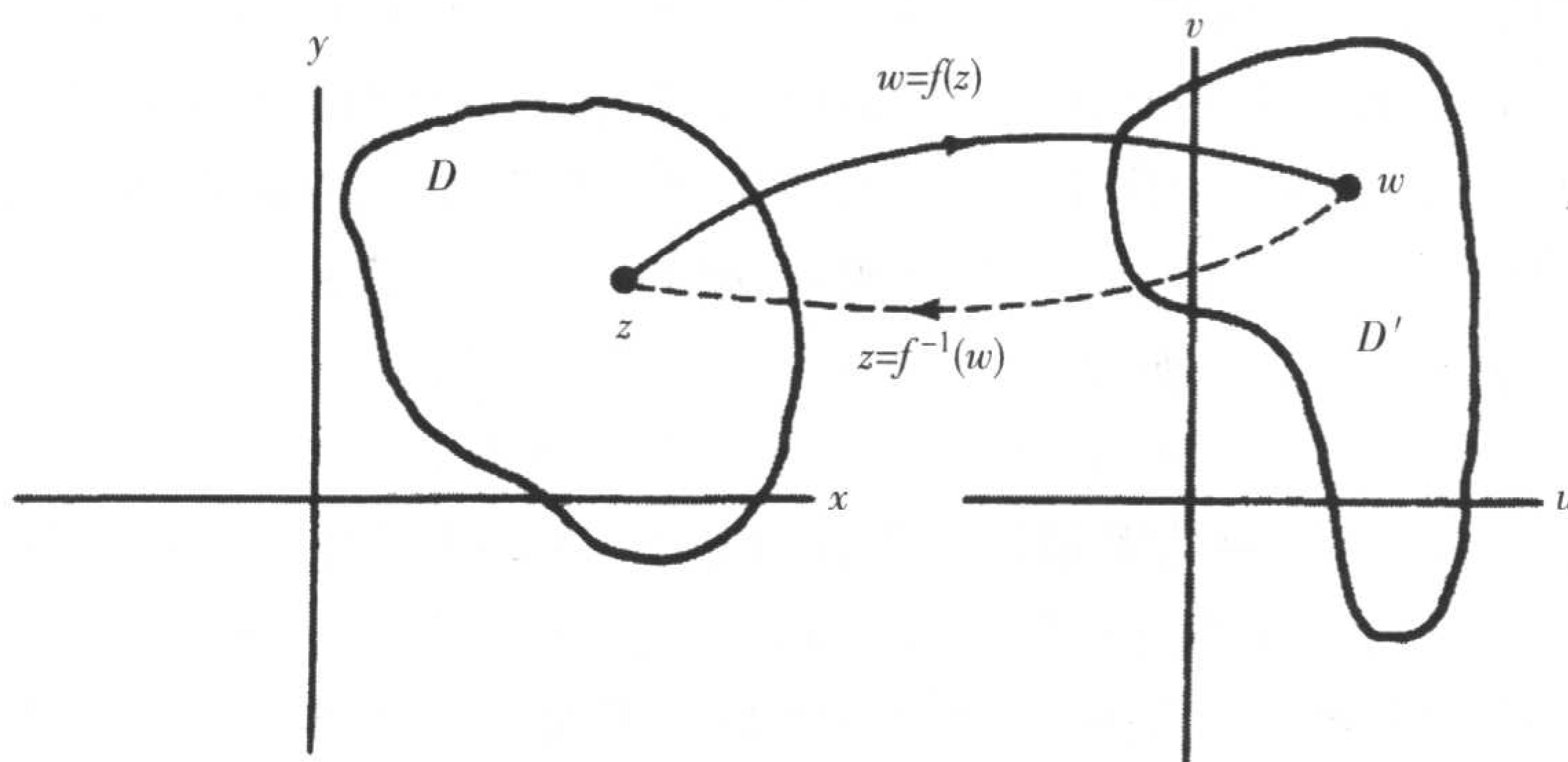


图 7-1 逆映射

这个证明很容易. 考虑D'内的任意点w_0，不妨设$w_0 = f(z_0)$，由于D是一个开集，所以存在以z_0为圆心完全含于D内的开圆盘$\mathcal{N}$. 由于$f^{-1}(w)$是一个解析函数，从而连续，因此必定存在w_0的一个充分小的邻域$\mathcal{N}'$，它在$f^{-1}(\mathcal{N}')$下的像完全包含在$\mathcal{N}$内(如图 7-2 所示). 在 2.5 节中我们证明了在"足够好"的区域内，任意一个调和函数都可看作是一个解析函数的实

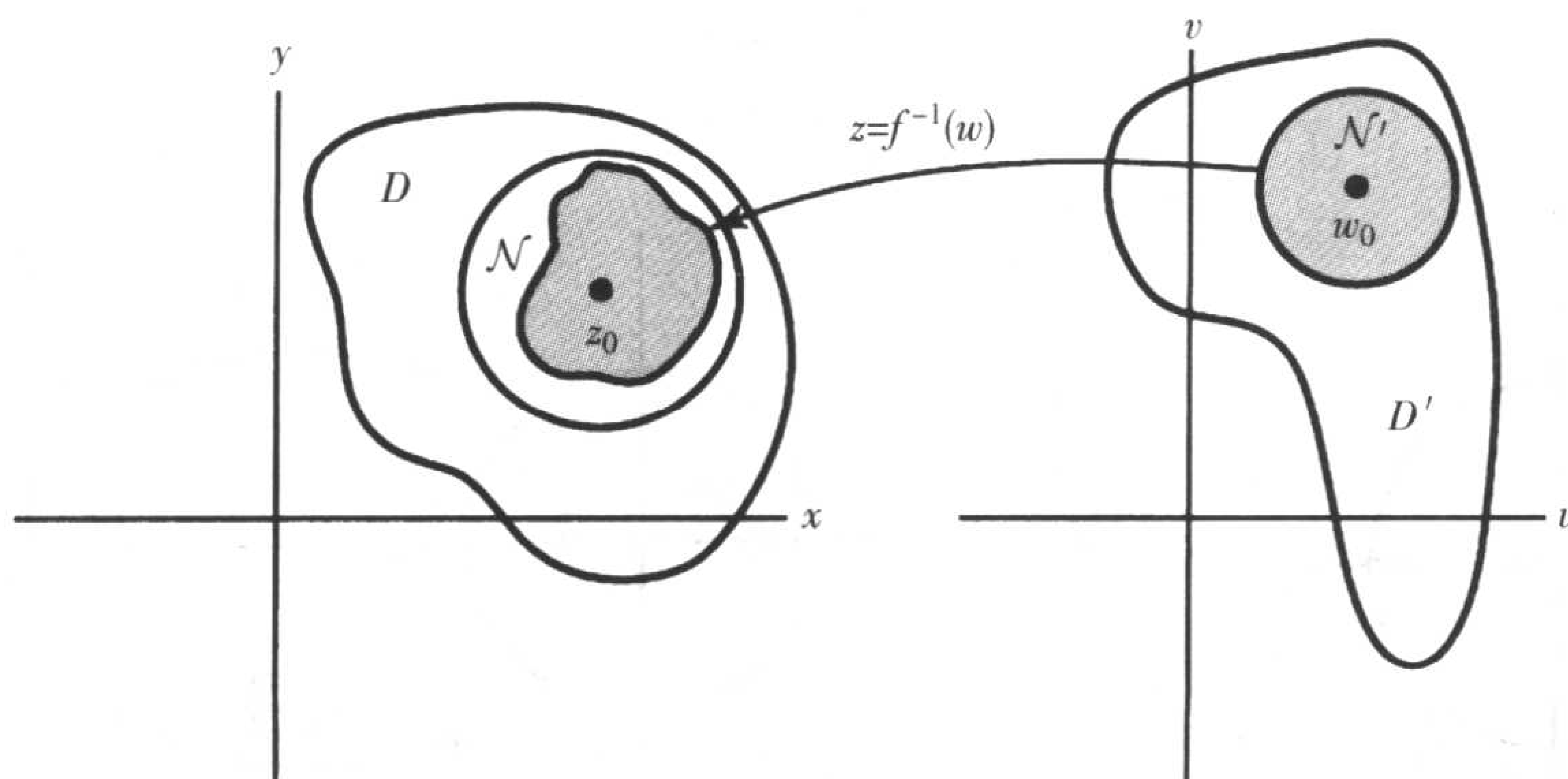


图 7-2 邻域间的映射

部，特别地，对于圆盘，这是成立的，从而 $\psi(u, v)$ 在邻域 $\mathcal{N}'$ 内是调和的. 因此，$\phi(x, y)$ 是一个在 $\mathcal{N}$ 上的解析函数 $g(z)$ 的实部，而 $\psi(u, v)$ 就是 $\mathcal{N}'$ 上复合函数 $g(f^{-1}(\omega))$ 的实部. 由于解析函数的复合函数仍是解析的，所以 ψ 必是 w_0 的邻域 $\mathcal{N}'$ 内的调和函数. 由于 w_0 是 D' 内的任意点，可知函数 ψ 必是 D' 内的调和函数.

另一个证明方法是应用柯西-黎曼方程，在 w 平面上直接验证 $\psi(u, v)$ 满足拉普拉斯方程（见习题 2).

下面我们会看到上述结果在实际应用中之所以有用的原因. 例如在狄利克雷问题中，要求我们在一个区域内找到一个调和函数，且在边界上取一些特定的值（见 4.7 节). 事实上，一旦我们在某一个特殊区域内解决了这个问题，那么在所有区域上也就都有了答案. 这是因为可以通过一个一一对应的解析函数把其他区域映射到该特殊区域，且对应的边界上的函数值之间对应. 通常，使狄利克雷问题简单化的区域有：环状域，角形域，或壁形域(3.4 节中的方法就是在这些区域上运用的)，或圆盘，或上半平面（由 4.7 节可知，我们可在这些区域上运用泊松积分公式).

371

事实上，下面的例子可以利用泊松积分公式解决，但映射的方法应用起来更加方便.

例 1 在单位圆盘 $|z|<1$ 内求一个调和函数 $\phi(x, y)$，且满足边界条件：

$$\phi(x,y) \to +1 \qquad \text{上半圆周上}$$
$$\phi(x,y) \to -1 \qquad \text{下半圆周上}$$

（见图 7-3). (这个函数描述的是无限长的直圆柱体内温度的变化，它的外壁由于温度的不同被分成不同的部分. 当然，在不连续的点 $z= \pm 1$ 上放有绝热体，且 $z= \pm 1$ 处的温度不确定.)

解 通过一个映射把该圆盘映到角度为 180°的角形域——右半平面，就能把这个看上去复杂的问题简单化. 在 7.3 节中我们将介绍如何构造这种映射，这里只是简单说明这种方法的作用. 所以，无需证明函数

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{7}$$

把单位圆周映到虚轴，把圆周内部映到右半平面（圆周外部映到左半平面). 对应关系如图 7-4 所示. 显然由(7)式，当 $z \to 1$ 时 $|w| \to \infty$，当 $z=-1$ 时 $w=0$，而且，映射(7)是一一对应的. 事实上，从(7)式反解出 z 容易得到其逆映射：

$$z = \frac{w-1}{w+1}. \tag{8}$$

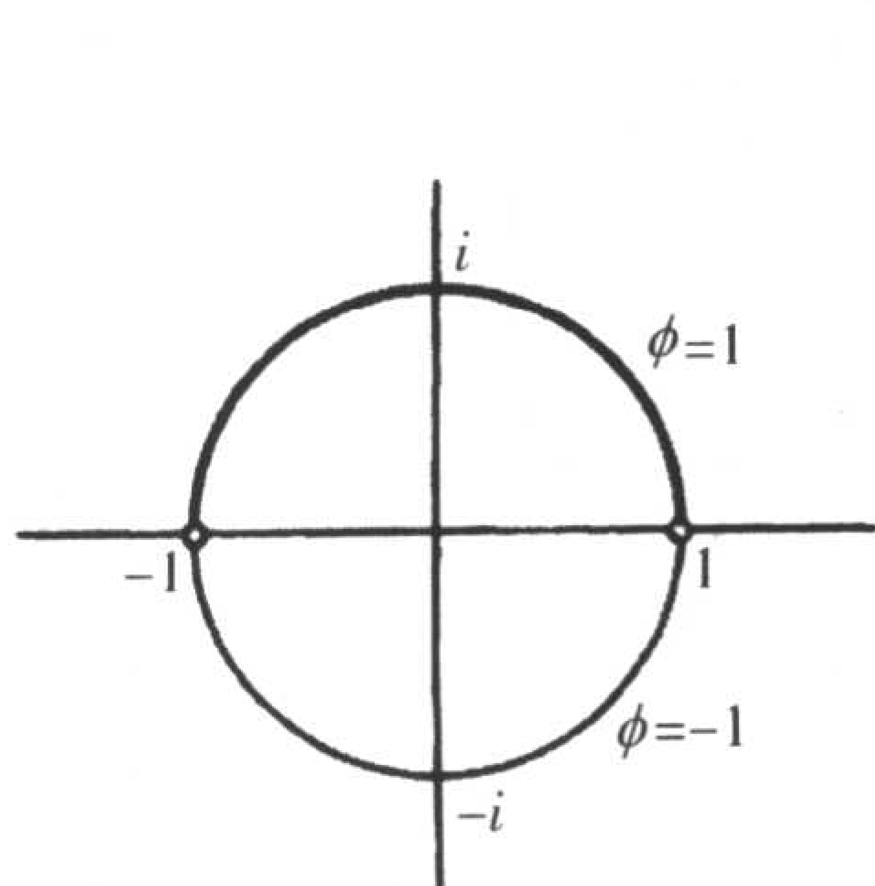


图 7-3 例 1 的狄利克雷问题

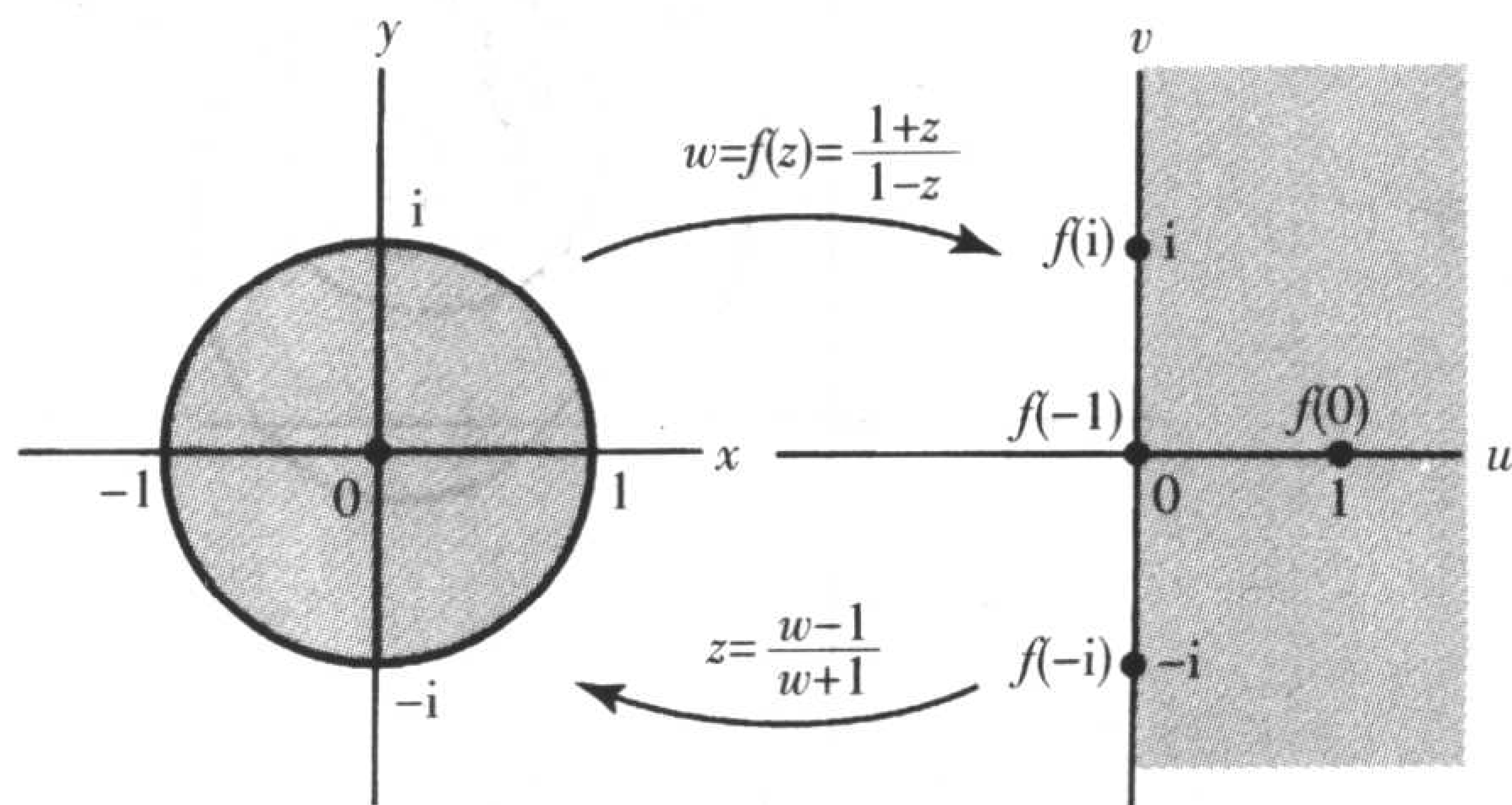


图 7-4 例 1 中的映射

372

(7)和(8)这对函数在微波工程学上常用来构造史密斯图(冶工图)，我们将在练习7.3中讨论它. 图7-5来自 Frederick 和 Schwartz 的论文"Conformal Image Warping"(见参考文献[9])，它给出了这个映射的一个令人吃惊的描述.

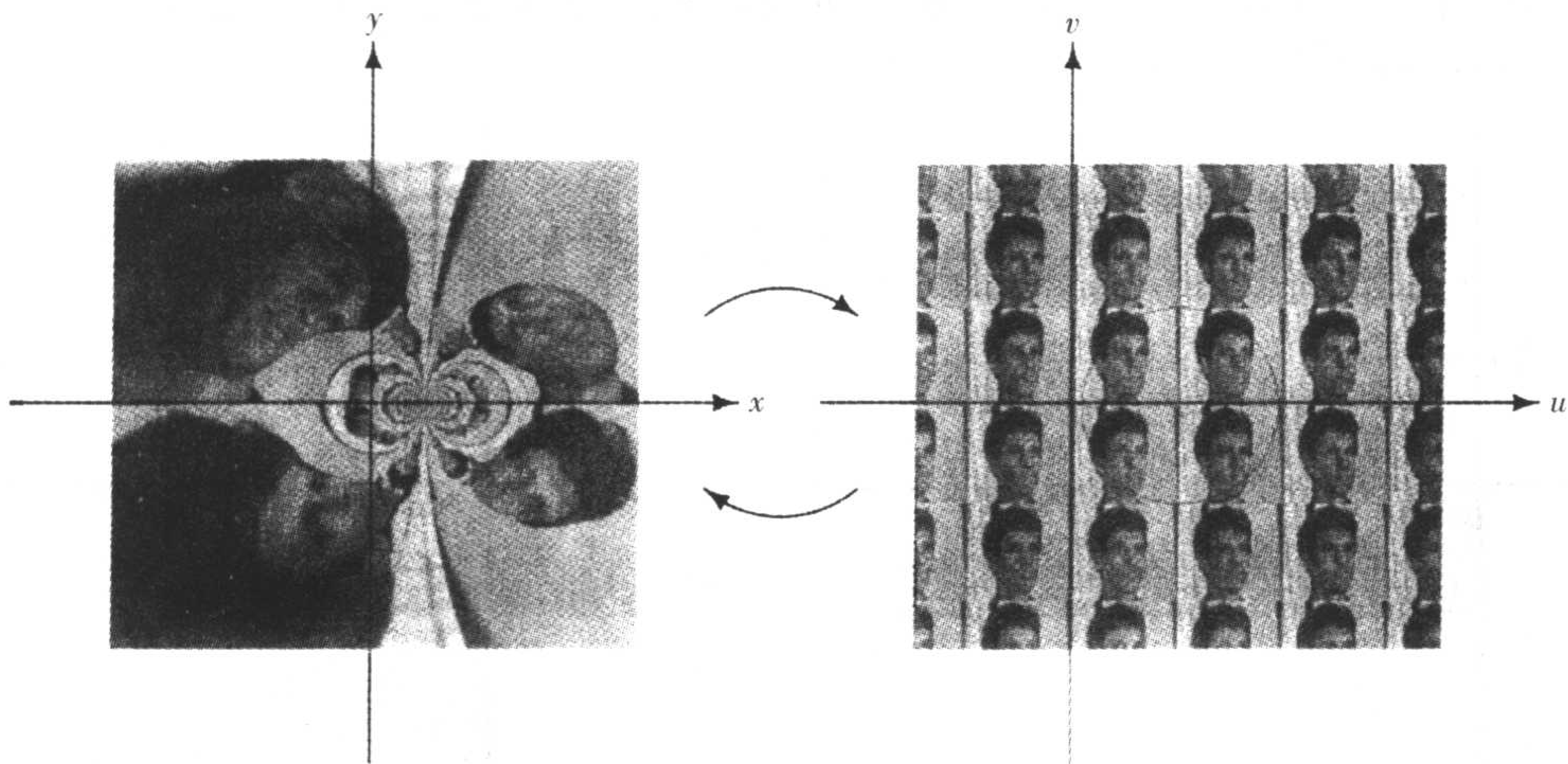


图7-5 映射(7)和(8)之间的对应(来自 Frederick 和 Schwartz 的论文"Conformal Image Warping")

注意到，映射(7)把未知函数 ϕ 取值为1的上半圆周映成了正虚轴，同时把 ϕ 取值为 -1 的下半圆周映成了负虚轴. 因此，利用3.4节中的办法，在 w 平面内可得到满足上述条件的调和函数

$$\psi(u,v) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}(w).$$

通过映射(7)，由 ψ 可得到所求的调和函数

$$\phi(x,y) = \psi(u(x,y),v(x,y)) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}(f(z)) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

将其写成代数形式

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{2y}{1-x^2-y^2},$$

其中反正切函数的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 注意到 $\phi(x, 0)=0$，这是由 $\phi(x, y)$ 的对称性可以预料到的结果. ■

以这个例子为契机，下面几节中我们专门进行解析函数映射的讨论. 本章的最后两节再回过头来讲它的应用，进一步说明在处理许多不同问题时该方法的功效. 为方便读者，我们在附录Ⅱ中列出了比较有用的一些映射.

前言中所提到的 MATLAB 工具箱是一个非常好的工具，它能使本章所研究的绝大部分映射形象化(即可把定义域与值域的图像做出来).

练习 7.1

1. 证明函数 $w=e^z$ 把半带形区域 $x>0$，$-\pi/2<y<\pi/2$ 映到 w 平面的右半平面上单位圆 $|w|=1$ 以外的区域（如图 7-6 所示）. 调和函数 $\phi(z)=x+y$ 通过该映射后作为 w 平面上的调和函数 $\psi(w)$ 是什么？若已知 $\psi(w)=u+v$，那么调和函数 $\phi(z)$ 又是什么呢？

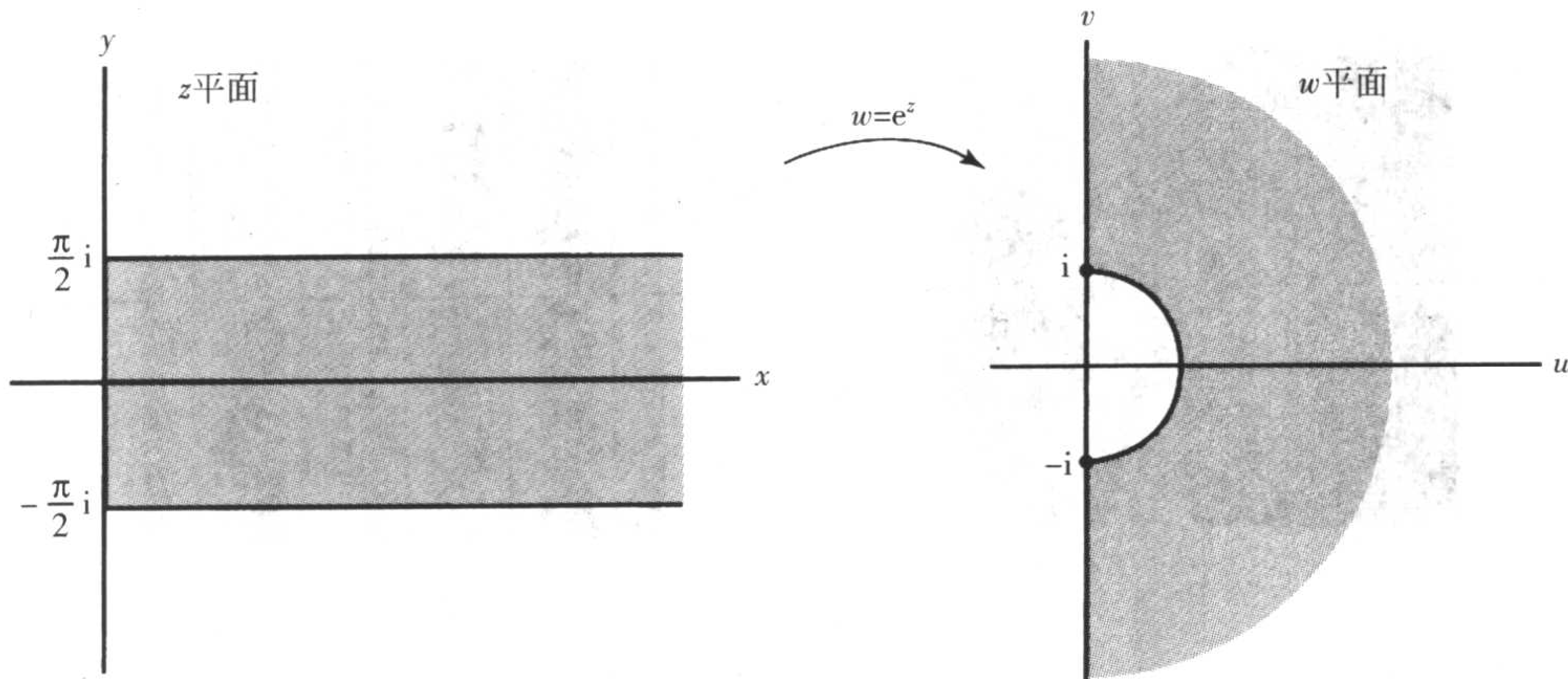


图 7-6 半带形区域上的指数函数的映射

2. 设等式(5)和等式(6)给出的是一一对应的解析映射，$\phi(x,y)$是二阶实值连续可微函数，它被作用后转化为 w 平面上的函数

$$\psi(u,v):=\phi(x(u,v),y(u,v)).$$

373 ~ 374

(a) $\phi(x,y)$的梯度是向量$(\partial\phi/\partial x,\partial\phi/\partial y)$，它和复数$\partial\phi/\partial x+\mathrm{i}(\partial\phi/\partial y)$相对应（见 1.3 节），同样，$\psi(u,v)$的梯度对应于$\partial\psi/\partial u+\mathrm{i}(\partial\psi/\partial v)$，用链式法则和柯西–黎曼方程证明它们的梯度具有以下关系：

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\overline{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)}.$$

(b) 证明：$\psi(u,v)$和$\phi(x,y)$的拉普拉斯算子有以下关系：

$$\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right\}=\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right\}\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|^2.$$

(c) 证明：若 $\phi(x,y)$在 z 平面上满足拉普拉斯方程，则 $\psi(u,v)$在 w 平面上也满足拉普拉斯方程.

(d) 证明：若 $\phi(x,y)$在 z 平面上满足亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\Lambda\phi$$

（Λ 是常数），那么在 z 平面上 $\psi(u,v)$满足

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=\Lambda\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|^2\psi$$

（亥姆霍兹方程产生于瞬时热量分析学）.

3. 在上半平面上求一个调和函数 ϕ，使它在边界上的取值如图 7-7 所示. [提示：参看 3.4 节.]

4. 考虑这样的问题：能否在右半平面上求一个调和函数 ϕ，使得它在虚轴上的取值为 $\phi(0,y)=y/(1+y^2)$. 通过观察，我们首先猜想到函数

375

$$\phi(z)=\mathrm{Im}\,\frac{z}{1-z^2},$$

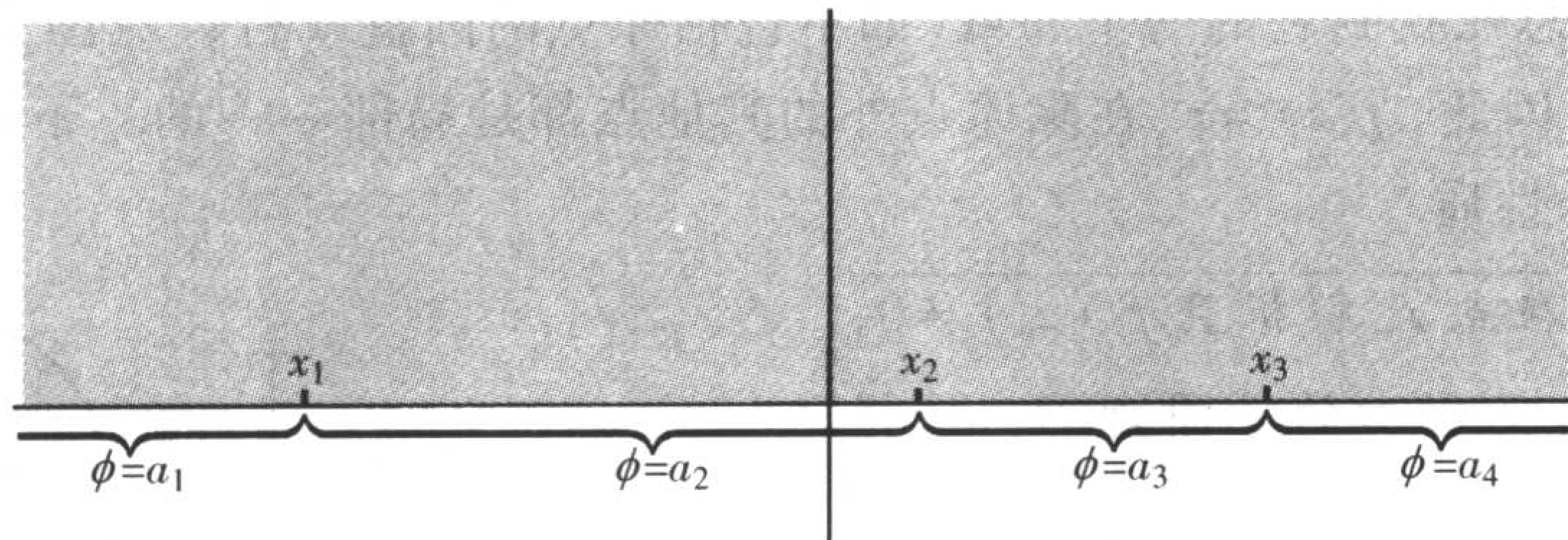


图 7-7　第 3 题中的狄利克雷问题

因为 $z/(1-z^2)$ 在 $z=1$ 处不解析，从而它不合题意．不过可以利用下面的方法．

(a)按照课文所述，映射(7)和(8)给出了右半平面和单位圆盘之间的一个对应关系(当然，在这个公式中应互换 z 和 w 的位置)．因此可把 $\phi(z)$ 转化成 w 平面上的单位圆盘内的调和函数 $\psi(w)$．证明：$\psi(w)$ 在单位圆周 $w=e^{i\theta}$ 上的值必由下式给出：

$$\psi(e^{i\theta}) = \frac{\sin\theta}{2}.$$

(b)证明：单位圆盘内的调和函数 $\psi(w)$ 一定是

$$\psi(w) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}w.$$

(c)证明：通过映射的作用把 $\psi(w)$ 转化为 z 平面上的函数，即可得到原问题的解

$$\phi(z) = \frac{y}{y^2+(x+1)^2}.$$

5. 利用习题 4 的方法在右半平面上求一个调和函数 ϕ，使得 $\phi(0, y)=1/(y^2+1)$．

6. 设 $\phi(x, y)$ 是区域 D 内的调和函数，$w=f(z)$ 是区域 D 到区域 D' 的一一对应的解析映射，由此，可把 $\phi(x, y)$ 转化为 D' 的调和函数 $\psi(u, v)$．证明：若 $\phi(x, y)$ 在 D 内一条曲线 Γ 上的法向导数 $\partial\phi/\partial n=0$，那么在 f 的映射下，Γ 的像曲线上的法向导数 $\partial\psi/\partial n$ 也是零(边界条件 $\partial\phi/\partial n=0$ 称为诺伊曼(Neumann)条件)．[提示：$\partial\phi/\partial n$ 是梯度 $(\partial\phi/\partial x)+i(\partial\phi/\partial y)$ 在法线上的射影，且梯度与阶层曲线 $\phi(x, y)=$ 常数正交．]

376

7. 设 $f(z)$ 是一对一的解析函数，那么，由课文可推测出 f^{-1} 也是解析函数．若 x, y, u, v 如(5)和(6)式所示，那么解释下面等式

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

7.2　几何性质

显然，研究解析映射的几何性质要分两类来讨论：*局部性质*和*整体性质*．局部性质只需在充分小的邻域内适用，而整体性质应在整个区域上都成立．例如，函数 e^z 在任意一个直径小于 2π 的圆盘内都是一一的，因此也是局部一一的．但是，当 $z_1-z_2=2\pi i$ 时，$e^{z_1}=e^{z_2}$，因此它就不是整体上的一一的函数．另外，有时局部性质可以被扩展为整体性质．实际上，这就是解析延拓的本质(见 5.8 节)．

我们先从"一一"的映射开始局部性质的研究．正如例子 e^z 所示，一个函数可能是局部一一的，但整体却不然(当然，相反的情况是不可能的)．另外，一个解析函数可能在某些点是局部一一的，而在另外一些点却不是．如函数 $f(z)=z^2$ 在任何一个包含原点的开集内总存在不同的点 z_1 和 z_2，使得 $z_2=-z_1$，因为 $z_2^2=z_1^2$，所以函数 f 不是一一的．不过，在除去原点外的

任何一个点，我们总能找到它的一个邻域（如不包括原点的圆盘就行，见图 7-8），使得在该邻域内 z^2 是一一的. 因此，$f(z)=z^2$ 在除原点外的其他点都是局部一一的. 下面的定理解释了该例子在 $z=0$ 的例外性质.

377

定理 1 若 f 在点 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$，那么存在一个以 z_0 为圆心的开圆盘 D，使得 f 在 D 内是一一的.

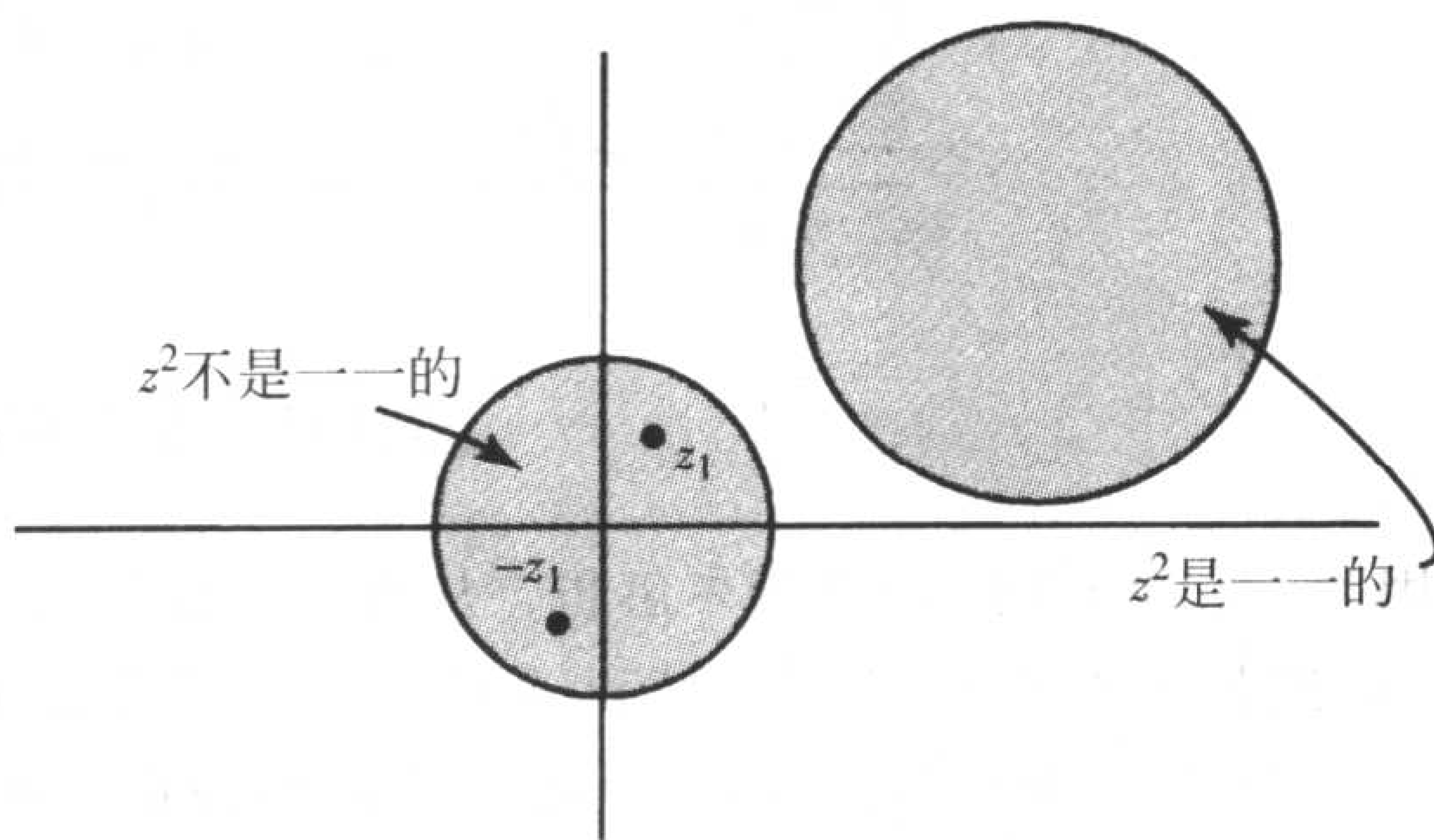


图 7-8 局部一一映射

证 由于 f' 也在 z_0 点解析且 $|f'(z_0)|>0$，所以存在一个以 z_0 为圆心的开圆盘 D，使得对于 D 中的所有点 z 有 $|f'(z)-f'(z_0)|\leqslant|f'(z_0)|/2$. 事实上，对任意的 z_1，$z_2\in D$，如果证明了 $|f(z_1)-f(z_2)|\geqslant|z_1-z_2|\cdot|f'(z_0)/2|$，则在 D 内就是一一的.

设 Γ 为连结 z_1，z_2 的线段，那么我们有

$$
\begin{aligned}
|f(z_1)-f(z_2)| &= \left|\int_\Gamma f'(z)\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_\Gamma f'(z_0)\,\mathrm{d}z-\int_\Gamma[f'(z_0)-f'(z)]\,\mathrm{d}z\right| \\
&\geqslant |f'(z_0)(z_2-z_1)|-\left|\frac{f'(z_0)}{2}\right||z_2-z_1| \\
&= \left|\frac{f'(z_0)}{2}\right||z_2-z_1|.
\end{aligned}
$$

■

定理 1 告诉我们，解析函数在它的导数不为零的点是局部一一的. 较深的教材将有更一般的结果：若 z_0 是 f' 的 m 阶零点，那么在 z_0 的某去心邻域内 f 是"$m+1$ 对 1"的，换句话说，f 的每个函数值都被取了 $m+1$ 次. 对于函数 $f(z)=z^2$，$z=0$ 是 f' 的一阶零点，它在原点的任意一个去心邻域内都是 2 对 1 的.

我们要讨论的下一个局部性质是共形性. 考虑下面的情形：$f(z)$ 在 z_0 点的一个邻域内解析且是一一的，γ_1 和 γ_2 是该邻域内两条在 z_0 点相交的有向光滑曲线，它们在映射 f 下的像为在 $w_0=f(z_0)$ 相交的两条有向光滑曲线 γ_1' 和 γ_2'. 设向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别与 γ_1 和 γ_2 在点 z_0 相切，且它们的方向分别与曲线的方向一致（见图 7-9）. 曲线 γ_1 和 γ_2 的夹角定义为 $\boldsymbol{v}_1$ 按逆时针方向旋转到与 $\boldsymbol{v}_2$ 方向一致时的旋转角 θ，同样可定义 γ_1' 到 γ_2' 的夹角 θ'.

如果对每一对在 z_0 相交的有向光滑曲线在映射 f 下它们之间的夹角保持不变，即 $\theta=\theta'$，那么就称 f 在 z_0 点是共形的. 对于解析映射我们有下面的定理.

定理 2 解析函数在导数不为零的点处是共形的.

378

证 设 f 为一解析函数，且它在 z_0 处的导数不为零. 由定理 1 可知存在一个包含 z_0 的开圆盘，f 在这个圆盘上是一一的. 下面我们证明：每一条过 z_0 的有向光滑曲线（在 z_0 处）的切线在

映射 $w=f(z)$ 的作用下都旋转相同的角度. 从而可得，在映射 f 下，任何两条在 z_0 相交的曲线之间的夹角将保持不变.

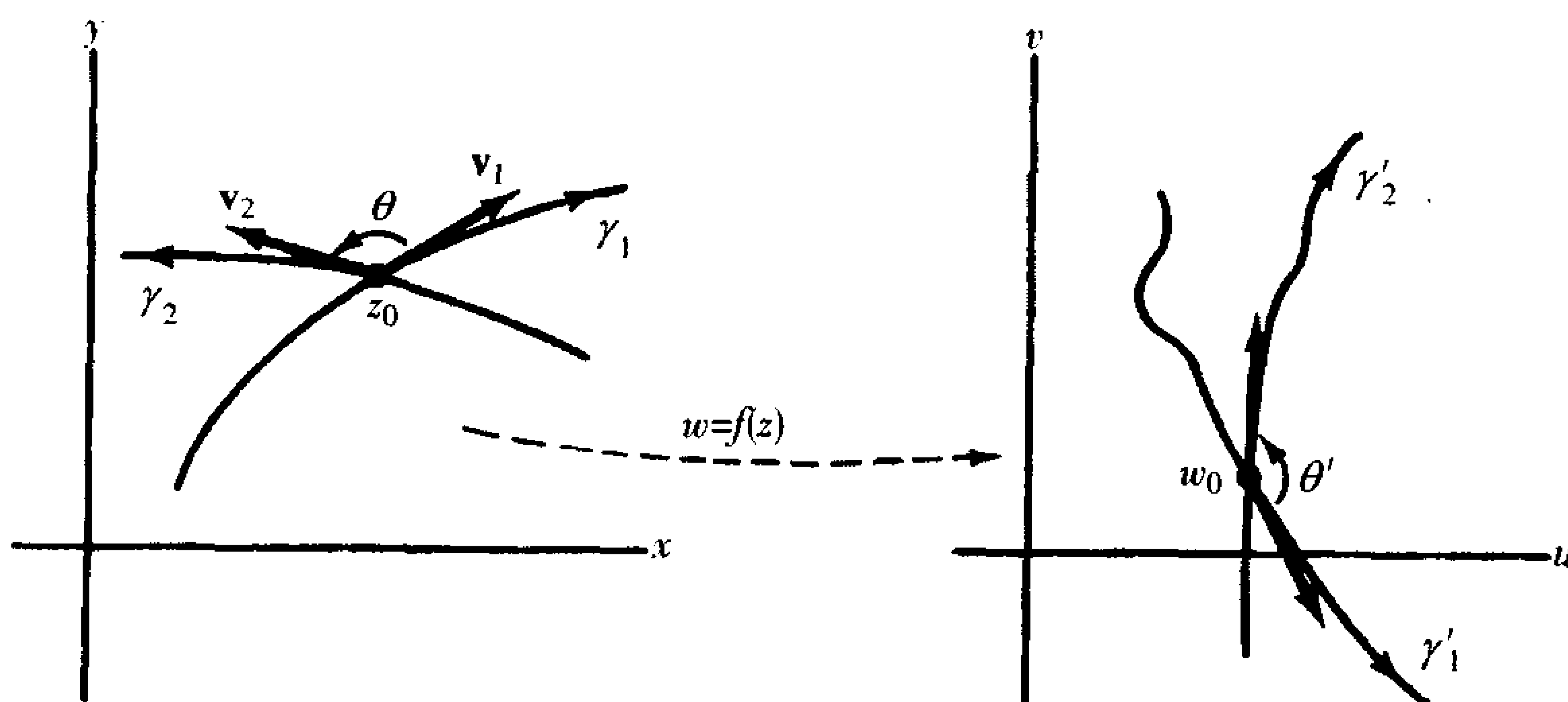


图 7-9 共形性

由此，设 γ 是任意一条过 z_0 的有向光滑曲线，不妨设它的参数方程为 $z=z(t)$，且 $z(t_0)=z_0$. 向量 $z'(t_0)$ 在 z_0 点与 γ 相切，在映射 $w=f(z)$ 下 γ 的像曲线 γ' 的参数方程为

$$w=w(t)=f(z(t)),$$

且

$$w_0:=f(z_0)=f(z(t_0)),$$

向量 $w'(t_0)$(若它不为零)在点 w_0 与 γ' 相切. 由链式法则得

$$w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0), \tag{1}$$

因为 $f'(z_0)\neq 0$，所以 $w'(t_0)$ 不为零. 而且，由(1)式可知切向量 $z'(t_0)$，$w'(t_0)$ 的水平倾斜角有以下关系：

$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0).$$

从而，每条过 z_0 的曲线都旋转了同样的角度 $\arg f'(z_0)$. 显然，$\arg f'(z_0)$ 是一个不依赖于曲线 γ 的常数. ■

定理 2 中导数不为零这一条件是极其重要的. 例如，对于函数 $f(z)=z^2$，$f'(0)=0$，在原点就不保角——它是原来角度的两倍. 然而，通常总把任何由非常值的解析函数生成的映射称为“共形映射”，却忽略了在导数为零的点是不成立的. (顺便说一句，我们将在 7.5 节中考虑这些例外的点，它们也是相当重要的.)

现在我们研究共形映射的整体性质. 首先来看既是局部又是整体的性质：*开映射性*. 一个函数称为是*开映射*，若每个开集的像是它(即像)本身所在区域内的开集，也就是说，这个函数把开集映到开集. 对于解析函数我们有下面的定理.

379

定理 3 *区域上任何非常值的解析函数是开映射.*

这个定理已在 6.7 节中证明了，该定理说明不可能出现诸如非常值的解析映射把一个圆盘映到一个线段的情形.

研究共形映射时，利用*连通性*这一概念非常有用. 例如，我们可以证明任意一个非常值的

解析函数把区域(即连通的开集)映到区域. 定理 3 说明了它把开集映为开集，下面证明它的保连通性. 设 f 把区域 D 映到开集 $\mathcal{O}$，我们只需证明 $\mathcal{O}$ 也是连通的就可以了. 对 $\mathcal{O}$ 中任意两点 $w_1 = f(z_1)$ 和 $w_2 = f(z_2)$，为了用含于 $\mathcal{O}$ 内的一条折线段把它们连结起来，首先，在 D 内连结 z_1 和 z_2，那么，这条路径的像是 $\mathcal{O}$ 内连结 w_1 和 w_2 的一条路径. 当然，这条像路径可能不是折线，但由拓扑知识可知，开集内的这样一条路径可形变为一条含于开集内的折线. 因此，$\mathcal{O}$ 也是连通的(见图 7-10).

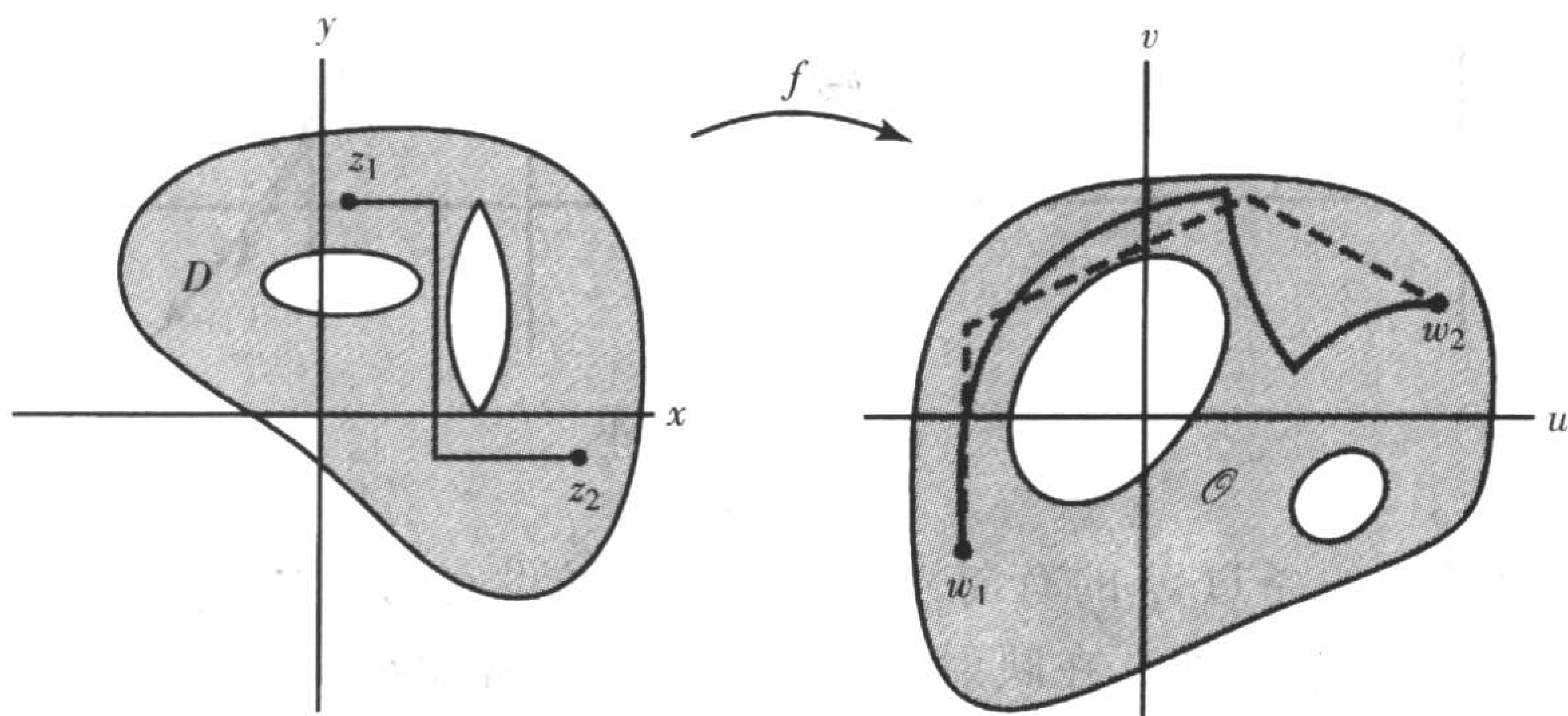


图 7-10 共形映射保持连通性

本节最后给出涉及解析函数整体性理论的黎曼映射定理. 因为它主要是存在性定理，所以在应用数学上它的应用是有限的.

380

定理 4(黎曼映射定理) 设 D 是平面上的任何一个异于整个平面的单连通区域，那么存在一个一一的解析函数把 D 映到单位开圆盘. 而且，可把 D 内任意指定的一点映为原点，把过该点的一个方向映成与正实轴相同的方向. 在这一限制条件下该映射是唯一的.

我们不妨把过点 z_0 的方向设为角度 ϕ，如图 7-11 所示. 由黎曼映射定理可以指定 z_0 和 ϕ，从而可以把过 z_0 的且在该点的切线方向都是 ϕ 的这些曲线映到过原点且在原点的切线方向与正实轴方向相同的曲线. 由此在确定映射时出现三个选择或三个“自由度”：趋于 0 的点的实部和虚部，以及过该点的方向.

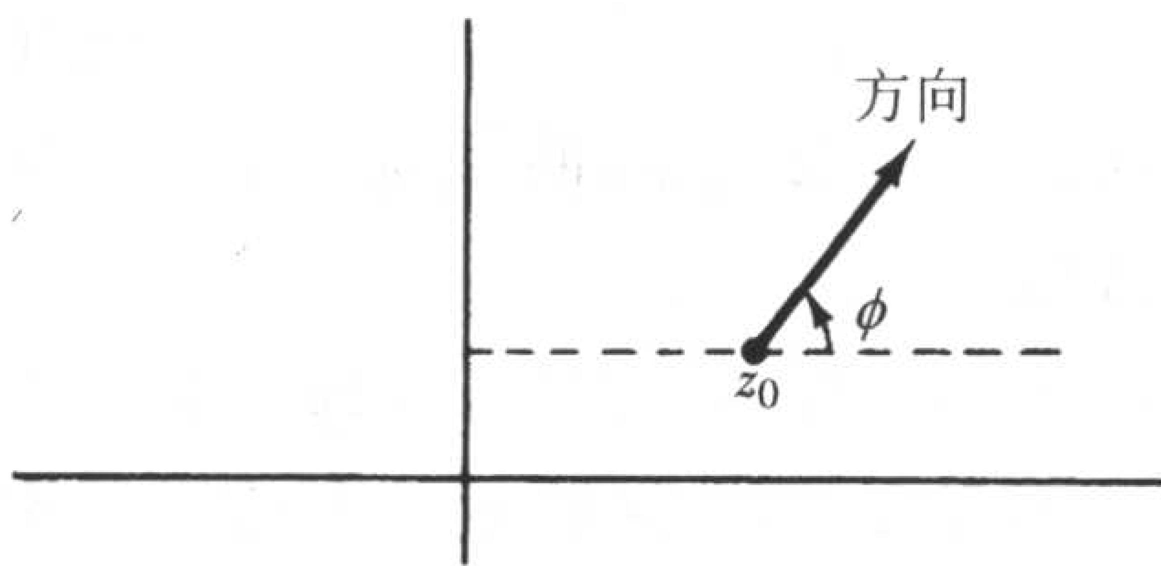


图 7-11 三个自由度

这里，我们就不证明这个定理了，感兴趣的读者可查阅参考文献. (值得读者注意的是该定理没有谈到函数在边界上的取值问题.)

由黎曼映射定理我们可以得出，对任意两个单连通区域 D_1 和 D_2，只要它们都不是全平面，那么 D_1，D_2 之间一定存在一个一一的解析映射. 事实上，根据定理，设 f 把 D_1 映到一个单位圆盘，g 把 D_2 也映到该单位圆盘，那么 $g^{-1}(f(z))$ 就是把 D_1 映到 D_2 的一一的解析映射(见图 7-12).

本章余下的部分将讨论如何构造和运用一些特殊的共形映射.

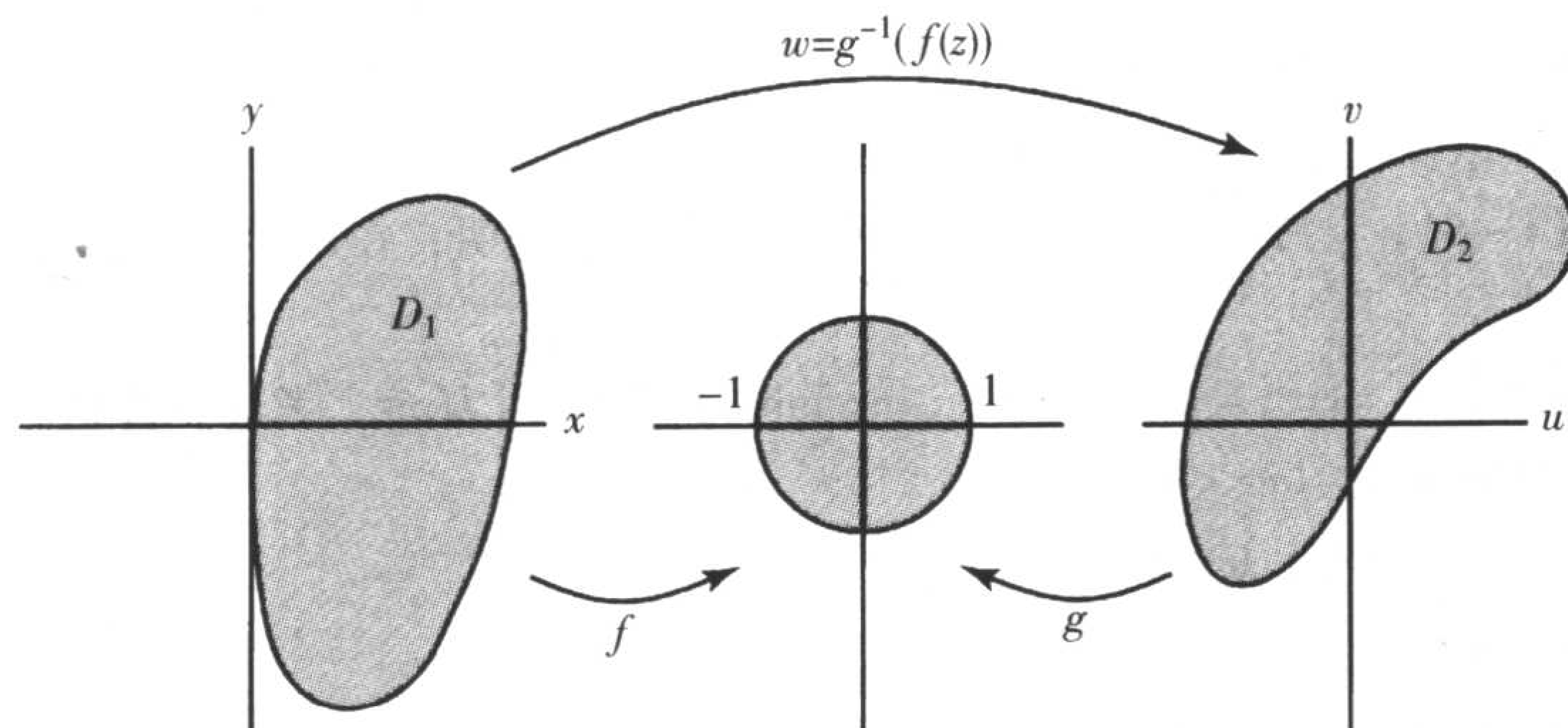


图 7-12 单连通区域的映射

练习 7.2

1. 确定下列函数的导数 f' 在 z_0 点的零点的阶数 m，并证明函数 f 在 z_0 的任何一个邻域内都不是一一的.

   (a) $f(z)=z^2+2z+1$，$z_0=-1$

   (b) $f(z)=\cos z$，$z_0=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…

   (c) $f(z)=e^{z^3}$，$z_0=0$

2. 证明：若 $w=f(z)$ 在点 z_0 解析并且 $f'(z_0)\neq 0$，那么 $z=f^{-1}(w)$ 在点 $w_0=f(z_0)$ 解析，且对于 $w=w_0$，$z=z_0$，下式成立：

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}w}(w)=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z)}.$$

   [提示：定理 1 保证了 $f^{-1}(w)$ 在点 w_0 附近是存在的，定理 3 蕴涵了 $f^{-1}(w)$ 是连续的，因此只需把 3.2 节中的证明一般化即可.]

3. 当 $\alpha>1$ 时，原点的角度在映射 $f(z)=z^{\alpha}$ 下将如何变化？当 $0<\alpha<1$ 时呢？

4. 利用开映射定理(定理 3)证明最大模原理.

5. 求出所有在 D：$|z|<1$ 内解析且函数值仅为纯虚数的函数 $f(z)$.

6. 若 f 在 z_0 点解析且 $f'(z_0)\neq 0$，证明函数 $g(z)=\overline{f(z)}$ 在点 z_0 的函数值与 $f(z_0)$ 相同，但角度与原来的相反.

7. 证明：映射 $w=z+1/z$ 把圆周 $|z|=\rho(\rho\neq 1)$ 映成椭圆：

$$\frac{u^2}{\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)^2}=1.$$

8. 设 f 在点 z_0 解析且 $f'(z_0)\neq 0$，通过微商证明：在映射 $w=f(z)$ 的作用下，以 z_0 为起点画出的“无穷小”线段的长度是原来的 $|f'(z_0)|$ 倍.

9. 设 $w=f(z)$ 是区域 D 到区域 D' 的一一解析映射，A' 表示 D' 的面积，用习题 8 证明公式：

$$A'=\iint_D |f'(z)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

381 ~ 382

10. 为什么当 D 是整个平面时，黎曼映射定理不成立？[提示：应用刘维尔定理.]

11. 描绘出下列区域在映射 $w=e^z$ 下的像：

   (a) 带形区域 $0<\mathrm{Im}z<\pi$.

   (b) 直线 $y=x$ 与 $y=x+2\pi$ 之间的斜带状区域.

   (c) 半带形区域 $\mathrm{Re}z<0$，$0<\mathrm{Im}z<\pi$.

   (d) 半带形区域 $\mathrm{Re}z>0$，$0<\mathrm{Im}z<\pi$.

(e)矩形区域 $1 < \text{Re}z < 2$，$0 < \text{Im}z < \pi$.

(f)右半平面 $\text{Re}z > 0$ 以及左半平面 $\text{Re}z < 0$.

12. 设 $P(z) = (z-\alpha)(z-\beta)$，$L$ 为过 $(\alpha+\beta)/2$ 的任意一条直线，证明：在由 L 确定的每个开半平面上 $P(z)$ 都是一一函数.

13. 描绘出下列区域在映射 $w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ 下的像.［提示：考虑每种情况下边界的像.］

(a)半带形区域 $0 < \text{Re}z < \pi$，$\text{Im}z < 0$.

(b)半带形区域 $0 < \text{Re}z < \pi/2$，$\text{Im}z > 0$.

(c)带形区域 $0 < \text{Re}z < \pi$.

(d)矩形区域 $0 < \text{Re}z < \pi$，$-1 < \text{Im}z < 1$.

14. 证明：若 z_0 是 f 的一阶极点，那么存在 z_0 的一个去心邻域，使得 f 是该邻域内的一一函数.

15. 一个区域 D 称为是凸的，如果对 D 内任意两点 z_1，z_2，连接它们的线段整个含于 D 内. 证明 Noshiro-Warschawski 定理：设 f 为凸区域 D 内的解析函数，若对所有的 $z \in D$ 都有 $\text{Re}f'(z) > 0$，那么 f 在 D 内是一一解析的.［提示：把 $f(z_2) - f(z_1)$ 看作 f' 的积分.］

16.（学过 4.4a 节的学生可作此题）证明：一一的解析函数把单连通区域映成单连通区域.

7.3 默比乌斯变换[⊖]

要找出把一个区域映到另一个区域的一一解析函数并不容易，因此我们有必要研究一些初等映射，进而总结出一些可以利用的基本准则. 本节我们将研究默比乌斯变换的基本性质，它是共形映射涉及的技巧的重要组成部分.（其中一些这样的映射曾在练习 2.1 中出现过）.

383

首先，我们考虑所有映射中最简单的*平移变换*，它由下述函数定义：

$$w = f(z) = z + c, \tag{1}$$

其中 c 是一个固定的复数. 在这个映射下，平面上每个点平移了一个向量 c. 它的性质相当清楚：整个复平面被一一地映到它自身，且把每个几何图形都映为与原来完全一样的几何图形(见图 7-13).

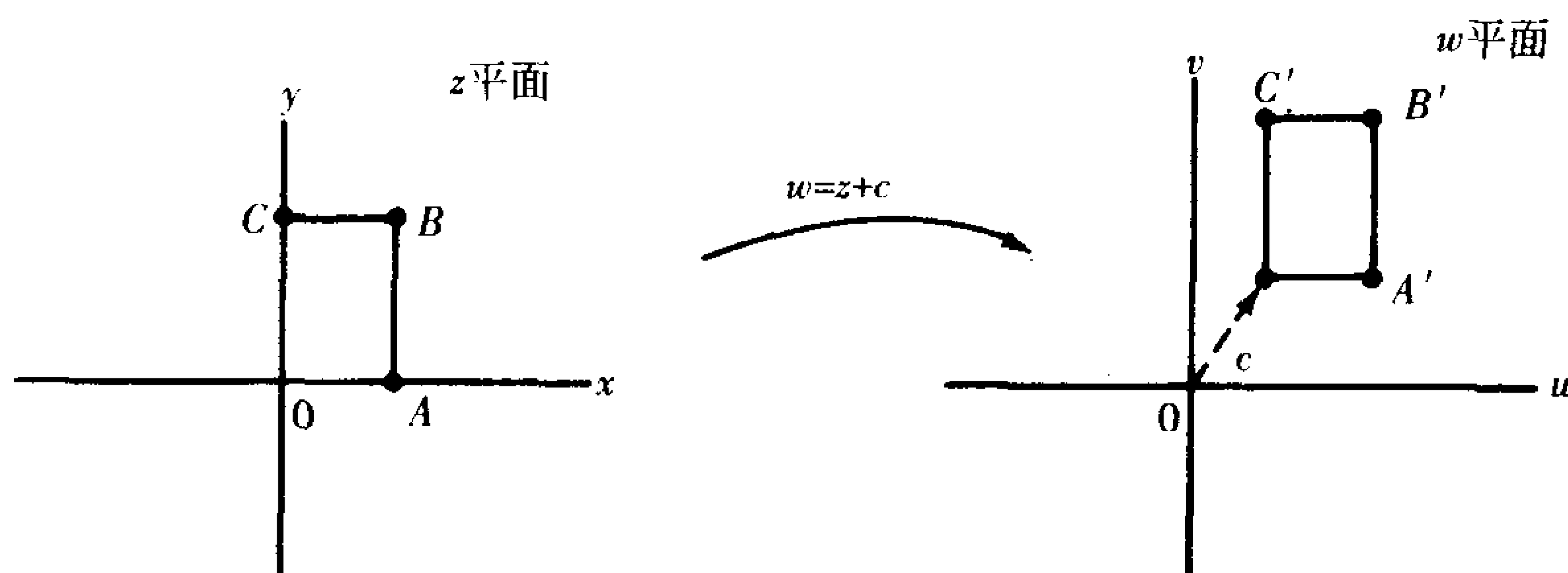


图 7-13 平移变换

另一个比较简单的映射是*旋转变换*，即

$$w = f(z) = e^{i\phi} z, \tag{2}$$

其中 ϕ 是实数，每一点都关于原点旋转了角度 ϕ. 容易看出，这种变换也是复平面到它自身的一一映射，且把几何图形映为与原来一样的几何图形(见图 7-14).

⊖ 在 1865 年，默比乌斯(August Möbius，1790—1860)仅用一张纸的一面就描述了默比乌斯带.

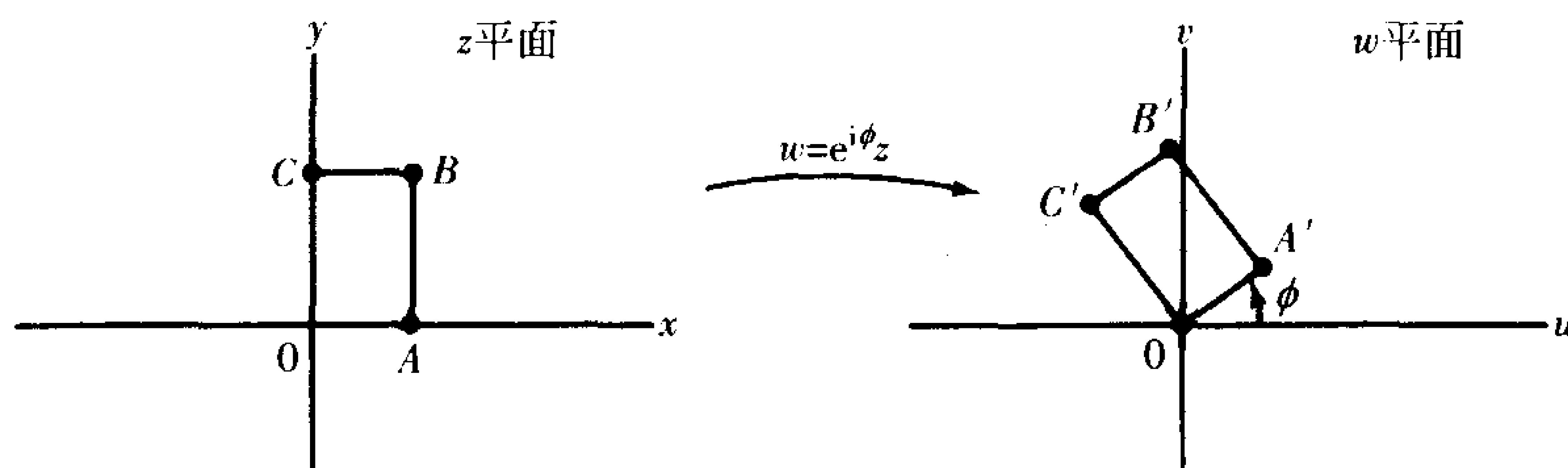


图 7-14 旋转变换

另外，我们定义映射

$$w = f(z) = \rho z, \tag{3}$$

其中 ρ 是正实常数. 该映射只是简单地把每点到原点的距离放大(或缩小)了 ρ 倍，因此把这样的变换称为伸缩变换. 由于

384

$$|w_1 - w_2| = |f(z_1) - f(z_2)| = |\rho z_1 - \rho z_2| = \rho|z_1 - z_2|,$$

即经过变换后，任意两点的距离都是原来两点的距离乘以同一个常数 ρ. 因此，这个变换通过伸缩率 ρ 重新调整了各点之间的距离，并且(因为它们是共形的)保持角度不变. 因此，在伸缩变换下，任何几何图形都映射成与原图形相似的图形，而且复平面也是一一地映射到它自身(见图 7-15).

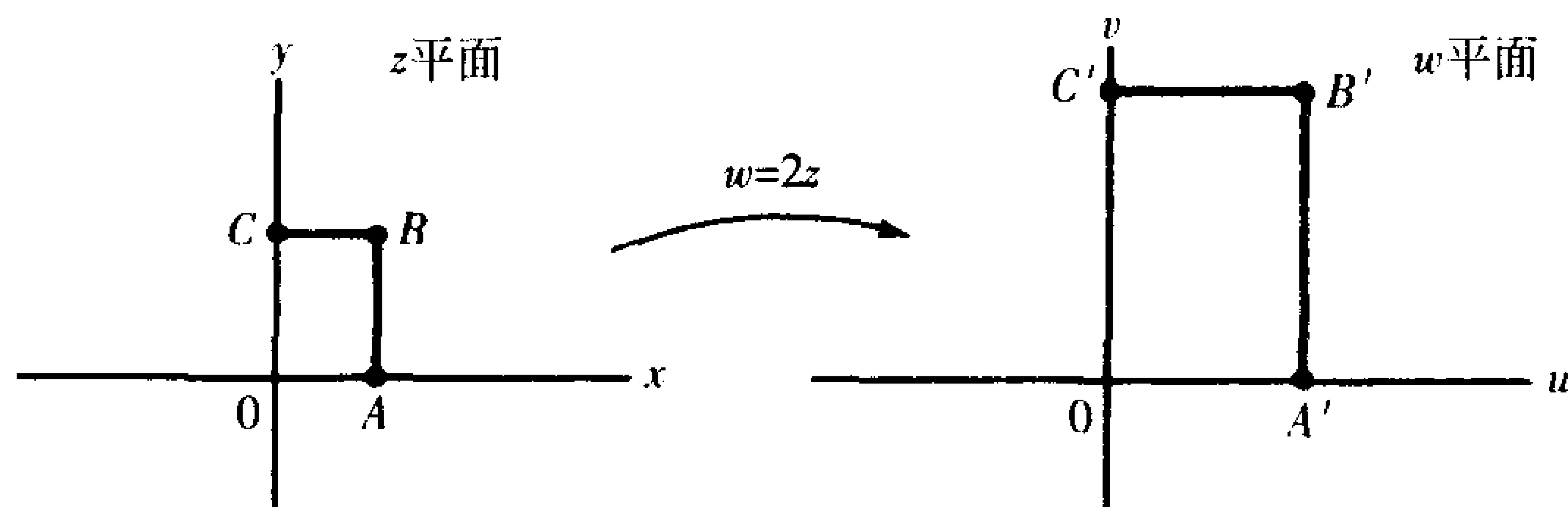


图 7-15 伸缩变换

任何形如

$$w = f(z) = az + b \tag{4}$$

的映射称为线性变换㊀，其中 a，b 都是复数且 $a \neq 0$. 这样的变换可看作是旋转、伸缩、平移三种变换的复合(当然，它们中的每一个都是线性变换的特例)：把 a 写成极坐标的形式 $a = \rho e^{i\phi}$，通过下面的复合来表示线性变换(4)，

$$w_1 = e^{i\phi}z,$$

$$w_2 = \rho w_1,$$

最后有

$$w = w_2 + b.$$

因此，线性变换也是复平面上的一一映射，并且在此映射下，任何图形的像在几何上都与原图形相似(见图 7-16).

㊀ 然而，某些书上把满足 $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2)$ 的映射才称为线性变换，而这对于(4)式来说，只有当 $b=0$ 时才成立. 另外，有些作者把默比乌斯变换称为是线性变换.

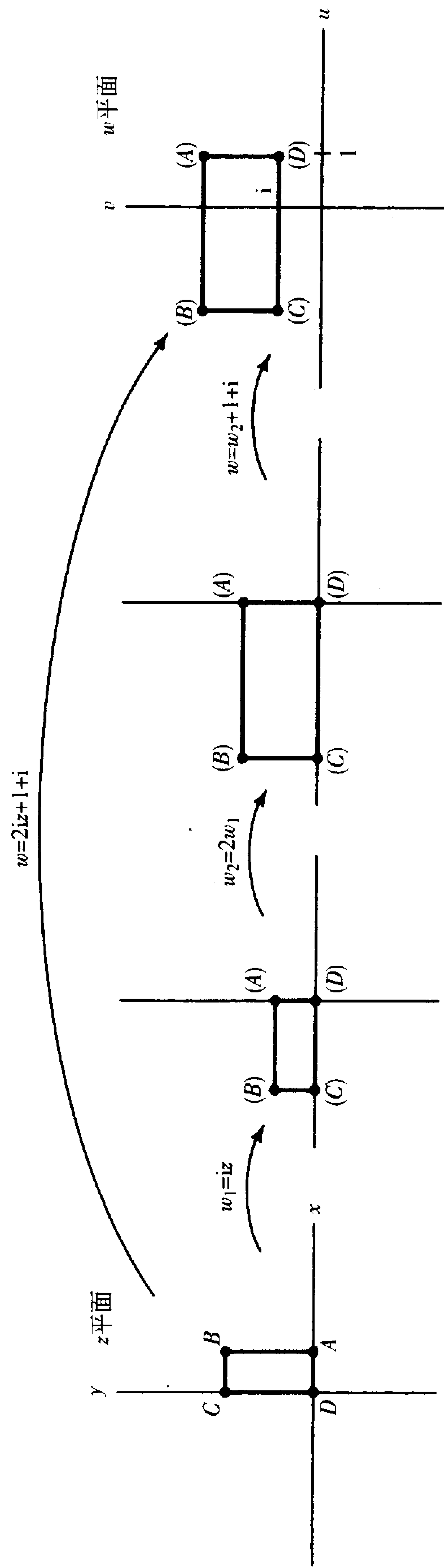


图 7-16 线性变换 $w = 2iz + 1 + i$

385 ~ 386

例 1 求一个线性变换，使得整个复平面关于给定的 z_0 点旋转角度 θ.

解 映射

$$w_1 = e^{i\theta}z$$

使平面关于原点旋转角度 θ，特别地，把 z_0 点映成了点 $e^{i\theta}z_0$. 如果移动全平面，使 $e^{i\theta}z_0$ 变回到 z_0，这样最终的结果就是平面关于 z_0 的一个旋转(可认为 z_0 不变且平面内的每条直线都旋转了角度 θ). 因此，所求的变换为

$$w = w_1 + (z_0 - e^{i\theta}z_0) = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})z_0.$$ ■

例 2 求一个线性变换，它把圆 C_1: $|z-1|=1$ 映到圆 C_2: $|w-3i/2|=2$.

解 参看图 7-17. 首先我们把 C_1 向左平移 1 个单位，使得 C_1 变成以原点为圆心的单位圆，然后再把单位圆扩大 2 倍，最后沿虚轴向上平移 3/2 个单位，即得到 C_2. 具体映射为

$$w_1 = z - 1,$$

$$w_2 = 2w_1 = 2z - 2,$$

最后

$$w = w_2 + 3i/2 = 2z - 2 + 3i/2.$$

此外，还允许 w 平面关于 $3i/2$ 旋转任意角度.

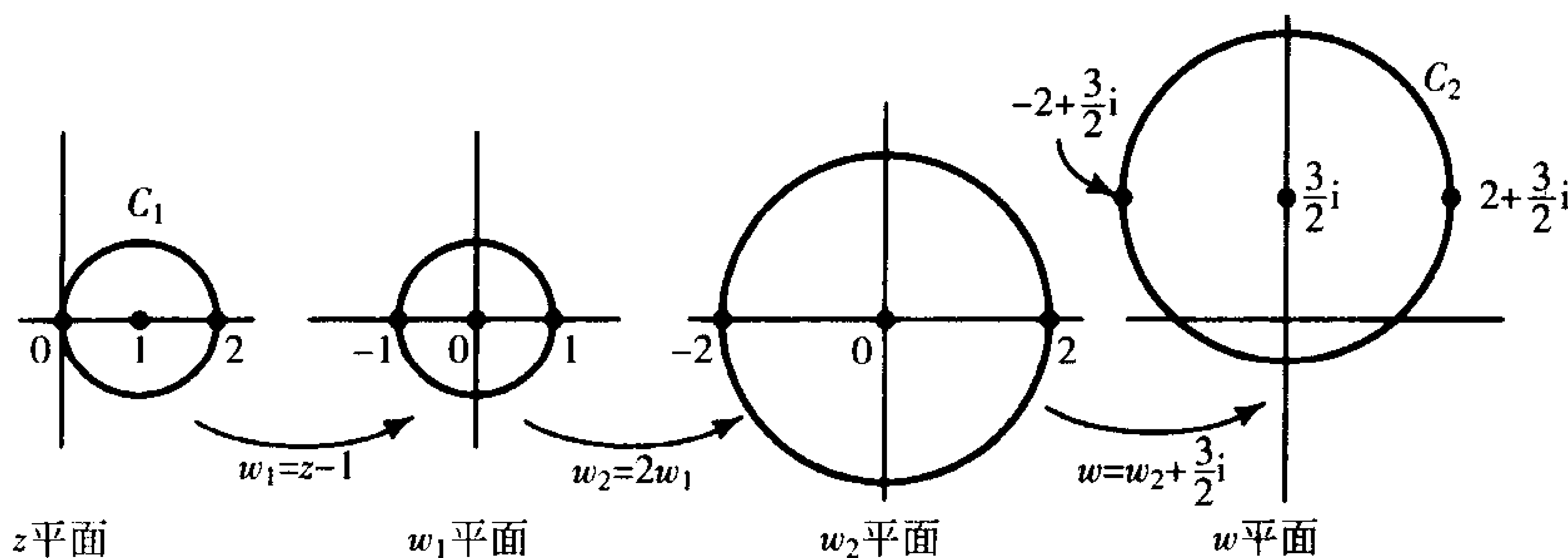


图 7-17 例 2 中的映射 ■

现在，我们考虑由下式定义的反演变换：

$$w = f(z) = \frac{1}{z}. \tag{5}$$

387

容易看出，反演变换是*扩充复平面*到自身的一一映射[⊖]，它"翻转单位圆的内部和外部"，即把单位圆的内部映到外部，反之亦然.

注意到点 $z=\rho e^{i\theta}$映成了

$$w = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}. \tag{6}$$

⊖ 想一想：反演是它自身的逆映射.

如果在(6)式中把 θ 固定，ρ 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化的实数，那么可以看到，过原点且与实轴夹角为 θ 的直线映成了过原点且与实轴夹角为 $-\theta$ 的直线，∞ 点映成了原点，原点映成了 ∞ 点(见图 7-18). 另一方面，若固定 ρ，θ 在 0 到 2π 之间变化，这时以原点为圆心半径为 ρ 的圆周映成了以原点为圆心半径为 $1/\rho$ 的圆周(可以说两个圆周的方向正好相反).

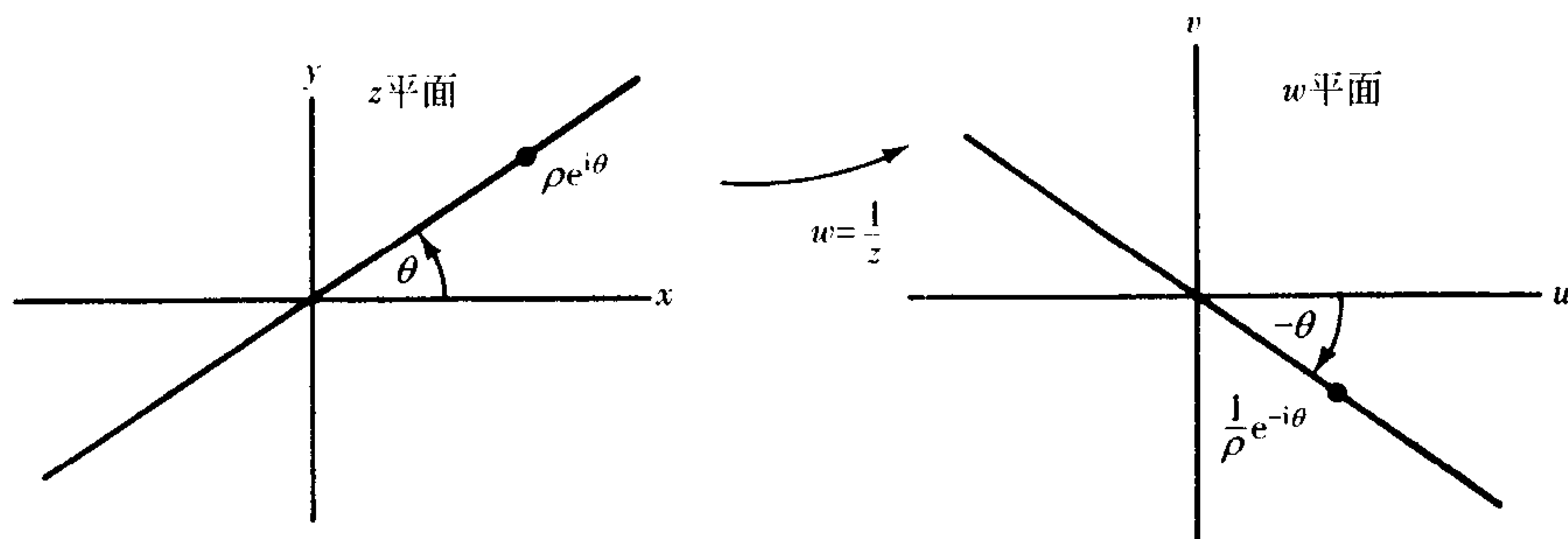


图 7-18 过原点的直线的反演

不过，如果我们马上得出反演变换总是把直线映成直线，圆周映成圆周的结论就会出错. 实际上，在反演变换下，直线要么映成直线，要么映成圆周，圆周也可能映成直线或圆周. 因而，若把 ∞ 当作一个点，则可把直线看作半径为无穷大的“广义圆周”，并且可以说：反演变换把广义圆周映成广义圆周.

上述论断的直接证明比较长，而且涉及解析几何中某些方程的证明，我们把它留作习题 15 ~ 17.

(不过，利用 1.7 节中的球极射影可以容易地推出上述论断. 首先，观察到平面上广义圆周的球极射影是黎曼球面上的圆周(见 1.7 节例 2)，反之，球面上每个圆周都是平面上一个广义圆周的像. 其次，反演变换相当于黎曼球面绕它的一条直径旋转 180 度(2.1 节例 4). 因为这样的旋转在球面上是保圆周的，因此，映射 $\frac{1}{z}$ 在平面上是保广义圆周的.)

388

事实上，我们总能容易地判断出它们的像是直线还是圆周. 若原始直线或圆周过原点，那么它的像将包含无穷远点，因此它的像一定是直线. 若原始直线或圆周不过原点，那么它的像就有界，从而就是圆周. 见图 7-19.

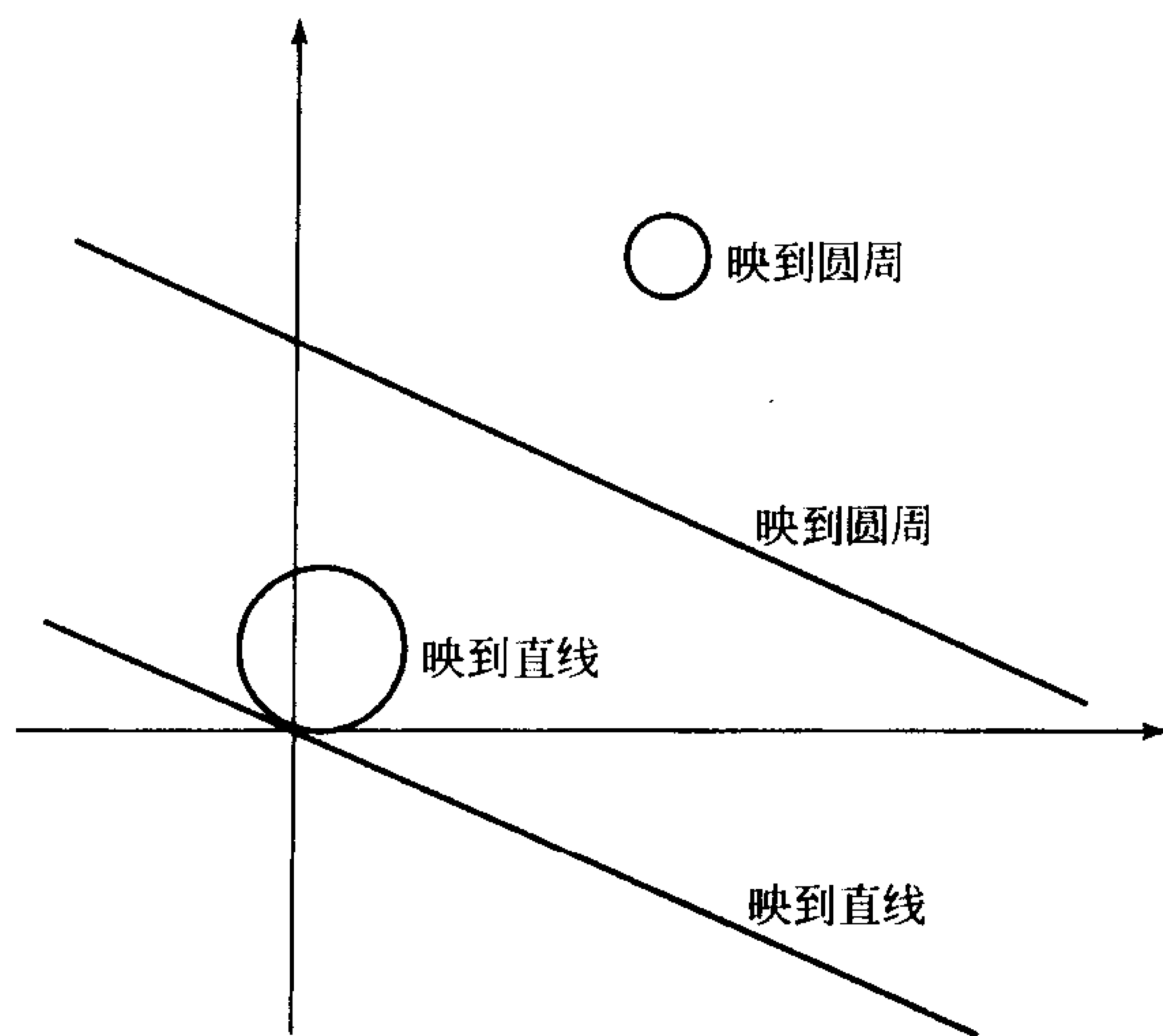


图 7-19 直线和圆周

总的来说，反演映射是一一映射，它把直线和圆周组成的类映到它自身. 平移、旋转和伸缩映射也都具有这个性质.

现在，我们定义默比乌斯变换.

定义 1 形如

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{7}$$

且 $ad \neq bc$(从而 w 不是常数函数)的函数称为**默比乌斯变换**(有时称为**分式线性变换**或**双线性变换**), 其中 a, b, c, d 为常数.

由于

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

不为零, 所以默比乌斯变换 $f(z)$ 在除极点 $z=-d/c$ 外的任意一点都是共形的.

容易看出, 上面的几个初等变换都是默比乌斯变换的特例. 更重要的是, 默比乌斯变换可分解为这些初等变换. 若 $c=0$, (7)式就是一个线性变换. 若 $c \neq 0$, 则(7)式可分解为 389

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d},$$

上式表明, 默比乌斯变换可表示为一个线性变换(旋转+伸缩+平移)

$$w_1 = cz+d, \tag{8}$$

经过一个反演变换

$$w_2 = \frac{1}{w_1}, \tag{9}$$

然后再经过另一个线性变换

$$w = \left(b - \frac{ad}{c}\right)w_2 + \frac{a}{c}. \tag{10}$$

由上述分解及前面的讨论结果, 我们可以得出默比乌斯变换的一些性质.

定理 5 设 f 是任一默比乌斯变换, 那么

(i) f 能表示成有限个平移、旋转、伸缩和反演变换的复合.

(ii) f 把扩充复平面一一地映射到自身.

(iii) f 把圆周和直线类映射到自身.

(iv) f 在除去极点外的任何一点都是共形的.

下面我们具体地解释一下性质(iii). 若一条直线或一个圆周经过默比乌斯变换的极点($z=-d/c$)时, 它的像曲线是无界的, 因此它的像是一条直线. 若直线或圆周不经过这个极点, 它就被映成一个圆周.

例 3 求圆周 C: $|z-2|=2$ 的内部在默比乌斯变换

$$w = f(z) = \frac{z}{2z-8}$$

下的像.

解 首先我们求出圆周 C 的像. 由于 $z=4$ 为 f 的极点且位于 C 上, 因此, C 的像是一条直线. 为求出这条直线, 需确定该直线上的两个有限点. 点 $z=0$ 和 $z=2+2\mathrm{i}$ 都在圆周 C 上, 它 390

们的像分别是

$$w = f(0) = 0 \quad 和 \quad w = f(2+2i) = \frac{2+2i}{2(2+2i)-8} = -\frac{i}{2}.$$

由此可得 C 的像是 w 平面上的虚轴. 利用 7.2 节关于连通性的讨论可知，C 的内部或者映为右半平面 $\mathrm{Re}w>0$，或者映为左半平面 $\mathrm{Re}w<0$. 由于 $z=2$ 是 C 内的点，且

$$w = f(2) = \frac{2}{4-8} = -\frac{1}{2}$$

在左半平面内，由此可知 C 内的点的像是左半平面. ■

下面的例子将说明如何构造一个区域到另一区域的共形映射.

例 4　求一个把单位圆 $|z|<1$ 映到右半平面 $\mathrm{Re}w>0$ 的共形映射.

解　首先，求一个把单位圆周 $|z|=1$ 映到虚轴的默比乌斯变换(见图 7-20). 由定理 5 后的注释，该变换必定在圆周上有一个极点. 而且 $w=0$ 一定在单位圆周的像上. 首先考虑映射

$$w = f_1(z) = \frac{z+1}{z-1}, \tag{11}$$

391　它把 1 映到∞，把 -1 映到 0.

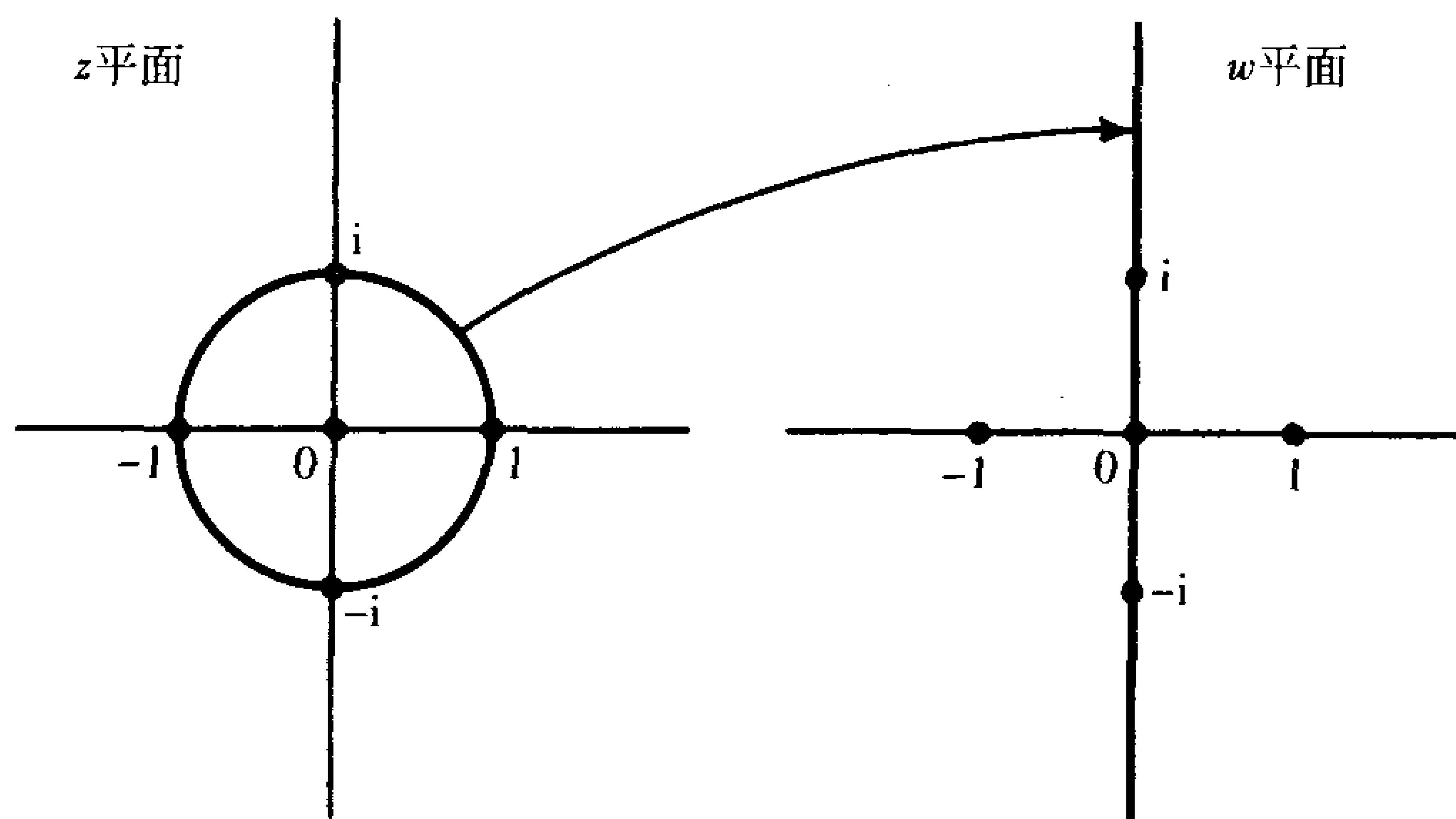


图 7-20　例 4 中的映射

由默比乌斯变换的几何性质，(11)式把 $|z|=1$ 映成某一条过原点的直线. 为求出这条直线，把圆周上的点 $z=i$ 代入，得

$$w = \frac{i+1}{i-1} = -i,$$

点 $w=-i$ 也在这条直线上. 因此，圆周在映射 f_1 下的像必定是虚轴.

为确定哪个半平面是圆内点的像，我们考察点 $z=0$. 由(11)式它被映到左半平面的点 $w=-1$，这不是我们想要的结果. 不过，通过旋转角度 π，可得到所求的共形映射

$$w = f(z) = -\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}. \tag{12}$$

(当然，随后还可以作垂直平移变换或伸缩变换.)通过观察我们知道(12)式正是 7.1 节例 1 中解决热学问题的映射，这里我们给出了它的证明过程. ■

练习7.3

1. 求出一个线性变换把圆周 $|z|=1$ 映到圆周 $|w-5|=3$，且将 $z=\mathrm{i}$ 映到 $w=2$.
2. 在映射 $w=(z-\mathrm{i})/z$ 下带形区域 $0<\mathrm{Im}z<1$ 的像是什么？
3. 给出在下列变换下圆周 $|z-2|=1$ 及其内部的像：

   (a) $w=z-2\mathrm{i}$ (b) $w=3\mathrm{i}z$ (c) $w=\dfrac{z-2}{z-1}$ (d) $w=\dfrac{z-4}{z-3}$ (e) $w=\dfrac{1}{z}$
4. 求一个默比乌斯变换，将下半平面映到圆盘 $|w+1|<1$[提示：分步骤完成].
5. 求一个默比乌斯变换，将单位圆盘 $|z|<1$ 映到右半平面，且把 $z=-\mathrm{i}$ 映到原点.
6. 点 z_0 称为函数 $f(z)$ 的一个不动点，若 $f(z_0)=z_0$. 证明：在复平面上，默比乌斯变换至多有两个不动点，除非 $f(z)\equiv z$.
7. 求把0，1，∞分别映到下列各组对应的点的默比乌斯变换.

   (a) 0，i，∞ (b) 0，1，2 (c) −i，∞，1 (d) −1，∞，1
8. 在映射 $w=(z+\mathrm{i})/(z-\mathrm{i})$ 下，第三象限的像是什么？ [392]
9. 在映射 $w=z/(z-1)$ 下，扇形 $-\pi/4<\mathrm{Arg}z<\pi/4$ 的像是什么？
10. 求一个共形映射，把半圆盘 $|z|<1$，$\mathrm{Im}z>0$ 映到上半平面. [提示：把默比乌斯变换与映射 $w=z^2$ 结合起来考虑，就可覆盖整个上半平面.]
11. 求一个映射，把如图7-21所示的阴影部分共形映射到上半平面. [提示：用一个默比乌斯变换把点2映到∞，并证明它的像是一个带形区域，然后再应用指数映射.]
12. 求一个默比乌斯变换，把图7-22所示的半平面映到单位圆盘 $|w|<1$.

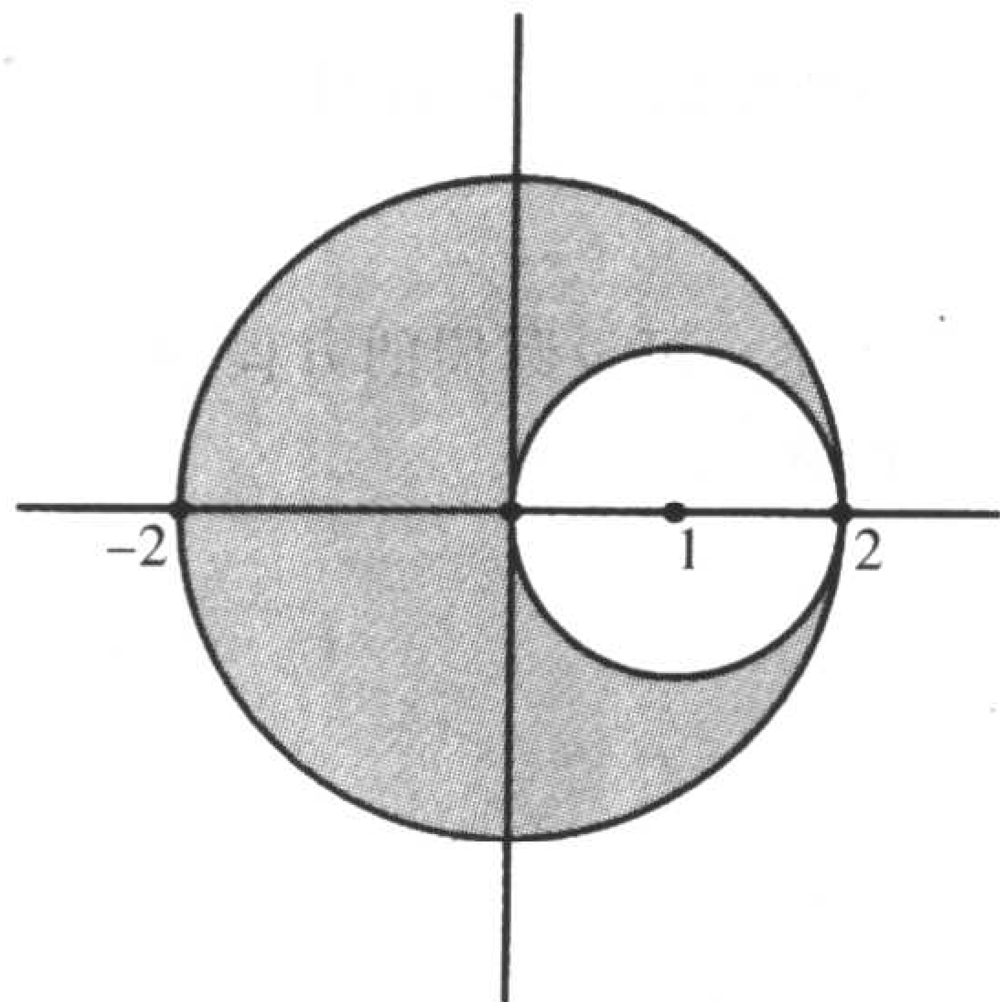


图7-21 习题11的区域

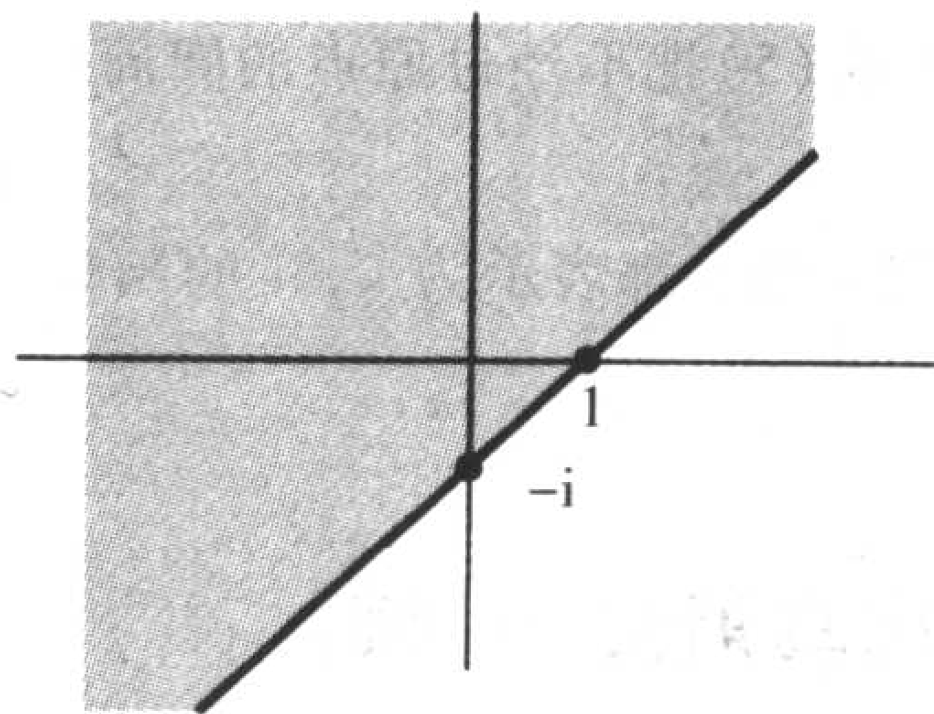


图7-22 习题12的区域

13. (史密斯图)电路的振荡频率为 ω，阻抗 Z 是一个复数，表示为 $Z=R+\mathrm{i}B$，它刻画了电路中电压与电流的关系(见3.6节). 在实际应用中，R 的取值范围是0到 $+\infty$，B 可取 $-\infty$ 到 ∞ 中的任何值. 因此，Z 作为复平面上的一个点就使得通常的表示变得难以处理(因为它在整个右半平面进行活动). 史密斯图提供了一个较紧凑的图形描述，即它在一个单位圆内表示出了阻抗 Z 的整个范围. 阻抗 Z 映由下式描述： [393]

$$W=\frac{Z-1}{Z+1}.$$

这个映射(确切地说，它的逆映射)在7.4节和7.5节的图中给出了描绘，W 也称为对应于 Z 的反射系数.

(a) 证明：当阻抗的实部 $\mathrm{Re}Z=R=$ 常数，即电路中的电阻为常值时，对应史密斯图中的圆周方程为

$$\left(u-\frac{R}{1+R}\right)^2+v^2=\frac{1}{(1+R)^2}.$$

(b)证明：当阻抗的虚部 $\mathrm{Im}Z = B =$ 常数，即电路中的电感为常值时，对应史密斯图中的圆的方程为

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{B}\right)^2 = \frac{1}{B^2}.$$

(见图 7-23.)

14. 若阻抗为 Z 的电路连接一个具有"相位常数"β 和单位"特征阻抗"的长度为 ℓ 的传输线，那么这个新配置的变换阻抗 Z' 由下式给出：

394

$$Z' = \frac{Z\cos\beta\ell + \mathrm{i}\sin\beta\ell}{\cos\beta\ell + \mathrm{i}Z\sin\beta\ell}.$$

证明：Z' 在史密斯图中的对应点可由 Z 在史密斯图中的对应点绕原点顺时针旋转弧度 $2\beta\ell$ 得到[○].

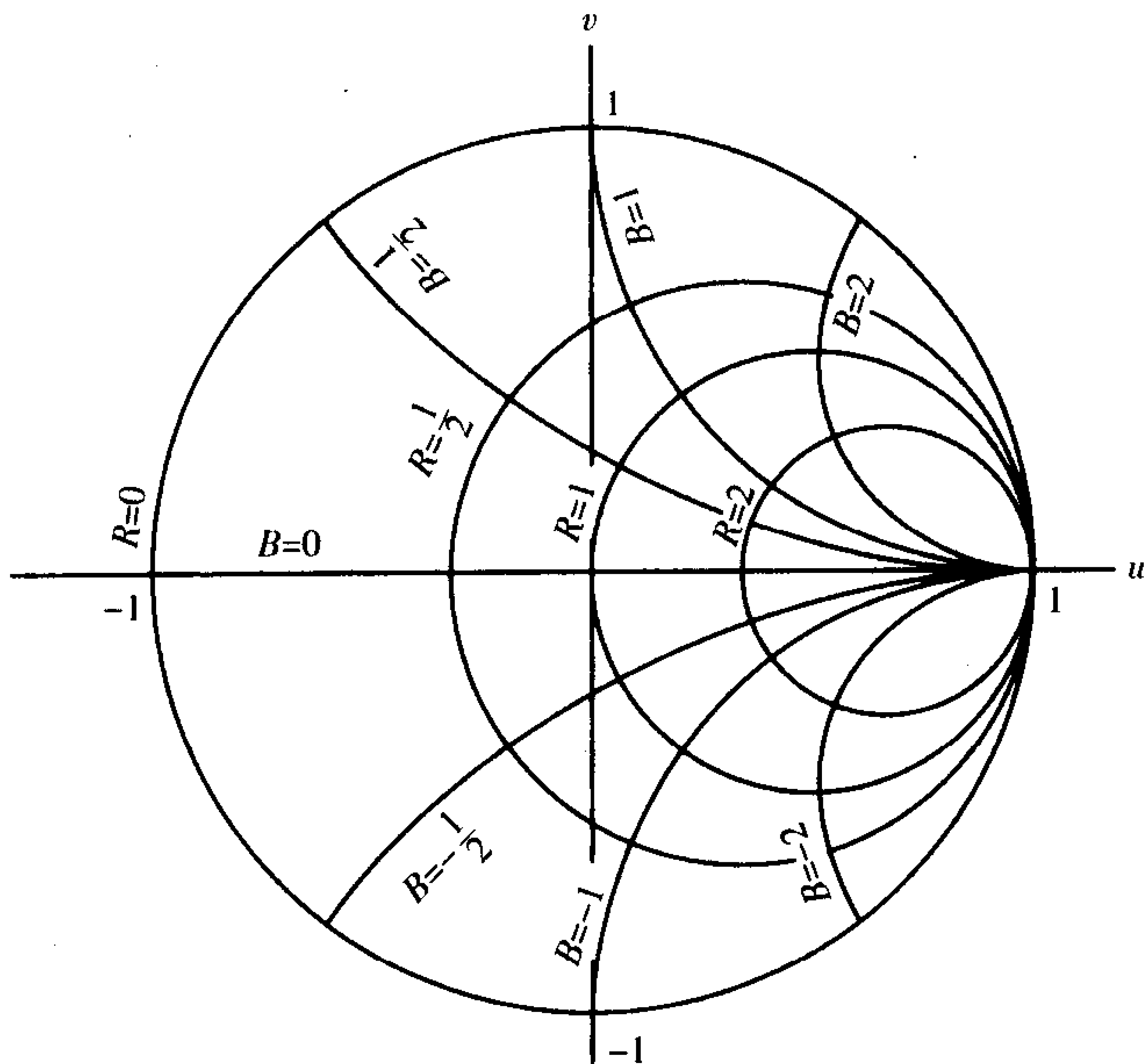


图 7-23 史密斯图

15. 证明：变换(5)把不经过原点的直线映射成经过原点的圆周. [提示：设直线的方程为 $Ax + By = C$ 且 $C \neq 0$，解

$$z = x + \mathrm{i}y = 1/w = 1/(u + \mathrm{i}v), \quad (13)$$

把 x 和 y 都表示为 u，v 的函数，然后代入直线方程，证明这个结果可被表示成如下形式：

$$u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = 0.] \quad (14)$$

16. 证明：变换(5)把经过原点的圆周映射成不经过原点的直线. [提示：利用上一题.]

17. 证明：变换(5)把不经过原点的圆周映射成不经过原点的圆周. [提示：可设圆周的方程为

$$x^2 + y^2 + Ax + By = C, \quad 且 \quad C \neq 0.$$

由(13)把 x 和 y 都表示为 u，v 的函数，可得

$$u^2 + v^2 - \frac{A}{C}u + \frac{B}{C}v = \frac{1}{C}.]$$

7.4 默比乌斯变换(续)

本节我们将研究默比乌斯变换另外的一些性质：群性、交比公式、对称性. 这些性质在共形映射应用中发挥了很大作用.

对任意一个默比乌斯变换

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad \neq bc), \tag{1}$$

通过反解出 z，可得到它的逆 $f^{-1}(w)$：

395

$$z = f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

可见，任一默比乌斯变换的逆仍是默比乌斯变换. 进而，若把两个默比乌斯变换复合起来，设

○ 史密斯(P. H. Smith)在 20 世纪 30 年代末期申请了史密斯图的专利，这里仅用到的一个共形映射也受版权保护.

$$w = f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \zeta = f_2(w) = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2},$$

容易证明

$$\zeta = f_2(f_1(z)) = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}.$$

因此任意两个默比乌斯变换的复合也是默比乌斯变换.（严格来说，在证明$f_2(f_1)$不是常数后才能作出这样的推断. 不过，这显然是正确的，由于f_1，f_2都是一一的，因此，它们的复合也是一一的.）特别地，当取$f_1^{-1}(f_1)$时，得到恒等函数$I(z) \equiv z$，它当然也是默比乌斯变换. 这就是默比乌斯变换的群性质（见习题21）.

我们已经知道默比乌斯变换把圆周和直线类映到自身，现在的问题是要找到一个变换把z平面上给定的圆周（或直线）C_z映到w平面上给定的圆周（或直线）C_w. 由几何知识知，任意不共线的三个不同点唯一地确定一个圆周；共线的三点唯一地确定一条直线（特别地，当其中一个点是∞时，这三个点确定一条直线）. 因此，如果在C_z上选取三个点z_1，z_2，z_3，在C_w上选取三个点w_1，w_2，w_3，并找到一个默比乌斯变换f满足

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3, \tag{2}$$

那么f一定把C_z映到C_w.

在$w_1 = 0$，$w_2 = 1$以及$w_3 = \infty$的情况下，我们不难找到一个默比乌斯变换满足(2)式. 实际上，这是把C_z映到实轴的映射. 如果z_1，z_2，z_3都是有限点，容易验证

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \tag{3}$$

满足

$$T(z_1) = 0, \quad T(z_2) = 1, \quad T(z_3) = \infty, \tag{4}$$

当其中一个z_i为∞时，(4)式由下式满足：

$$T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \quad (z_1 = \infty), \quad T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad (z_2 = \infty),$$

或 (5)

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_3 = \infty).^{\circleddash}$$

396

注意，(3)式[或(5)式]的右端称为点z，z_1，z_2，z_3的交比，可简写为(z, z_1, z_2, z_3). 当z_i都是有限点时有

$$(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \tag{6}$$

注意，该交比的记号中四个点的顺序是至关重要的，例如，

$$(z, 3, 0, \mathrm{i}) = \frac{(z - 3)(0 - \mathrm{i})}{(z - \mathrm{i})(0 - 3)} = \frac{-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i}}{-3z + 3\mathrm{i}},$$

而

⊖ 注意，(5)式中的默比乌斯变换可简单地由(3)式约去包含∞的因子项直接得到.

$$(z,i,3,0)=\frac{(z-i)(3-0)}{(z-0)(3-i)}=\frac{3z-3i}{(3-i)z}.$$

现在，我们希望解决一般的问题，即求一个默比乌斯变换 f，使它映射

$$z_1\text{ 到 }w_1,\quad z_2\text{ 到 }w_2,\quad z_3\text{ 到 }w_3,$$

其中 w_1，w_2，w_3 是任意三个不同的点．具体过程推导如下：设 $T(z)$ 是上面刚讨论过的默比乌斯变换，且它映射

$$z_1\text{ 到 }0,\quad z_2\text{ 到 }1,\quad z_3\text{ 到 }\infty,$$

并设映射 $S(w)$ 是类似的变换，它映射

$$w_1\text{ 到 }0,\quad w_2\text{ 到 }1,\quad w_3\text{ 到 }\infty.$$

那么通过下述复合就可得到我们想要的默比乌斯变换 f:

$$w=f(z)=S^{-1}(T(z)),\tag{7}$$

这是因为

$$f(z_1)=S^{-1}(T(z_1))=S^{-1}(0)=w_1,$$
$$f(z_2)=S^{-1}(T(z_2))=S^{-1}(1)=w_2,$$
$$f(z_3)=S^{-1}(T(z_3))=S^{-1}(\infty)=w_3.$$

注意到(7)式等价于方程

$$S(w)=T(z);$$

也就是说，为了把点 z_1，z_2，z_3 分别映射到点 w_1，w_2，w_3，只需要这两个交比相等：

$$(w,w_1,w_2,w_3)=(z,z_1,z_2,z_3)\tag{8}$$

397 然后解出 w，写成 w 关于 z 的函数即可.

例 1 求一个默比乌斯变换，将 0 映到 i，1 映到 2，-1 映到 4.

解 它们的交比分别是

$$(z,0,1,-1)=\frac{(z-0)[1-(-1)]}{[z-(-1)](1-0)}=\frac{2z}{z+1}$$

和

$$(w,i,2,4)=\frac{(w-i)(2-4)}{(w-4)(2-i)}=\frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)}.$$

从而，由方程

$$\frac{-2(w-i)}{(w-4)(2-i)}=\frac{2z}{z+1}$$

解出 w 即得所求变换

$$w=\frac{(16-6i)z+2i}{(6-2i)z+2}.$$ ■

注意，由 z_1，z_2，z_3 确定的圆周或直线 Γ 的方向也由这三个点的顺序来决定，这一点很重要．也就是说，Γ 的方向是由通过点 z_1，z_2，z_3 的顺序决定的．[注意，在这里直线看作是在 ∞ 点封闭的圆周，因此，它也像圆周一样需要三个点来定向．见图 7-24d.]按照这个方向就可唯一地确定出“左区域”，即当一个人沿着 Γ 前进时，在他左手边的区域(见图 7-24)．因为默

比乌斯变换是共形的，可以证明，把点 z_1，z_2，z_3 分别映到点 w_1，w_2，w_3 的默比乌斯变换一定把以 z_1，z_2，z_3 为顺序所决定的圆周(或直线)的左区域映成由 w_1，w_2，w_3 所决定的圆周(或直线)的左区域. 我们通过图 7-25 所示的情形说明这一点. 从 z 平面圆周上的一点画一条短的有向线段到左区域中，由共形性知，这个线段的像是一条从像直线进入它的左区域内的有向曲线. 再由连通性就可推得，左区域映到左区域. 另外，关于圆周到圆周，直线到圆周以及直线到直线的映射都可用同样的方法来说明. 398

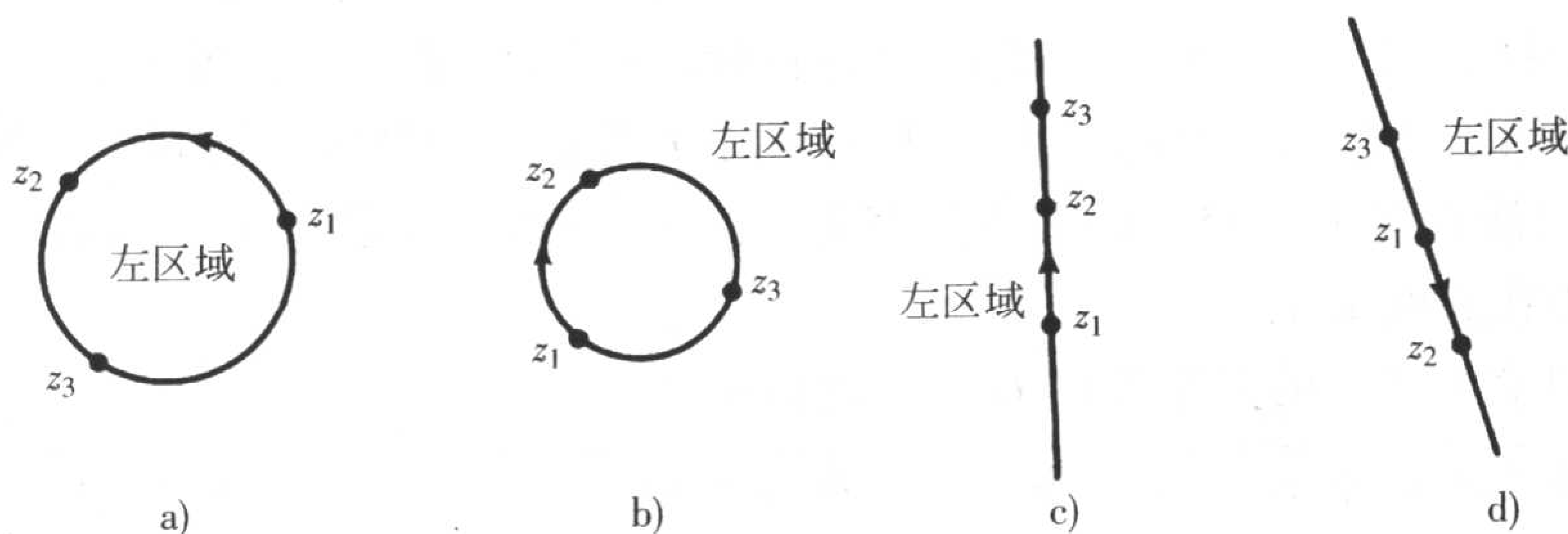


图 7-24　由三个点的顺序决定的左区域

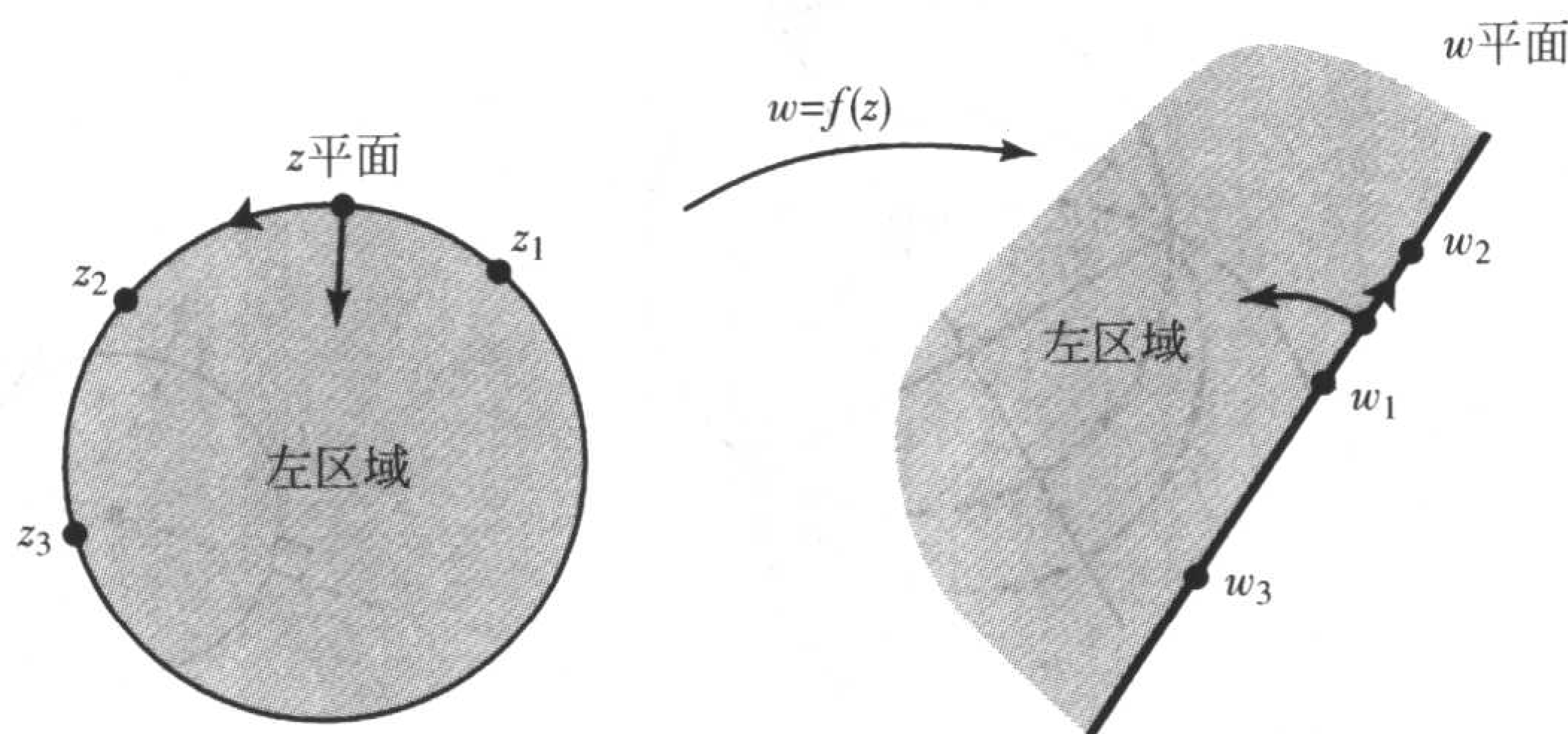


图 7-25　左区域之间的对应

因此，只要选好了点的顺序，我们就可以很快地写出从一个“圆”的区域到另一“圆”的区域映射的代数公式.

例 2　求一个默比乌斯变换，把区域 D_1：$|z|>1$ 映射到区域 D_2：$\mathrm{Re}w<0$.

解　不妨设 D_1 和 D_2 都是左区域，对于 D_1 在圆周 $|z|=1$ 上以负(顺时针)方向依次选取三个点，不妨取

$$z_1 = 1,\quad z_2 = -\mathrm{i},\quad z_3 = -1.$$

同样，在虚轴上依次选取三个点

$$w_1 = 0,\quad w_2 = \mathrm{i},\quad w_3 = \infty$$

使得 D_2 为其左区域. 这时，问题的解就转化为求一个变换使得 1 映到 0，$-\mathrm{i}$ 映到 i，-1 映到∞. 设

$$(w,0,\mathrm{i},\infty)=(z,1,-\mathrm{i},-1),$$

即

399

$$\frac{w-0}{\mathrm{i}-0}=\frac{(z-1)(-\mathrm{i}+1)}{(z+1)(-\mathrm{i}-1)},$$

于是得到

$$w=\frac{(z-1)(1+\mathrm{i})}{(z+1)(-\mathrm{i}-1)}=\frac{1-z}{1+z}.$$ ■

默比乌斯变换的另一重要性质是它的保对称性. 我们知道，对于两个点 z_1，z_2，L 是连接 z_1 和 z_2 线段的中垂线(见图 7-26a)，则 z_1 和 z_2 关于 L 对称. 由初等几何知，这等价于每个过 z_1 和 z_2 的圆周和直线都与 L 正交，即交角为直角(见图 7-26b). (注意一个圆周和直线 L 正交当且仅当它的圆心在直线 L 上.)

由此，我们给出如下的关于圆周 C 对称性的定义：

定义 2 若过点 z_1 和 z_2 的每一圆周或直线都与圆周 C 正交，则称点 z_1 和 z_2 **关于圆周 C 对称**(见图 7-27).

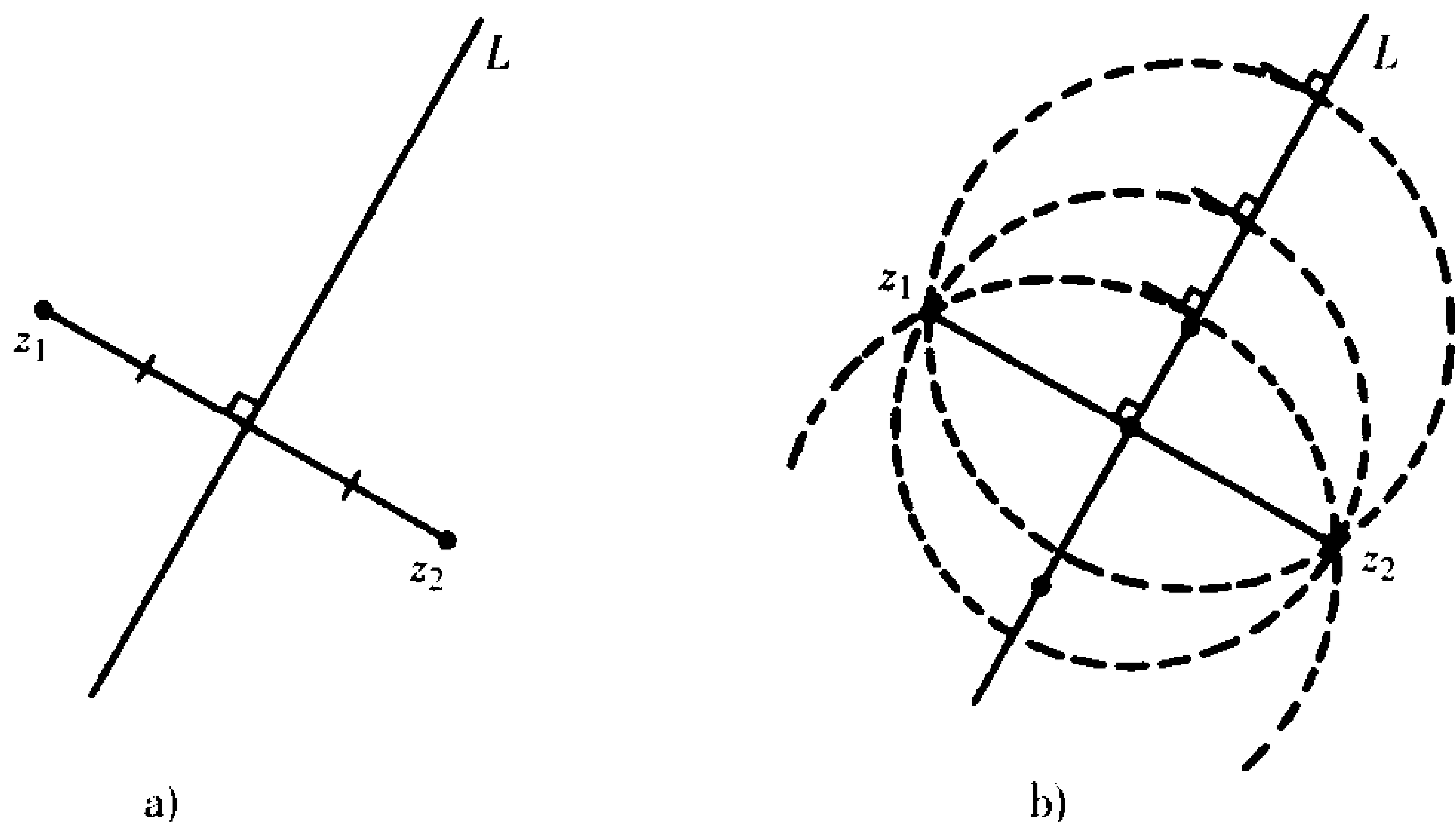


图 7-26 z_1，z_2 关于直线 L 对称

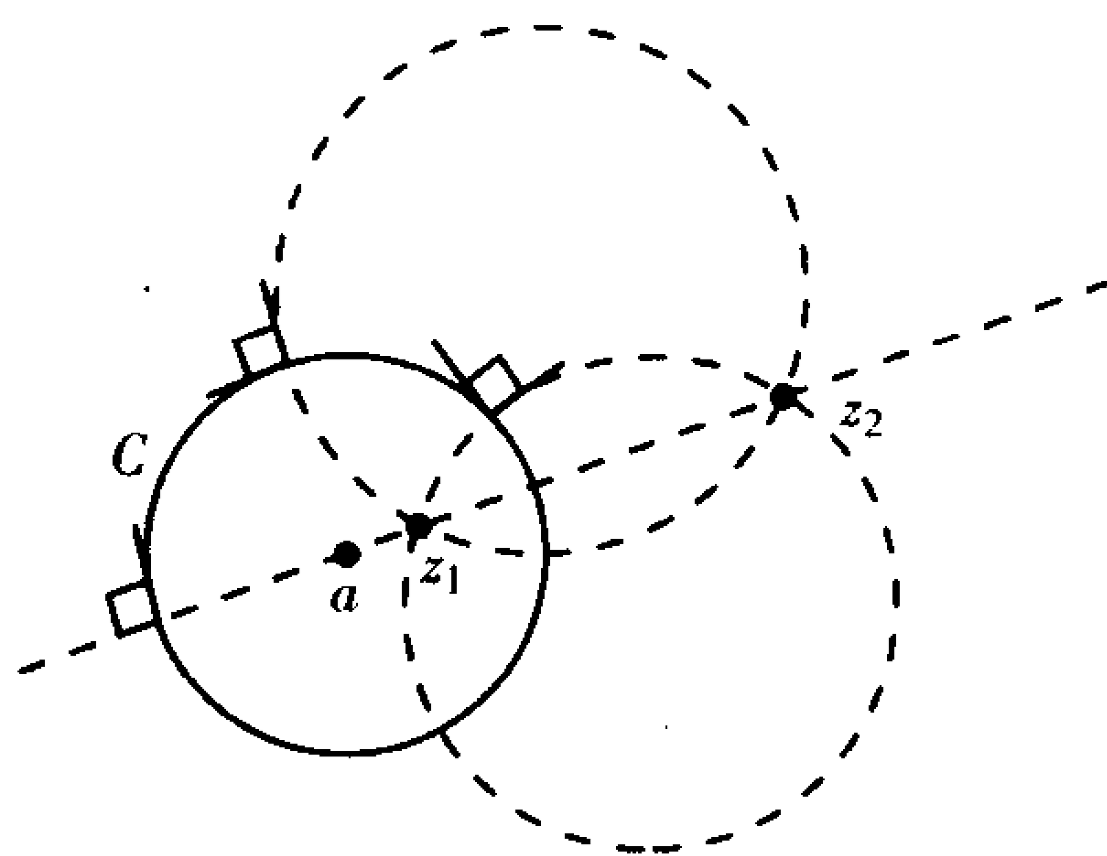


图 7-27 z_1，z_2 关于圆周 C 对称

特别地，圆周 C 的圆心 a 与∞关于 C 对称——任何圆周都不过这两个点，但任意一条包含 a 的直线必定经过∞，且与 C 正交，因此满足定义 2 的条件.

现在，我们给出默比乌斯变换的保对称性.

定理 6(对称原理) 设 C_z 为 z 平面上的一条直线或一个圆周，$w=f(z)$ 为任意默比乌斯变换，那么点 z_1，z_2 关于 C_z 对称当且仅当它们的像 $w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$ 关于 C_z 在 f 下的像对称.

400

该定理可由图 7-28 来说明，这里是把圆周 C_z 映为一条直线的特殊情况.

证 证明很简单. 如果每一个过两点的圆周或直线都与给定的圆周(直线)正交，那么这两点关于这个圆周(直线)对称. 由于默比乌斯变换把直线和圆周组成的类映到它自身，把直角映为直角，因此，默比乌斯变换保持定义 2 中对称条件不变. 所以，定理成立. ■

给定一点 α 和一个以 a 为圆心半径为 R 的圆周 C，α^* 是 α 关于圆周 C 的对称点. 如果能

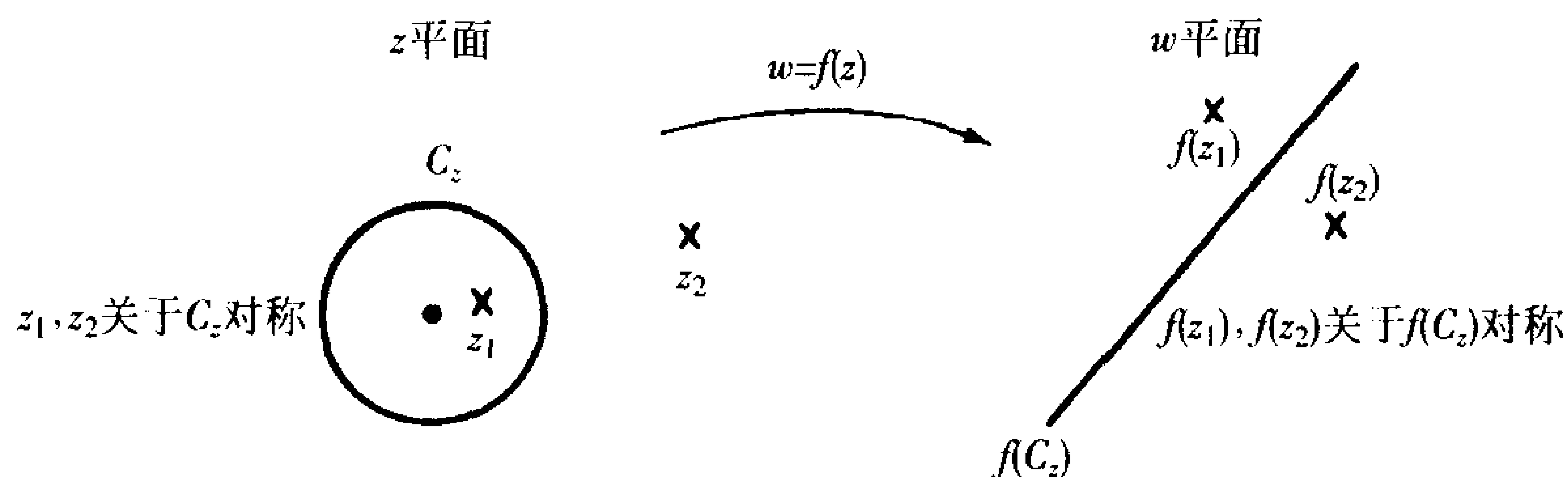


图 7-28 对称原理

找到一个 α^* 的公式，显然将方便很多. 为此，我们注意到变换

$$T(z) = (z, a - R, a + Ri, a + R)$$
$$= \frac{[z - (a - R)](Ri - R)}{[z - (a + R)](Ri + R)} = i\frac{z - (a - R)}{z - (a + R)} \tag{9}$$

把 C 上的三个点从而把整个圆周 C 映到实轴. 由对称原理，α^* 与 α 关于圆周 C 对称当且仅当 $T(\alpha^*)$ 与 $T(\alpha)$ 关于实轴对称. 而后一条件等价于 $T(\alpha^*)$ 与 $T(\alpha)$ 必定是一对共轭点，即 [401]

$$T(\alpha^*) = \overline{T(\alpha)},$$

或者，由(9)式得

$$i\frac{\alpha^* - (a - R)}{\alpha^* - (a + R)} = \overline{\left[i\frac{\alpha - (a - R)}{\alpha - (a + R)}\right]} = -i\frac{\bar{\alpha} - (\bar{a} - R)}{\bar{\alpha} - (\bar{a} + R)}. \tag{10}$$

从(10)式中解出 α^* 得到公式

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\bar{\alpha} - \bar{a}} + a. \tag{11}$$

(注意：这里也说明了 α 关于 C 的对称点 α^* 是唯一的). 由(11)式我们得到

$$\arg(\alpha^* - a) = \arg\left(\frac{R^2}{\bar{\alpha} - \bar{a}}\right) = \arg\left[\frac{R^2(\alpha - a)}{|\alpha - a|^2}\right] = \arg(\alpha - a)$$

和

$$|\alpha^* - a| = \frac{R^2}{|\bar{\alpha} - \bar{a}|} = \frac{R^2}{|\alpha - a|},$$

这意味着对称点 α 与 α^* 在以圆心 a 为起点的同一条射线上，并且它们到圆心的距离的乘积($|\alpha^* - a| \cdot |\alpha - a|$)等于半径的平方. 图 7-29 给出了对称点之间的位置关系.

例 3 求出把 $|z| < 1$ 映到 $|w| < 1$ 的所有默比乌斯变换.

解 设 $f(z)$ 为任一个满足题设条件的默比乌斯变换，从而它把圆周 C_z：$|z| = 1$ 映到 C_w：$|w| = 1$. 因而在 $|z| < 1$ 内一定存在某个点 α，它的像为原点，即 $f(\alpha) = 0$. 由公式(11)，α 关于 C_z 的对称点 α^*(其中 $a = 0$，$R = 1$)为 [402]

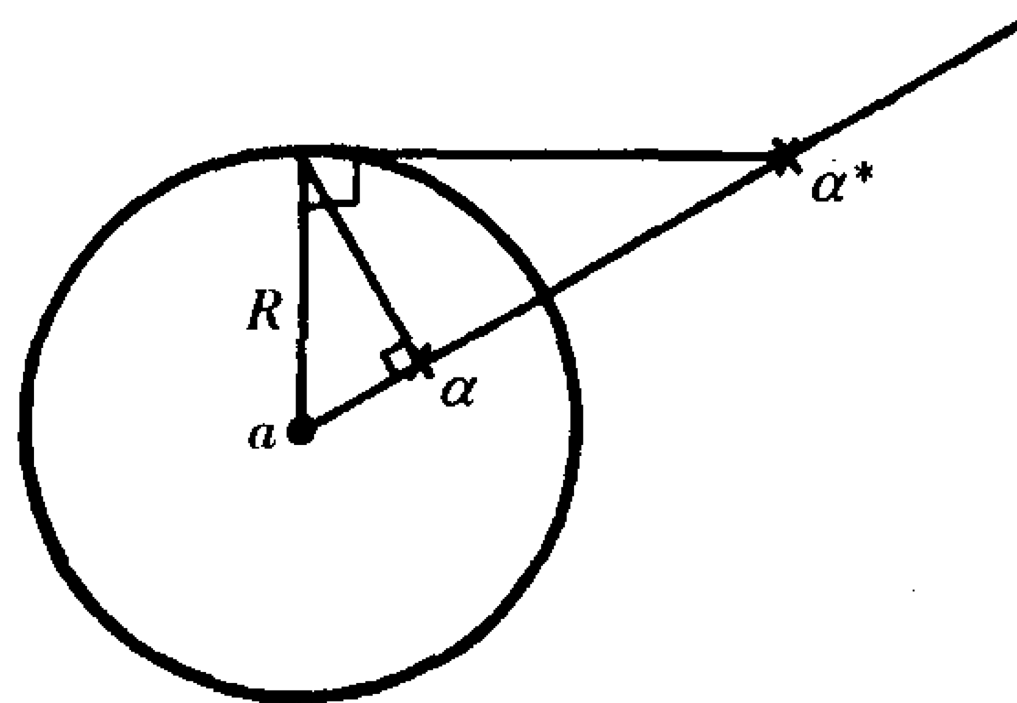


图 7-29 由三角形相似可得 $R/|\alpha - a| = |\alpha^* - a|/R$

$$\alpha^* = \frac{1^2}{\bar{\alpha} - \bar{0}} + 0 = \frac{1}{\bar{\alpha}}.$$

所以，$f\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)$一定是 $f(\alpha)=0$ 关于 C_w 的对称点．但由于原点为 C_w 的圆心，它的对称点是 ∞，即

$$f\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right) = \infty.$$

因此，α 为f的一个零点，$1/\bar{\alpha}$ 为f的一个极点．于是f可写成下面的形式：

$$f(z) = k \cdot \frac{z-\alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

其中 k 为某一常数．此外，因为$f(1)$在 C_w 上，从而

$$1 = |f(1)| = |k\bar{\alpha}| \cdot \left|\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right| = |k\bar{\alpha}|.$$

因此 $k\bar{\alpha} = e^{i\theta}$，其中 θ 为一实数，这样可得到

$$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z - 1} \quad (|\alpha| < 1). \tag{12}$$

反过来，读者易证(习题 15)形如(12)的任意变换都把$|z|<1$ 映到$|w|<1$. ■

进而，也可证明(12)式中的函数是唯一的单位圆盘到单位圆盘的一一解析映射.

练习 7.4

1. 设$f_1(z)=(z+2)/(z+3)$，$f_2(z)=z/(z+1)$，求$f_1^{-1}(f_2(z))$.

2. 说明为什么由

$$(w, -i, 1, i) = (z, -i, i, 1)$$

定义的默比乌斯变换把单位圆周映到单位圆周，但把它的内部映到外部[提示：考虑方向].

3. 求 $4-3i$ 关于下列圆周的对称点.

403

(a) $|z|=1$　　(b) $|z-1|=1$　　(c) $|z-1|=2$

4. 若 z_2，z_3 和 z_4 是扩充复平面上的三个不同点，T是任意一个默比乌斯变换，证明：对扩充复平面上的任一点 z_1，有

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)),$$

即在默比乌斯变换下，交比不变.

5. 设 $w=f(z)$是把点 0，λ，∞ 分别映到 $-i$，1，i 的默比乌斯变换，其中 λ 是实数，问：λ 为何值时，f可把上半平面映到$|w|<1$?

6. 利用交比的符号，写出一个把直线 $y=2x-3$ 以下的半平面映到圆周$|w-4|=2$ 的内部的默比乌斯变换．用同样的方式再求一个把上述区域映到圆周外部的默比乌斯变换.

7. 是否存在默比乌斯变换f，把实轴映到单位圆周$|w|=1$，并且还满足 $f(i)=2$，$f(-i)=-1/2$?

8. 证明：若 z_1，z_2，z_3 是三个不同的点，w_1，w_2，w_3 也是三个不同的点，那么满足 $T(z_i)=w_i(i=1,2,3)$的默比乌斯变换是唯一的．[提示：假设 S 是另一个满足上述条件的默比乌斯变换，考虑复合映射 T^{-1}。S 的不动点(见练习 7.3 习题 6).]

9. 设f是一个默比乌斯变换且 $f(1)=\infty$，f把虚轴映到单位圆周$|w|=1$．问：$f(-1)$的值是什么?

10. 通过完成以下各步骤，证明当给定直线 L 和圆周 C 不相交时，总是存在两个不同的点 z_1 和 z_2 关于 L 和 C 同时对称.

(a)证明：存在一个默比乌斯变换把 L 映成实轴，且把 C 映成圆周 $|w-\lambda \mathrm{i}|=R$，其中 λ 是实数，且 $R<|\lambda|$(见图 7-30).

(b)证明：w_1 和 w_2 关于实轴和圆周 $|w-\lambda \mathrm{i}|=R$ 都对称当且仅当

$$w_2=\bar{w}_1 \quad 和 \quad w_2=\frac{R^2}{\bar{w}_1+\lambda \mathrm{i}}+\lambda \mathrm{i}.$$

解上面的方程组，得

$$w_1=\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2-R^2},\quad w_2=-\mathrm{i}\sqrt{\lambda^2-R^2}$$

为同时对称的点.

(c)由(a)和(b)的结果以及对称原理推出，存在点 z_1 和 z_2 关于 L 和 C 都对称.

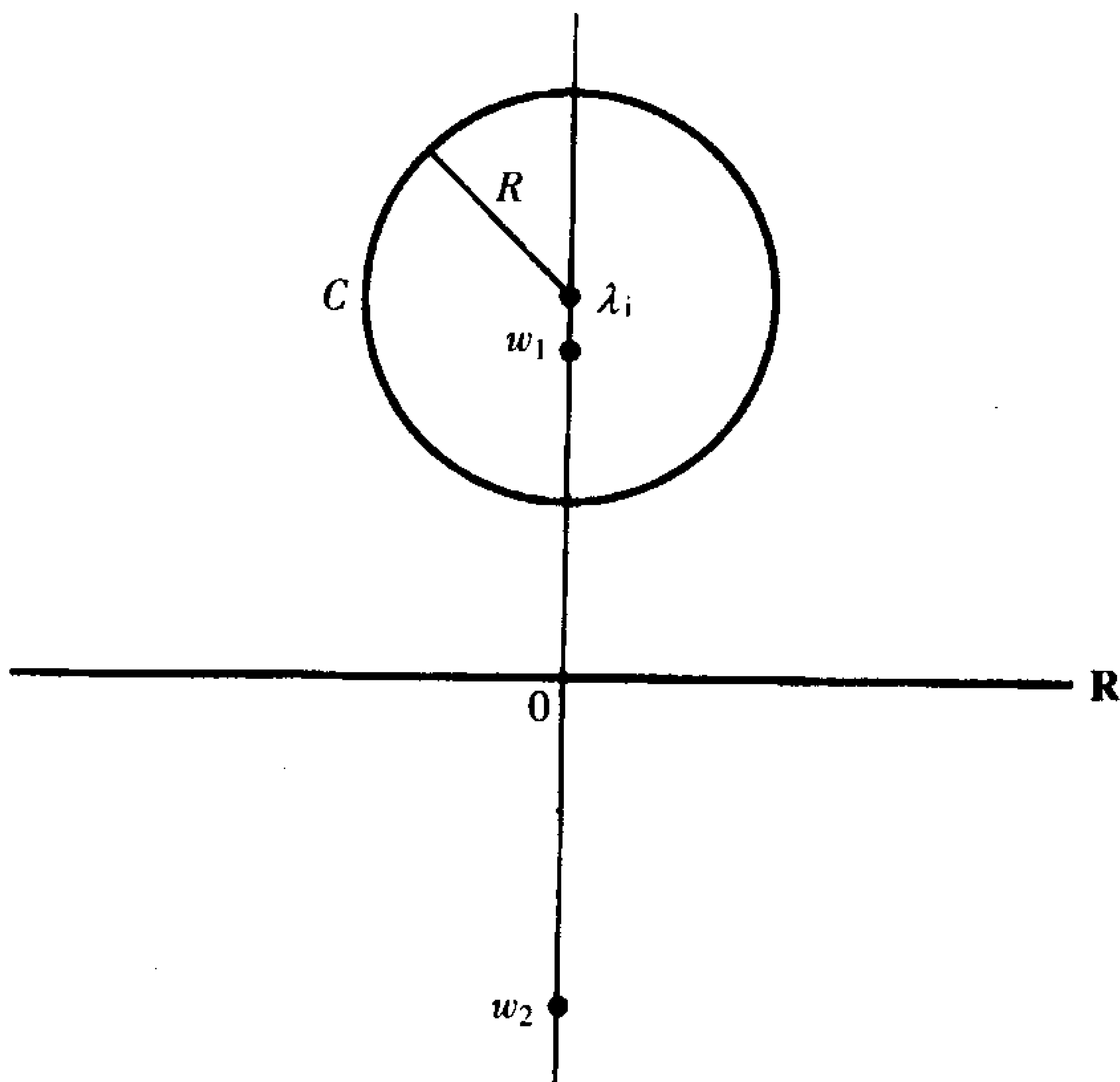


图 7-30 w_1 和 w_2 关于 $\mathbf{R}$ 和 C 同时对称

11. 证明：任意给定两个不相交的圆周 C_1 和 C_2，总存在两个不同的点 z_1 和 z_2 关于 C_1 和 C_2 同时对称. [提示：证明存在一个默比乌斯变换把 C_1 映成一条直线，把 C_2 映成另一个圆周，再利用习题 10 的结果.]

404

12. 利用习题 11 的结果证明：对任意两个不相交的圆周 C_1 和 C_2，总存在一个默比乌斯变换把它们映成同心圆. [提示：把 z_1 映到原点，z_2 映到∞点，其中，z_1 与 z_2 是关于这两个圆周同时对称的点.]

13. 设 z_1，z_2 和 z_3 是一圆周(或直线) C 上的三个不同的点，证明：z 和 z^* 关于 C 对称当且仅当 $(z^*, z_1, z_2, z_3)=\overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$.

14. 证明：四个互异的点 w_1，w_2，w_3，w_4 共线或共圆当且仅当交比 (w_1, w_2, w_3, w_4) 为实数. [提示：考虑由

$$(w,w_2,w_3,w_4)=(z,0,1,\infty)$$

定义的默比乌斯变换，且注意 $(z,0,1,\infty)\equiv z$.]

15. 验证任何形如(12)式的变换把 $|z|<1$ 映到 $|w|<1$.

16. 证明：任何把单位圆盘的内部映到外部的默比乌斯变换具有(12)式的形式，其中 $|\alpha|>1$.

17. 求一个把单位圆盘映到它自身，把 $\mathrm{i}/2$ 映到原点的共形映射.

18. 证明：把 z_i 映到 $w_i(i=1, 2, 3)$ 的默比乌斯变换可以写成如下行列式的形式：

$$\begin{vmatrix} 1 & z & w & zw \\ 1 & z_1 & w_1 & z_1w_1 \\ 1 & z_2 & w_2 & z_2w_2 \\ 1 & z_3 & w_3 & z_3w_3 \end{vmatrix}=0.$$

405

19. 求出所有把上半平面映到上半平面的默比乌斯变换.

20. 证明：任何把上半平面映到开单位圆盘的默比乌斯变换一定具有下面的形式：

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},\quad 其中\quad \mathrm{Im}(z_0)>0.$$

21. 设有一个数学对象的集合 $\mathcal{G}$(诸如数字或映射)，对 $\mathcal{G}$ 上的有序对定义一个运算 $*$，若 $\mathcal{G}$ 满足下列条件，则称它为一个群.

i. 对于运算 $*$，$\mathcal{G}$中元素的任一有序对$(a,\ b)$都有它的唯一元素 $a*b$ 与之对应.

ii. 运算 $*$ 满足结合律，即对任意 $a,\ b,\ c\in\mathcal{G}$，都有

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

iii. $\mathcal{G}$中有一个元素 e(称为单位元)满足下述性质：

$$对任意的 a\in\mathcal{G},\quad e*a=a*e=a.$$

iv. 对于$\mathcal{G}$中的每一个元素 a，存在元素 $a^{-1}\in\mathcal{G}$(称为 a 的逆元)使得

$$a^{-1}*a=a*a^{-1}=e.$$

(a)证明：所有的默比乌斯变换组成的集合$\mathcal{M}$，在映射的复合$\circ$ 的运算下构成一个群(称为默比乌斯变换群).

(b)默比乌斯变换群是交换群(即对所有的 $T,\ S\in\mathcal{M}$，都有 $T\circ S=S\circ T$)吗?

22. 设$\mathcal{L}$是复数域上所有行列式为 1 的 2 阶矩阵的集合：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad ad-bc=1.$$

(a)证明：$\mathcal{L}$在通常矩阵乘法的运算下构成一个群(见习题21 群的定义).

(b)证明：对任意一个默比乌斯变换 T，分子与分母同乘以一个的适当的数后，T 可写成下列形式：

$$T(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

其中 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$，因此 T 可看作与$\mathcal{L}$中的元素

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

406

相对应.

(c)证明：若默比乌斯变换 T_1，T_2 分别与$\mathcal{L}$中元素 S_1，S_2 相对应，其中

$$S_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix}\quad 和\quad S_2=\begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix},$$

那么复合映射 $T_1\circ T_2$ 与矩阵乘积 S_1S_2 相对应.

23. 设 z 是一固定的复数且 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$，令

$$T_0(w)=\frac{a_0}{z+a_0+b_1+w},\quad T_k(w)=\frac{a_k}{z+b_{k+1}+w}\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

是一个默比乌斯变换序列，其中 a_k 为正实数，b_k 为纯虚数或0，用归纳法证明：复合函数

$$\zeta=S(w):=T_0\circ T_1\circ\cdots\circ T_{n-2}\circ T_{n-1}(w)$$

把右半平面 $\mathrm{Re}w>0$ 映到含于圆盘 $|\zeta-1/2|<1/2$ 内的区域.

24. 设 $P(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_n$ 是次数 $n>0$ 的复系数多项式，其中系数 $c_k=p_k+\mathrm{i}q_k$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 令 $Q(z):=p_1z^{n-1}+\mathrm{i}q_2z^{n-2}+p_3z^{n-3}+\mathrm{i}q_4z^{n-4}+\cdots$. 证明沃尔(Wall)判别准则：若 $Q(z)/P(z)$能写成以下形式

$$\frac{Q(z)}{P(z)}=\cfrac{a_0}{z+a_0+b_1+\cfrac{a_1}{z+b_2+\cfrac{a_2}{z+b_3+\ddots+\cfrac{a_{n-1}}{z+b_n}}}},$$

其中每个 a_k 都是正实数，每个 b_k 都是纯虚数或0，那么 $P(z)$的所有零点的实部都小于0.[提示：记$Q(z)/P(z)=T_0\circ T_1\circ\cdots\circ T_{n-1}(0)$，其中变换 T_k 如习题23 中所定义.]

25. 应用上题的结论证明 $P(z)=z^3+3z^2+6z+6$ 的所有零点都在左半平面内.[提示：应用通常的长除法得到 $Q(z)/P(z)$的表达式.]

7.5 施瓦茨-克里斯托费尔变换

由前面可知，若 $f(z)$ 在 D 内解析且每一点的导数都不为 0，则 f 为 D 内的共形映射. 那么，在不满足上述条件的某些孤立点上会发生什么情况呢？具体来说，设 x_1 是实轴上的一个固定点，$f(z)$ 是一个导数为 $f'(z)=(z-x_1)^{\alpha}$ 的函数，其中实数 α 满足 $-1<\alpha<1$. [准确地说，可从 x_1 垂直向下作分支割线，进而分出 $z-x_1$ 的辐角在 $-\pi/2$ 与 $3\pi/2$ 之间，见图 7-31a.]下面，我们应用方程

$$f'(z) = (z-x_1)^{\alpha} \tag{1}$$

407

确定在映射 f 下，实轴的像的一些属性.

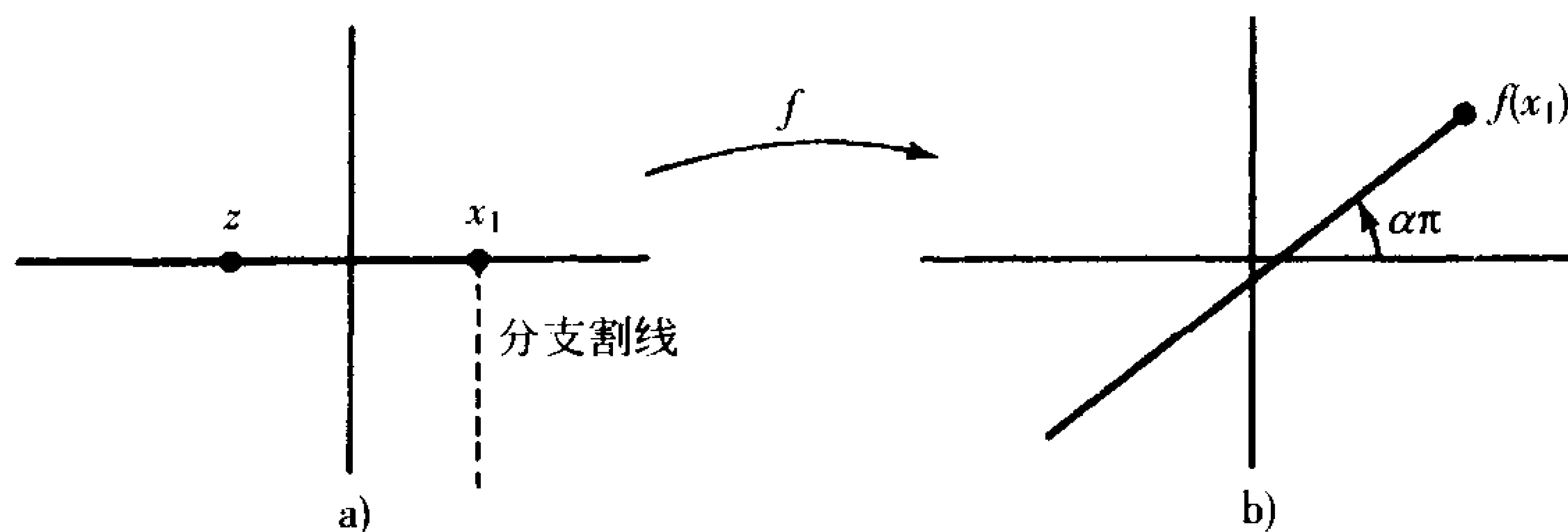


图 7-31 (1)式的几何图示

若 z 在 x_1 左侧的 x 轴上，如图 7-31a 所示，那么由方程(1)可知，f 在点 z 是共形的(因为 $f'(z)$ 存在且不为 0)，并且对于所有这样的 z，$f'(z)$ 的辐角是常数：

$$\arg f'(z) = \arg(z-x_1)^{\alpha} = \alpha\arg(z-x_1) = \alpha\pi$$

(在这里，我们略去了 2π 的倍数). 由此，我们可以断定 f 把区间 $(-\infty, x_1)$ 映射为一条以 $f(x_1)$ 为端点的直线. 毕竟，若把 $(-\infty, x_1)$ 看作一条每点的切线都与实轴平行的曲线，则由 7.2 节的讨论可知，它的像也必是一条曲线，并且该曲线上每点的切线与实轴的夹角都是 $\alpha\pi$，也就是说它是一条直线，如图 7-31b 所示.

若 z 在 x_1 右侧的 x 轴上，则有

$$\arg f'(z) = \alpha\arg(z-x_1) = \alpha\cdot 0 = 0.$$

因此，从上可知，区间 (x_1, ∞) 映成一条以 $f(x_1)$ 为端点的水平直线，如图 7-32b 所示.

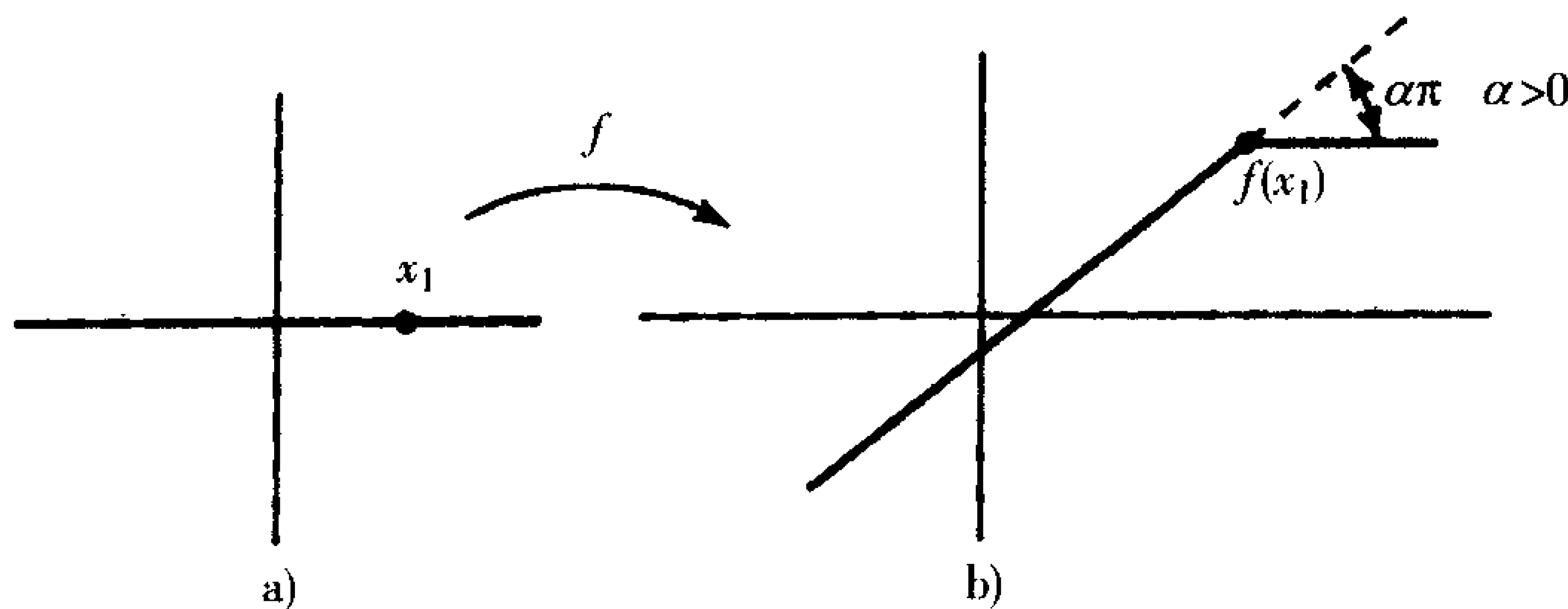


图 7-32 x 轴的映射

对于特殊情况，例如，对于函数 $f(z)=\frac{2}{3}z^{3/2}$，$f'(z)=z^{1/2}$（它的分支割线取下半虚轴），实轴在 f 下的像如图 7-33 所示.

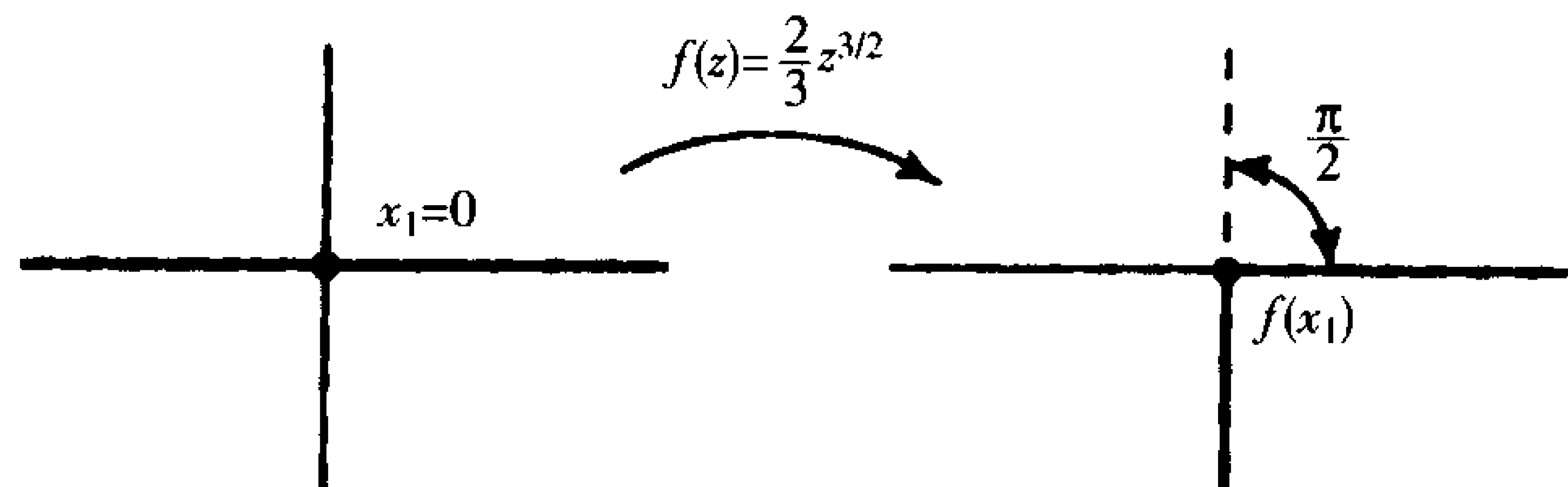


图 7-33 x 轴在 $f(z)=\frac{2}{3}z^{3/2}$ 下的像

现在我们把上述结论推广到一般情形. 若由下式代替(1)式：

408

$$f'(z)=A(z-x_1)^{\alpha}, \tag{2}$$

其中 $A\neq 0$ 为某个复常数，则

$$\arg f'(z)=\arg A+\alpha\arg(z-x_1),$$

可认为 x 轴的像在图 7-32(b)的基础上旋转一个角度 $\arg A$，如图 7-34 所示. 特别地，区间 (x_1, ∞) 的像的辐角是 $\arg A$，不过它在 $f(x_1)$ 的转角没有改变，仍是 $\alpha\pi$.

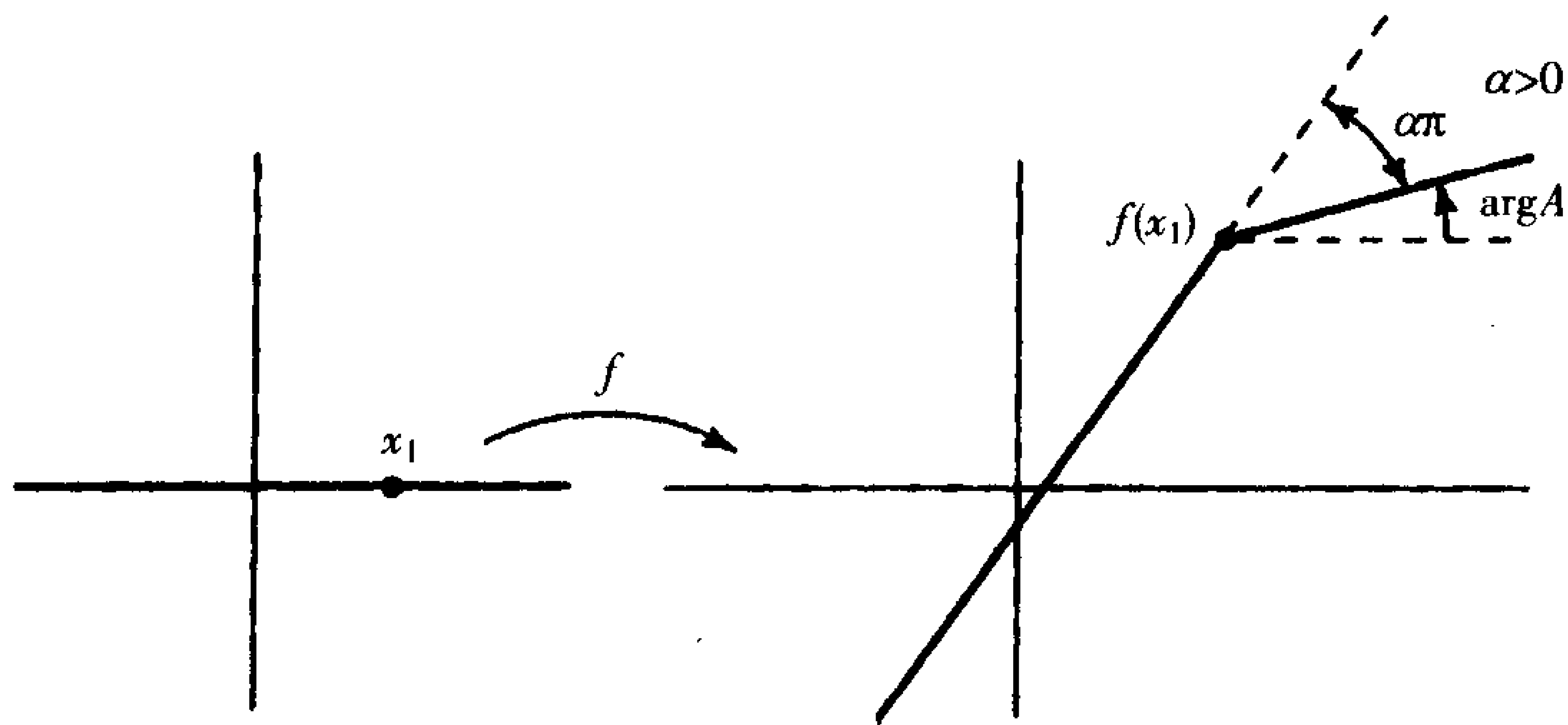


图 7-34 (2)式对应的映射

下面再作进一步推广. 若 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 具有以下形式：

$$f'(z)=A(z-x_1)^{\alpha_1}(z-x_2)^{\alpha_2}\cdots(z-x_n)^{\alpha_n}; \tag{3}$$

其中 $A\neq 0$ 是一复常数，$-1\leqslant\alpha_i\leqslant 1$，$x_i$ 为实数，$1\leqslant i\leqslant n$，且满足 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.（同上，每个 $z-x_i$ 的辐角都在 $-\pi/2$ 与 $3\pi/2$ 之间.）这时实轴在映射 f 下的像是什么呢？

由方程

409

$$\arg f'(z)=\arg A+\alpha_1\arg(z-x_1)+\alpha_2\arg(z-x_2)+\cdots+\alpha_n\arg(z-x_n)$$

和前面的讨论可知，f 把区间 $(-\infty, x_1)$，(x_1, x_2)，…，(x_n, ∞) 分别映成直线的各自部分，并且这些线段的角度可由下述方式从水平方向按逆时针旋转得到：

区间	像的辐角
$(-\infty, x_1)$	$\arg A+\alpha_1\pi+\alpha_2\pi+\cdots+\alpha_n\pi$
(x_1, x_2)	$\arg A+\alpha_2\pi+\cdots+\alpha_n\pi$
$\vdots$	$\vdots$
(x_{n-1}, x_n)	$\arg A+\alpha_n\pi$
(x_n, ∞)	$\arg A.$

因此，当 z 沿 x 轴从左到右移动时，f 就把实轴映射成了一条折线形的路径，且在每点 $f(x_i)$ 的切线方向都向右旋转角度 $\alpha_i\pi$，如图 7-35 所示.

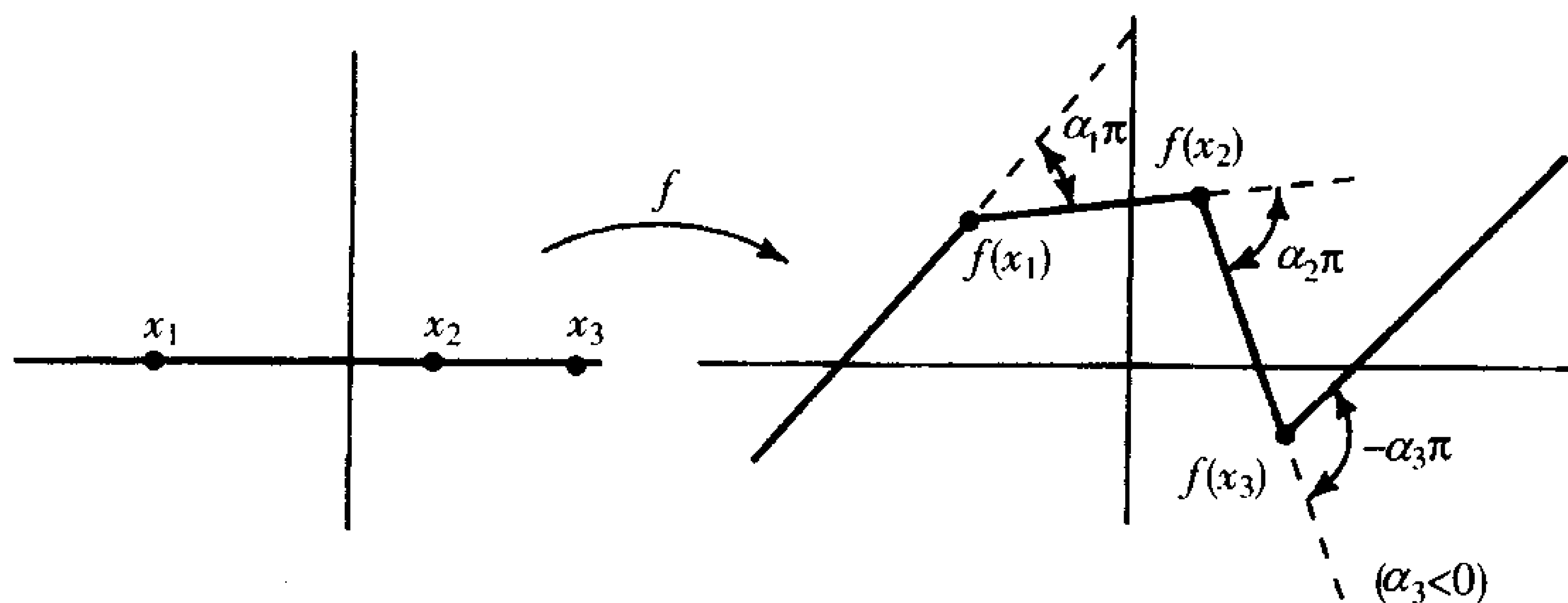


图 7-35 (3)式对应的映射

若函数 $f(z)$ 满足(3)式，则 $f(z)$ 为一个可微函数，从而它在复平面除去点 x_i(向下)的分支割线外的区域上解析，所以对上半平面上任意的 z，可令

$$g(z):=\int_{\Gamma}f'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \tag{4}$$

其中 Γ 是从 0 到 z 的直线段，于是，对于某个常数 B，有 $f(z)=g(z)+B$. 特别地，可写为

$$f(z)=A\int_0^z(\zeta-x_1)^{\alpha_1}(\zeta-x_2)^{\alpha_2}\cdots(\zeta-x_n)^{\alpha_n}\mathrm{d}\zeta+B. \tag{5}$$

形如(5)式的函数称为*施瓦茨-克里斯托费尔变换*[1]，这样的变换把实轴映成了折线形的路径. 共形映射的重要应用之一就是构造上半平面到给定多边形内部区域的一一解析函数，我们可用施瓦茨-克里斯托费尔变换来解决这个问题. 410

具体来说，设 P 为一个多边形，如图 7-36 所示. 顶点 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 取逆时针顺序作为 P 的正向. 按照这个方向沿 P 的边界移动时，在每个顶点 w_i 处的右向旋转角度为 θ_i，当 θ_i 为负值时表示向左旋转. 因此每个旋转角都在 $-\pi$ 和 π 之间. 这样，以逆时针方向沿多边形边界移动一周后，净旋转角为 2π 弧度.

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=-2\pi. \tag{6}$$

为了用施瓦茨-克里斯托费尔变换 $w=g(z)$ 把 x 轴映射到多边形 P 的边界，我们取实轴上的点 $x_1, x_2\cdots, x_{n-1}$ 分别作为多边形的顶点 $w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}$ 的原像，且假定 $-\infty$ 和 $+\infty$ 都是 w_n 的原像，见图 7-37. 由(5)式的讨论可知，函数

---

[1] 施瓦茨(Hermann Amandus Schwarz, 1842—1921)，克里斯托费尔(Elwin Bruno Christoffel, 1829—1900).

$$g(z) := \int_0^z (\zeta - x_1)^{\theta_1/\pi}(\zeta - x_2)^{\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi}\mathrm{d}\zeta \tag{7}$$

把实轴映到某一多边形 P'. 尽管 P'可能不是我们希望的多边形 P, 但对于 $i=1, 2, \cdots, n-1$, 顶点 $g(x_i)$处的右旋转角 $\alpha_i\pi=\theta_i$; 再由 P'的始边和终边相交于 $g(\pm\infty)$, 那么最后的顶点 $g(\pm\infty)$处的右旋转角必为 θ_n(因为 P'的旋转角也满足(6)式).

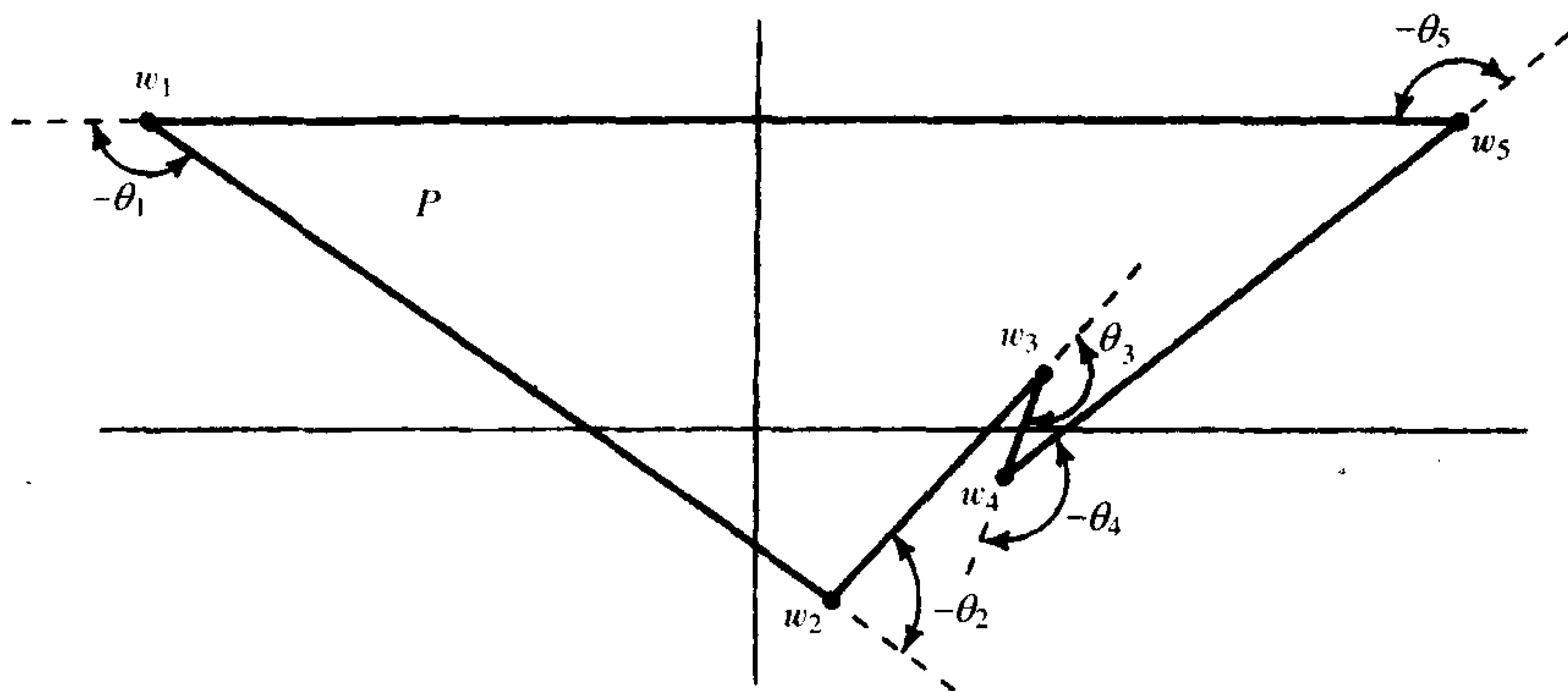


图 7-36 正向多边形(θ_1, θ_2, θ_4, θ_5 是负值)

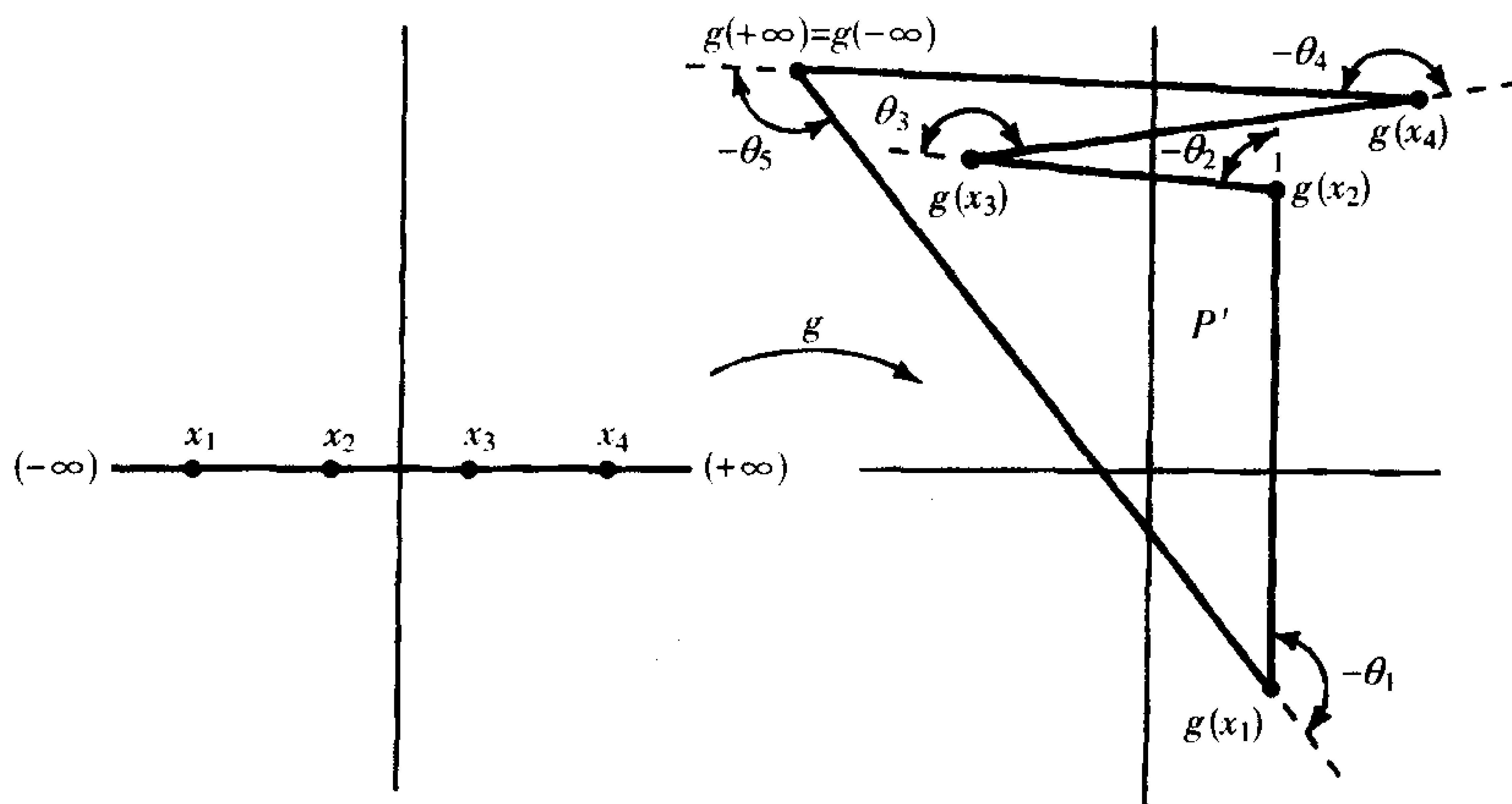


图 7-37 映射(7)

因为 P'和 P 的旋转角相同, 所以只需调整 P'各边的长度, 就可保证 P'和 P 在几何上是相似的. 要做到这一点, 应适当地选取 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$; 毕竟, 它们决定了 P'的各顶点的位置. 然后, 再通过旋转、伸缩和平移变换(也就是线性变换)就可使两个相似多边形一致. [411]

这样, 我们推测, 当选取适当的常数后就可以构造函数, 即施瓦茨-克里斯托费尔变换

$$\begin{aligned} f(z) &= Ag(z) + B \\ &= A\int_0^z (\zeta - x_1)^{\theta_1/\pi}(\zeta - x_2)^{\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi}\mathrm{d}\zeta + B, \end{aligned} \tag{8}$$

它把实轴映到了原来给出的多边形 P 的边界，且满足

$$f(x_1)=w_1,\quad f(x_2)=w_2,\quad \cdots,\quad f(x_{n-1})=w_{n-1},\quad f(\infty)=w_n. \tag{9}$$

此外，如果上面的推测成立，我们就可以应用共形性和连通性证明 f 把上半平面映到多边形 P 的内部. 事实上，设 γ 为上半平面内一条如图 7-38 所示的有向线段，由 f 的共形性可知，它的像 γ' 在起始点的切线方向应指向 P 的内部(如图 7-38 所示)，再由 P 内部的连通性就可完成我们的证明(这是因为 f 是一一映射). 施瓦茨-克里斯托费尔变换由下面的定理 7 给出，该定理的严格证明可在参考文献中找到.

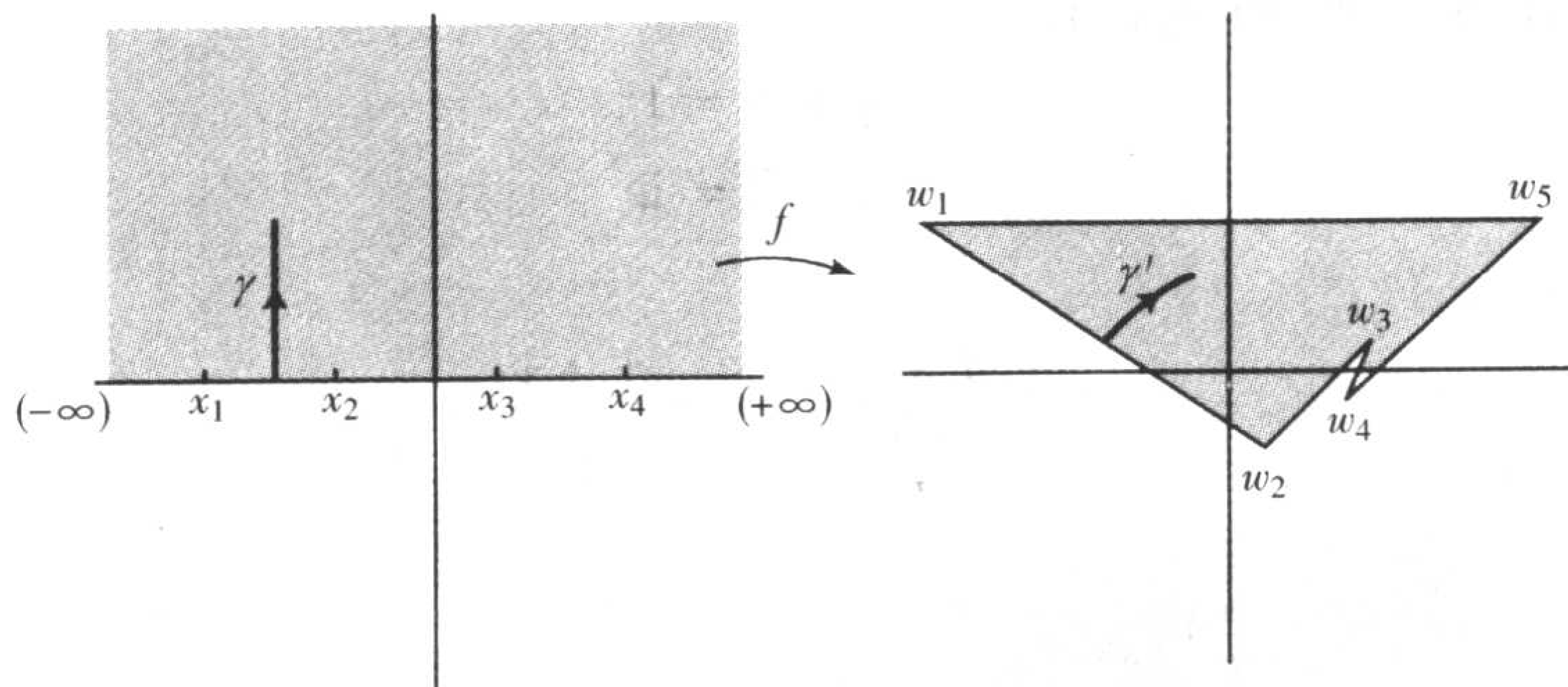


图 7-38　上半平面映到了 P 的内部

> **定理 7**　设 P 是一个正向多边形，按照逆时针顺序它的顶点依次为 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，在 w_i 处的右向旋转角为 $\theta_i(i=1, 2, \cdots, n)$，那么存在一个形如(8)式的函数把上半平面一一地共形映射到 P 的内部，而且对应的(9)式也成立.

412

在看具体的例子前，先做两点说明. 第一，由黎曼映射定理可知，在构造由上半平面到一个多边形内部的映射时有三个“自由度”. 因此，我们可以指定实轴上的任意三个点是三个顶点 w_i 的原像. 不过由(9)式可知已把 ∞ 确定为 w_n 的原像了，所以我们只能自由地选择两个点，不妨设为 x_1 和 x_2，至于其他的 x_i 再另外确定.

第二，要得到映射的具体表达式，就得算出(8)式的积分. 只要浏览一下标准的积分表就知道，$n>4$ 时该积分很难算出，即使较小的 n 也不一定都能算出来. 不过，应用数值积分的方法总是可行的. 在附录 I 中，L. N. Trefethen 和 T. Driscoll 讨论了如何实现这些运算，并提供了有关软件包的参考文献.

例 1　求一个施瓦茨-克里斯托费尔变换，它把上半平面映到如图 7-39 所示的三角形区域.

解　由图 7-39 可知，三角形的右旋转角为：$\theta_1=\theta_2=-3\pi/4$，$\theta_3=-\pi/2$，因此，不妨取 $x_1=-1$，$x_2=1$，则有

$$f(z)=A\int_0^z(\zeta+1)^{-3/4}(\zeta-1)^{-3/4}\mathrm{d}\zeta+B$$

$$=A\int_0^z(\zeta^2-1)^{-3/4}\mathrm{d}\zeta+B.$$

代入具体的数字，该积分就可以算出来. 为了求出常数 A 和 B，我们计算

413

$$f(x_1) = f(-1) = A\int_0^{-1}(\zeta^2-1)^{-3/4}d\zeta + B = A\eta + B,$$

其中

$$\eta := \int_0^{-1}(\zeta^2-1)^{-3/4}d\zeta \approx 1.85(1+i)$$

及

$$f(x_2) = f(1) = A\int_0^{1}(\zeta^2-1)^{-3/4}d\zeta + B = -A\eta + B.$$

令 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 分别等于 w_1 和 w_2，有

$$A\eta + B = 1,$$
$$-A\eta + B = i.$$

因此

$$A = \frac{1-i}{2\eta}, \quad B = \frac{1+i}{2}.$$

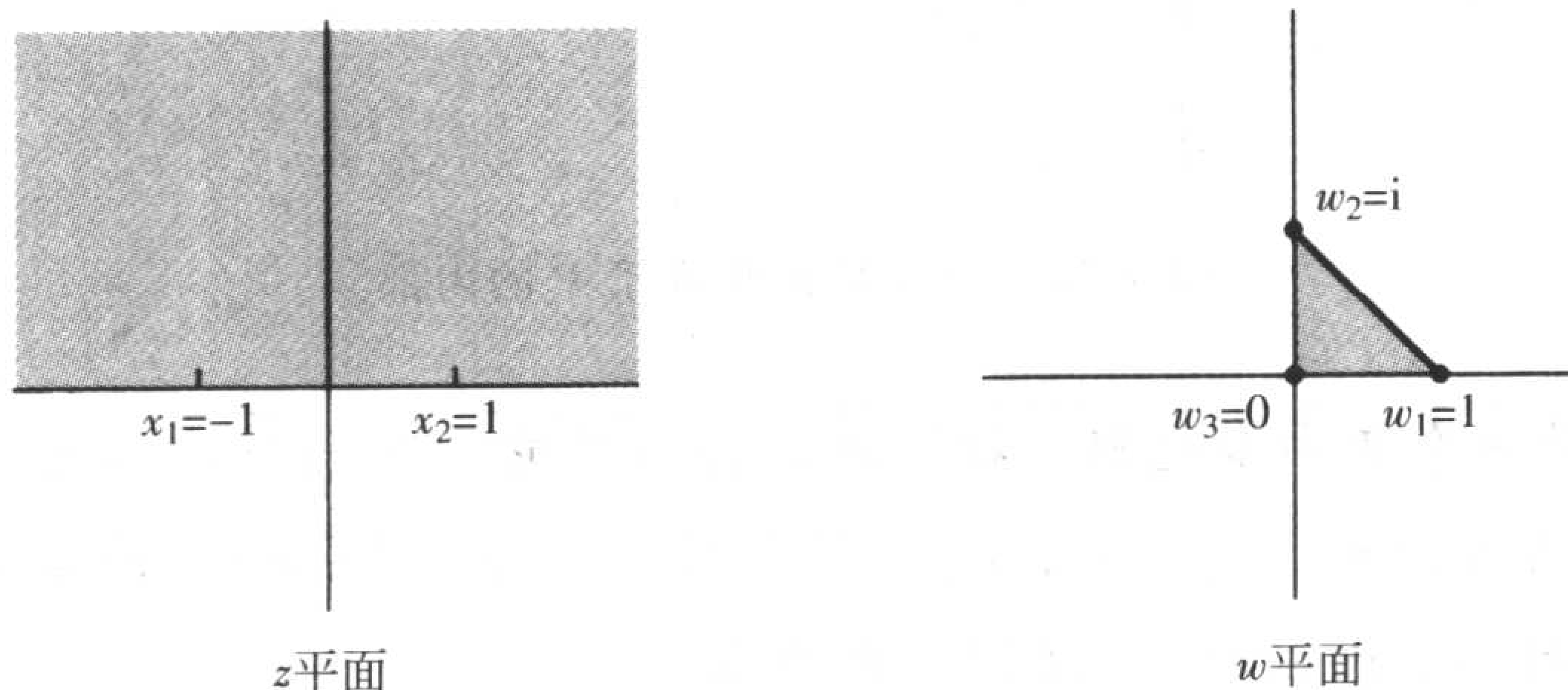


图 7-39 映到一个三角形上 ■

例 2 求一个施瓦茨-克里斯托费尔变换，把上半平面映到半无限带形区域 $|\mathrm{Re}w|<1$，$\mathrm{Im}w>0$（见图 7-40）.

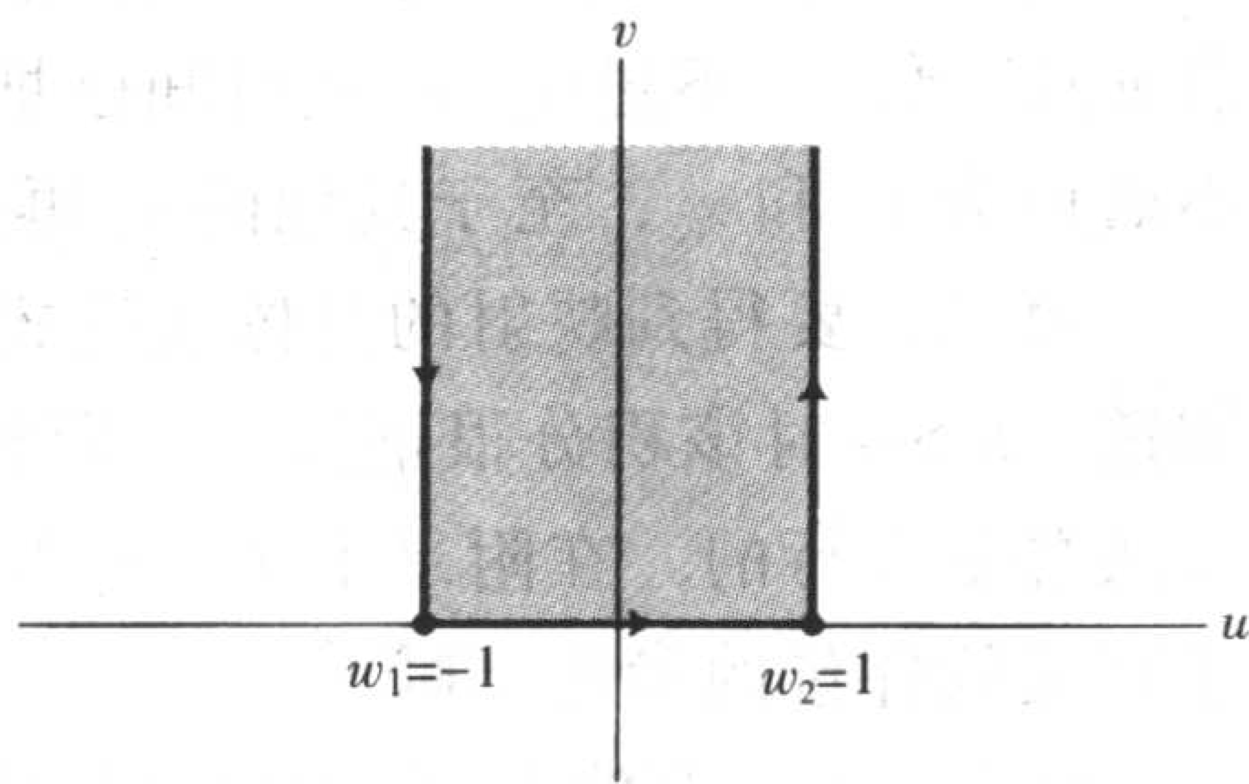


图 7-40 半无限带形区域

解 由前面可知，(3)式把实轴映到了多边形的边界，为了把上半平面映到该带形区域的内部，我们选择如图 7-40 箭头所示的方向，且在 w_1 和 w_2 的向左旋转角度都是 $\pi/2$ 弧度，因此映射 $f(z)$ 的导数具有如下形式：

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-1/2}(z-x_2)^{-1/2}.$$

仍旧选取 $x_1=-1$ 和 $x_2=1$，计算

$$f(z) = A\int_0^z(\zeta+1)^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}d\zeta + B$$

414

$$= \frac{A}{i}\int_0^z\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + B = \frac{A}{i}\sin^{-1}z + B.$$

令 $f(-1)=w_1=-1$，$f(1)=w_2=1$，有

$$-iA\sin^{-1}(-1) + B = -1,$$

$$-iA\sin^{-1}(1)+B=1,$$

解之，得 $B=0$，$A=2i/\pi$，因此所求变换为

$$f(z)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}z.$$

■

例 3 求一个映射，把上半平面映到由第四象限和带形 $0<v<1$ 所组成的区域.（这是大陆架的原始模型.）

415

解 这个区域的边界由直线 $v=1$，负 u 轴和负 v 轴组成. 首先，我们把该区域看作是如图 7-41 所示的多边形的极限形式；然后，选取该区域的方向使得该特定区域为左区域（如图 7-41 所示），在“$w=-\infty$ 附近”的左旋转角为 π，$w=0$ 处的右旋转角为 $\pi/2$. 取 $x_1=-1$ 和 $x_2=1$ 分别为它们的原像. 由(3)式可得

$$f'(z)=A(z+1)^{-1}(z-1)^{1/2}.$$

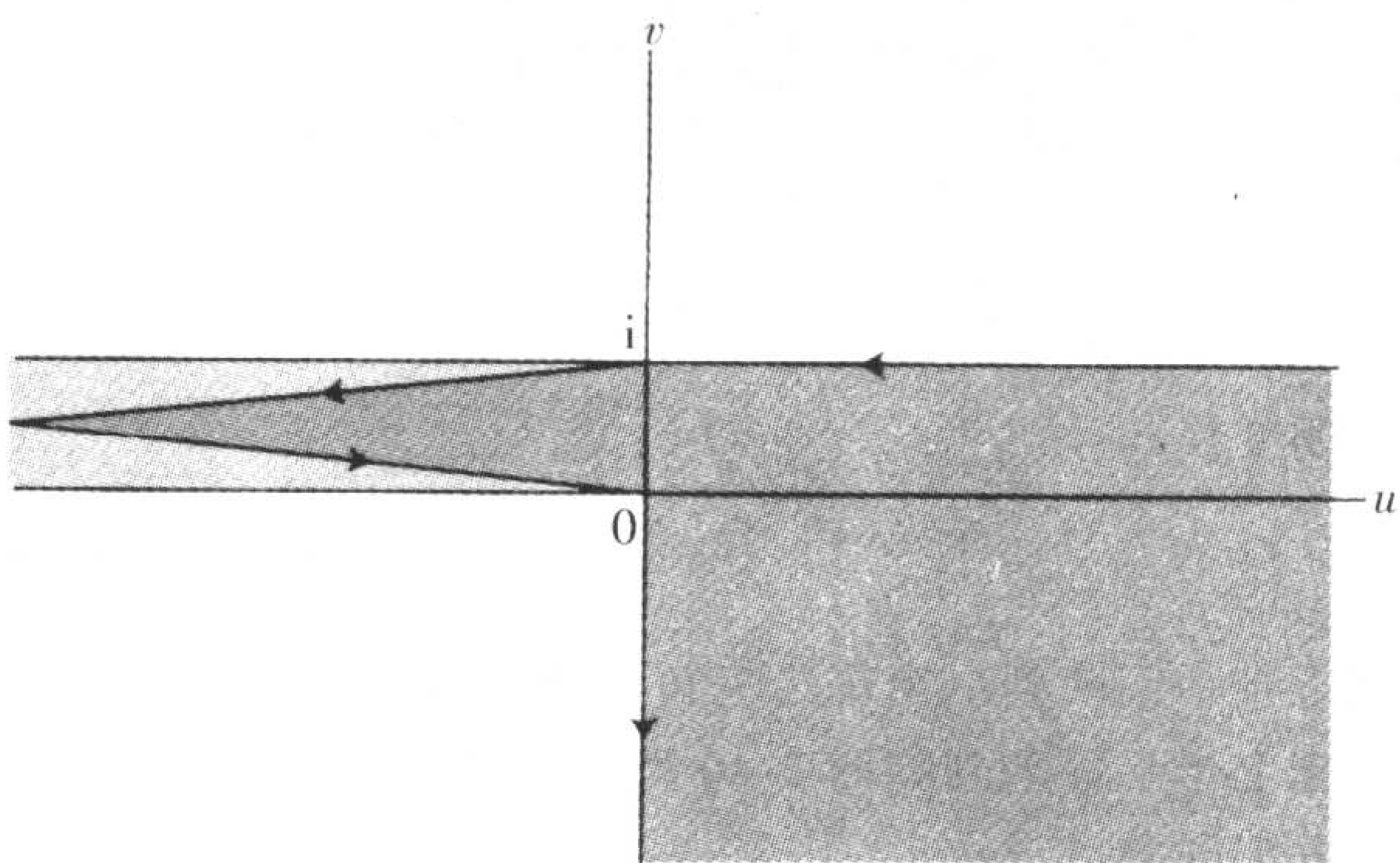


图 7-41 例 3 中的区域

利用积分表，经过整理后得

$$f(z)=Ai\left\{2\sqrt{1-z}+\sqrt{2}\log\frac{\sqrt{1-z}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}+\sqrt{2}}\right\}+B.$$

这里会涉及分支的选择，我们把它留给读者（见习题 6）. 选择分支

$$\log\zeta=\mathrm{Log}|\zeta|+i\arg\zeta,\quad -\frac{3}{2}\pi<\arg\zeta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\zeta}=e^{(\log\zeta)/2},\qquad \log\zeta\text{ 同上},$$

得到映射

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{1-z}+\frac{1}{\pi}\log\frac{\sqrt{1-z}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}+\sqrt{2}}+i,$$

它满足本题要求的条件：

当 $x\to-\infty$ 时，$\quad \mathrm{Re}\,f(x)\to+\infty$，$\quad \mathrm{Im}\,f(x)\to1$

当 $x\to(-1)^-$ 时，$\quad \mathrm{Re}\,f(x)\to-\infty$，$\quad \mathrm{Im}\,f(x)\to1$

当 $x\to(-1)^+$ 时，$\quad \mathrm{Re}\,f(x)\to-\infty$，$\quad \mathrm{Im}\,f(x)\to0.$

$f(1)=0$

当 $x\to+\infty$ 时，$\quad \mathrm{Re}\,f(x)\to0$，$\quad \mathrm{Im}\,f(x)\to-\infty.$ ■

练习 7.5

1. 用本节中的方法，求一个共形映射把上半平面映射到全平面上除去负实轴上 $(-\infty,-1)$ 部分的区域. ［提示：把去掉的区域看作是图 7-42 所示楔形区域的极限形式.］

2. 利用施瓦茨-克里斯托费尔公式推导把上半平面映到第一象限的映射 $w=\sqrt{z}$.

3. 求把上半平面映到如图 7-43 所示的半无限带形区域 $u>0$，$0<v<1$ 的共形映射.

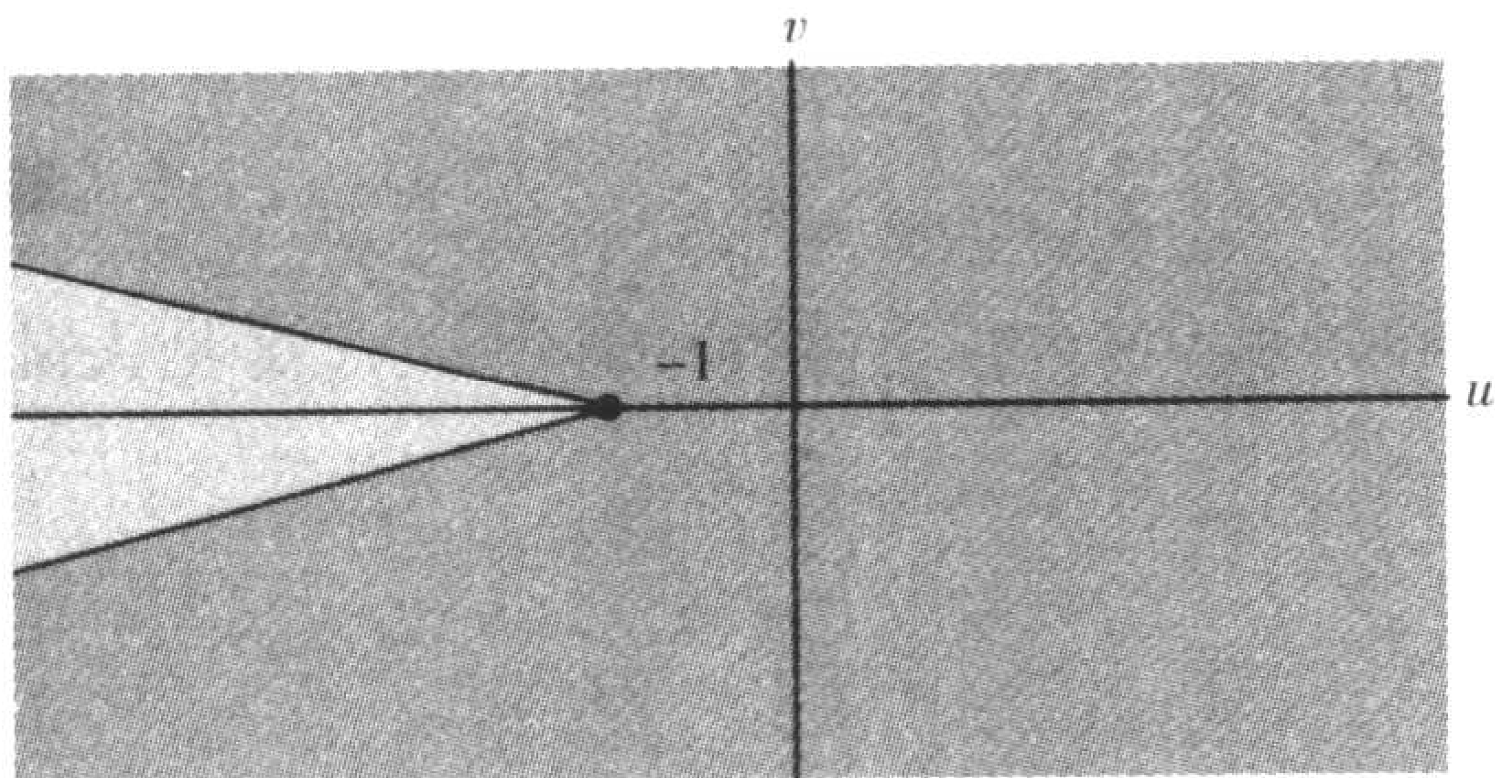


图 7-42　习题 1 中的区域

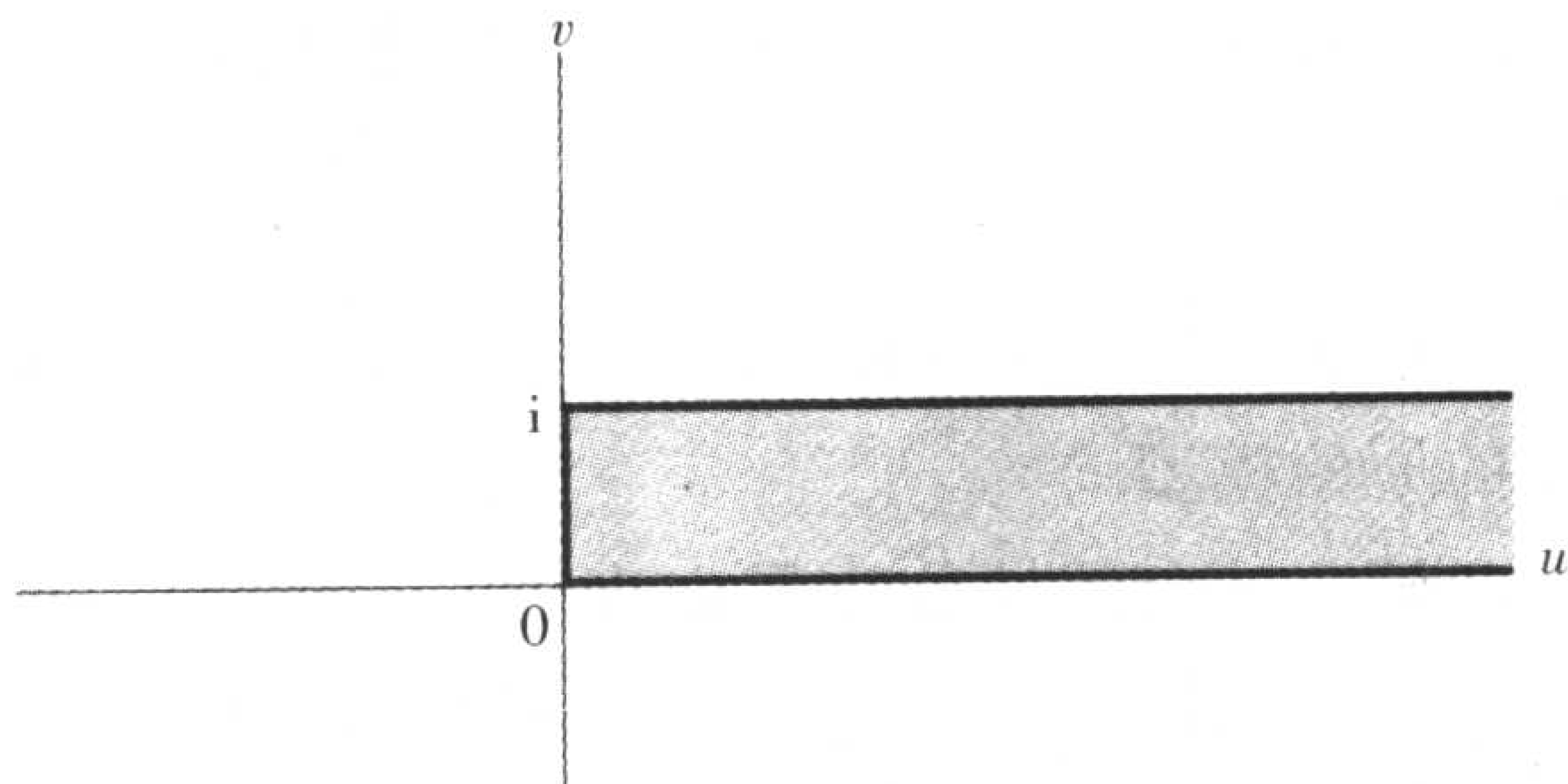


图 7-43　习题 3 中的区域

4. 证明变换

$$w = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)^{2/3}}$$

416　把上半平面映到一个等边三角形的内部.

5. 求把上半平面映到如图 7-40 所示的半无限带形区域外部的共形映射.

6. 验证例 3 中选择的分支使得 $f(-\infty)$，$f(-1)$，$f(+\infty)$，$f(1)$ 与原来的函数值(各 w_i)相对应.

[提示：若 z 在上半平面，那么 $1-z$ 在下半平面，$\sqrt{1-z}$ 在第四象限，且

$$\frac{\sqrt{1-z}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-z}+\sqrt{2}}$$

在下半平面.]

7. 求把上半平面映到如图 7-44 所示的阴影部分区域的共形映射.

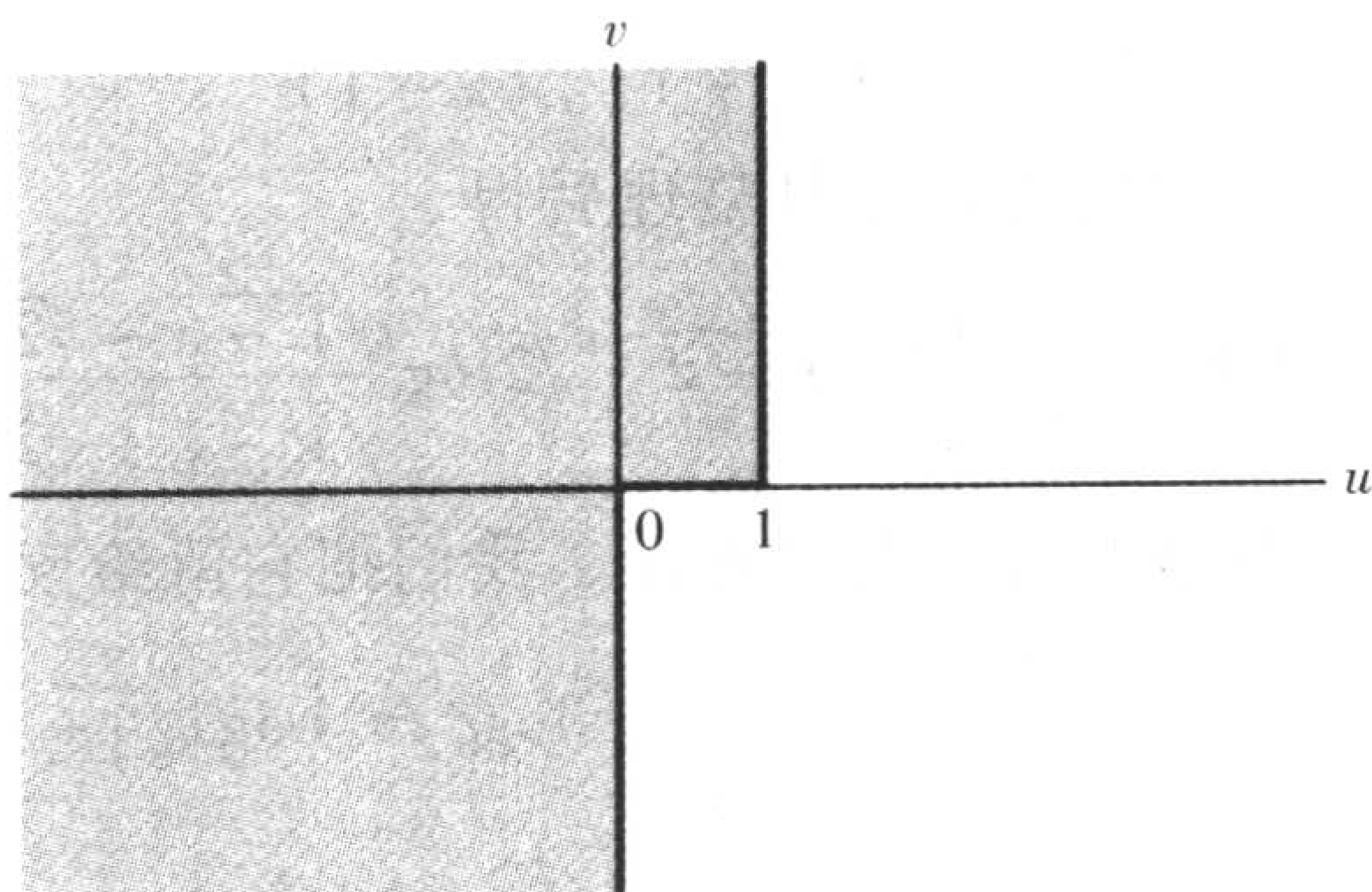


图 7-44　习题 7 中的区域

8. 推导由上半平面映到如图 7-45 所示的矩形区域的共形映射的表达式

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(k^2-\zeta^2)}}.$$

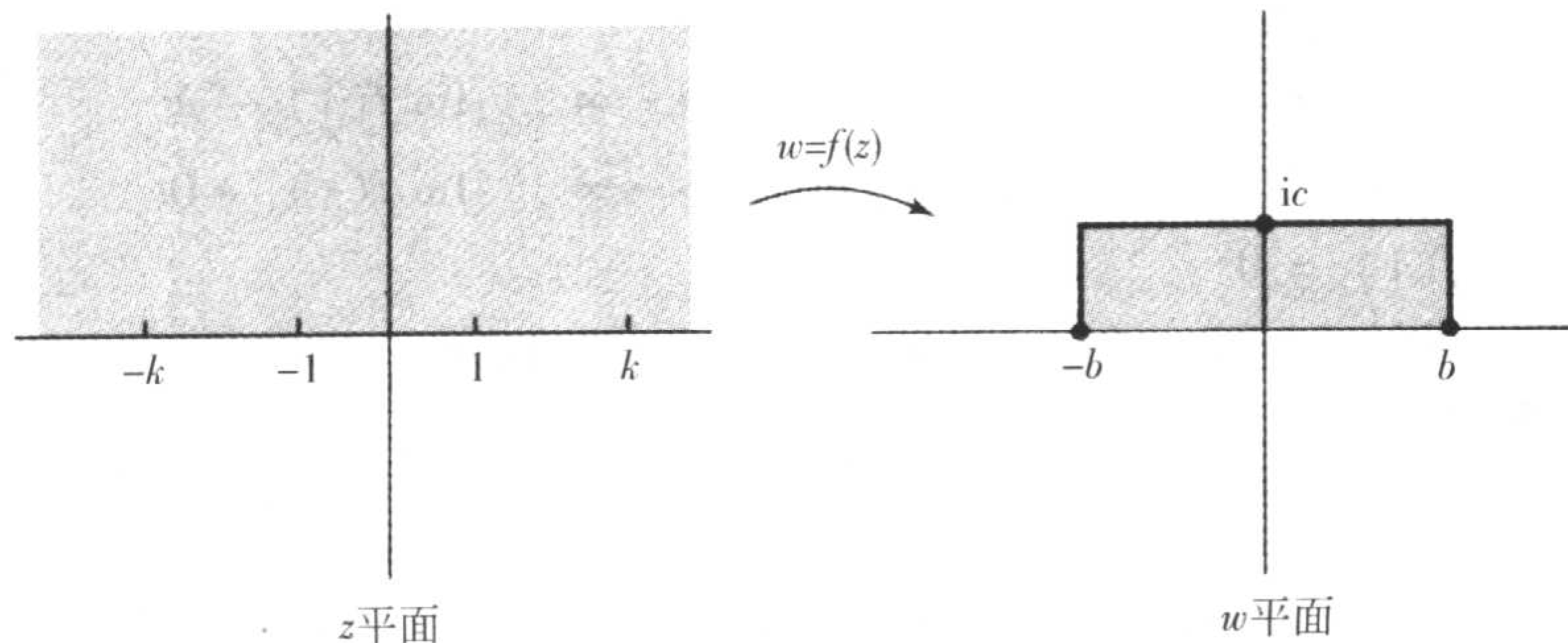


图 7-45　映到矩形区域的映射

证明矩形的长 b 和宽 c 与 k 的关系. 可以由方程

$$b = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2/k^2)}},$$

$$c = \frac{1}{k}\int_1^k \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-1)(1-x^2/k^2)}}$$

确定. (这就是所谓的椭圆积分. 见参考文献[2].)

9. 求一个映射, 把上半平面映到带形区域 $0<v<1$. 该区域可认为是如图 7-46 所示的多边形的极限.

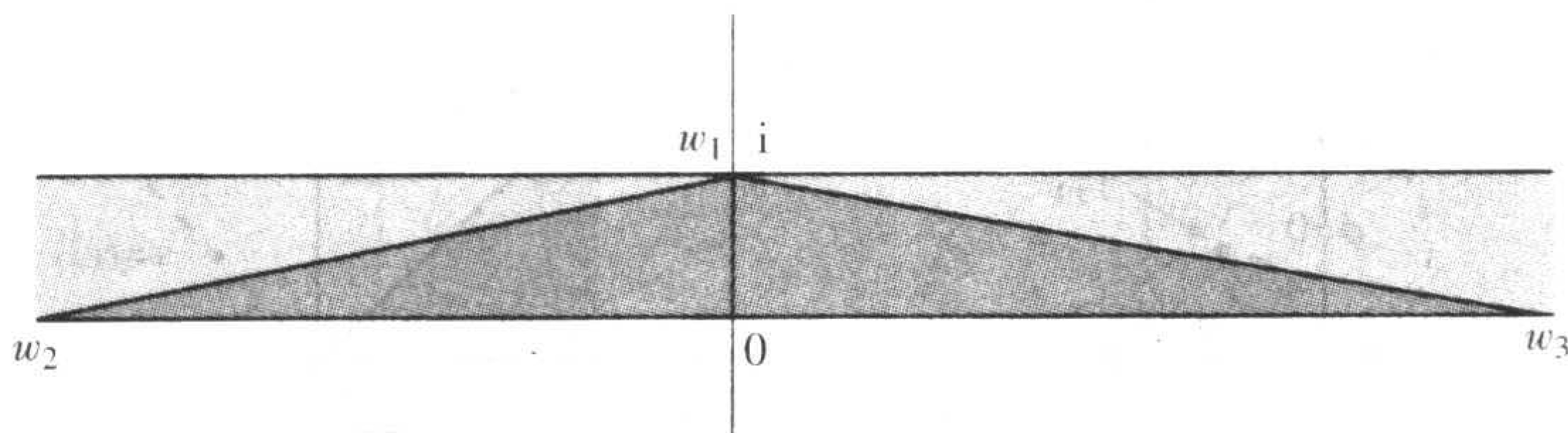


图 7-46 习题 9 中的区域

10. 证明: 设 P 为顶点依次是 w_1, w_2, $\cdots$, w_n 的正向多边形, 则单位圆 $|z|<1$ 到 P 内部的共形映射应具有下面的形式:

$$w = A\int_0^z (\zeta - z_1)^{\theta_1/\pi}(\zeta - z_2)^{\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - z_n)^{\theta_n/\pi}\mathrm{d}\zeta + B,$$

其中 θ_i 是在 w_i 处的右向旋转角, 单位圆上的点 z_i 为相应的 w_i 的原像点.

417 ~ 418

11. 利用施瓦茨反射原理(Schwarz reflection principle)(练习 5.8 中习题 13 和习题 14), 想一想施瓦茨-克里斯托费尔变换把下半平面映成什么区域? [回头考虑一下例 1 和例 2, 然后再看图 7-38 所示的一般情况.]

7.6 在静电学、热流与流体力学中的应用

在本章的下面两节, 我们应用共形映射的技巧解决涉及拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

的一些物理问题.

由前面可知, 在二维稳定状态的热流下(见 2.6 节), (1)式描绘了温度的分布, 函数 $\phi(x, y)$表示温度, $\phi=$常数的曲线是等温线. 通常, 我们假定用理想的热源或吸热设备保持区域一部分边界的温度为固定(指定)的 ϕ 值, 剩余边界是热绝缘的. 在数学上, 后一条件可理解为 ϕ 的法向导数为零, 即$\partial\phi/\partial n=0$, 其中 n 是边界上的法向量. 当然, 关键问题是在区域内找到这样的 ϕ.

在电学上也常常用到(1)式. 在静电学中, $\phi(x, y)$可理解为点(x, y)处的电势或电压, 它的偏导数$\partial\phi/\partial x$ 和$\partial\phi/\partial y$ 用来表示电场强度. 特别地, 我们可以确定区域边界上的电势或电场强度的法向分量, 以及计算区域内部(或外部)的电势值. 由方程 $\phi=$常数定义的曲线称为等势线.

419

流体的流动形式也可由(1)式来分析, ϕ 在流体力学中的解释如下: 曲线 $\phi(x, y)=$常数是流体质点流经的路径, 也就是说, 曲线是流线. 因此, 在研究环绕无孔障碍物的流动时, 障碍物的边界必定是一条流线的一部分, 所以我们指定这里的 ϕ 是常数. 有时, $\phi(x, y)$称为流函数, 关于(1)式的解的更加详细的物理解释, 读者可直接查阅本章最后的参考文献.

如 7.1 节中所示，解决这些问题的基本方法就是：把给定的区域共形映射到一个比较简单的区域，确定出满足“转换的”边界条件的调和函数，然后再把该函数通过共形映射变回到原来的区域.

例 1 在图 7-47a 所示的阴影部分(透镜形状区域)上求一个调和函数 ϕ，且它在边界圆弧上的取值为 0 和 1. 这里的 ϕ 可解释为：一个无限长带型材料内的稳定温度. 它的截面就是透镜区域，且在边界上保持给定的温度.

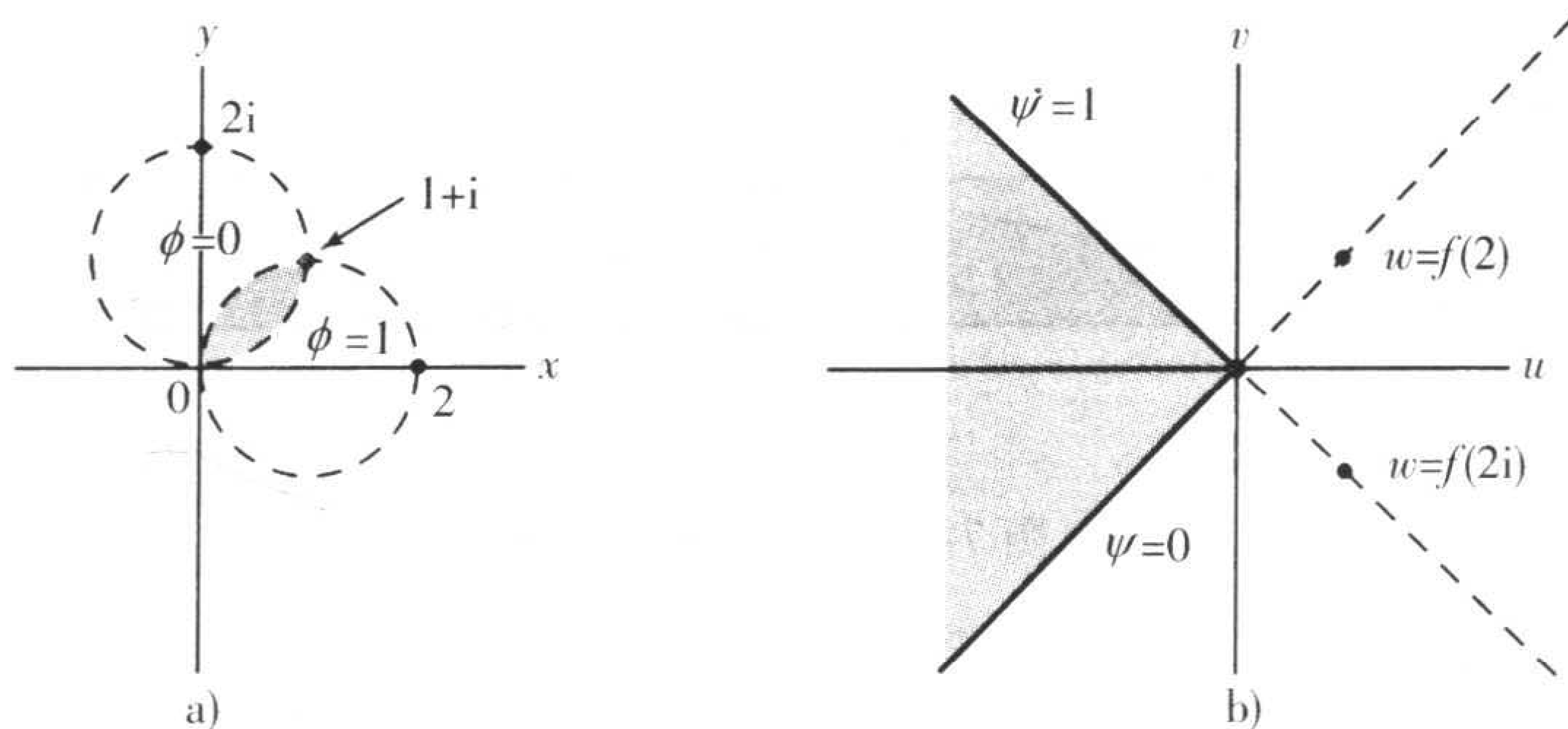


图 7-47 透镜区域和它的像

解 因为该区域是由圆弧围成的有界区域，我们自然想到用默比乌斯变换. 若选取 $z=1+i$ 为该变换的极点，那么两个圆周都变成了两条互相正交的直线，这是因为共形性保证了 $z=0$ 处的角不变. 因此，可考虑函数

420

$$w = f(z) = \frac{z}{z-(1+i)}, \tag{2}$$

它把 $z=0$ 映到 $w=0$，$z=1+i$ 映到 $w=\infty$. 为确定透镜的像，我们注意到 $f(2)=1+i$，$f(2i)=1-i$，因此透镜被映射为图 7-47b 所示的阴影部分的角形区域，边界为射线 $\mathrm{Arg}w=3\pi/4$(圆弧在 $\phi=1$ 处的像)和 $\mathrm{Arg}w=-3\pi/4$(圆弧在 $\phi=0$ 处的像). 用 3.4 节的方法容易得到 w 平面上相对应的调和函数为

$$\psi(w) = -\frac{2}{\pi}\arg w + \frac{5}{2},$$

其中 $\arg w$ 取 $0<\arg w<2\pi$ 的这个分支，由(2)式可得

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{5\pi}{4} - \arg\frac{z}{z-(1+i)}\right),$$

上式可表示为

$$\phi(x,y) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\frac{x-y}{x(x-1)+y(y-1)}\right);$$

这里 $-\pi/2<\tan^{-1}\theta<\pi/2$. ■

例 2 在图 7-48a 所示的阴影区域上，求一个调和函数 ϕ，使得它在内圆周上的取值为 0，外圆周上取值为 1. ϕ 可解释为由两个平行嵌套(不同心)的圆筒状导体组成的一个电容器内的电势.

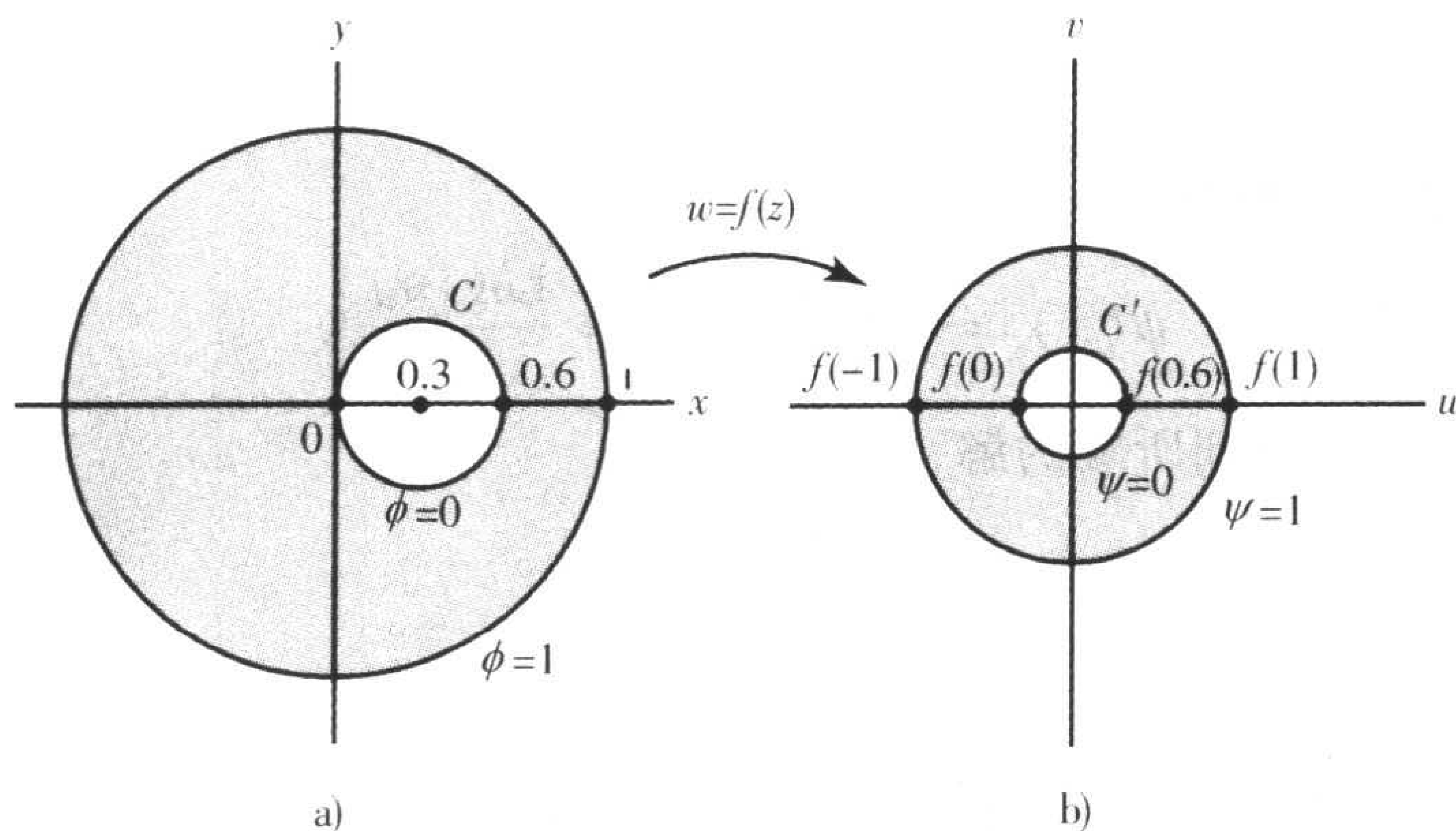


图 7-48 圆筒状电容器

421

解 若内圆周和外圆周是同心的，那么该问题十分简单，由 3.4 节可知，对于环域，它的解就是函数 $A\mathrm{Log}|z|+B$. 因此，我们可尝试把给定的区域映成一个环域(如图 7-48b 所示).

构造这样一个映射的关键在于找一对关于两个圆周同时对称的(实)点 $z=x_1$ 和 $z=x_2$ (练习 7.5 第 11 题证明过这类问题). 为找到这对点，注意到由 x_1 与 x_2 关于外圆周对称，(由 7.4 节(11)式)有

$$x_2=\frac{1}{x_1},$$

若 x_1 与 x_2 关于内圆周对称，则有

$$x_2-0.3=\frac{(0.3)^2}{x_1-0.3}.$$

解上面两个方程组成的方程组，容易得到

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=3.$$

我们做下述将 x_1 映到 0，x_2 映到∞ 的默比乌斯变换

$$w=f(z)=\frac{z-\frac{1}{3}}{3-z},\tag{3}$$

由默比乌斯变换的保对称性，经变换后得到的两个圆周都以 0 与∞ 为对称点，但∞ 点关于圆周的圆心对称[见 7.4 节(11)式]. 因此，这个映射把 z 平面上这两个圆周的圆心都映到了 w 平面上的原点 $w=0$，即把这两个圆映成了同心圆(如图 7-48b 所示).

内圆周像的半径可由下式计算：

$$|w|=|f(0)|=\frac{1}{9},$$

外圆周像的半径是

$$|w| = |f(1)| = \frac{1}{3}.$$

所以，该问题在 w 平面上的解是

$$\psi(w) = \frac{\mathrm{Log}|w|}{\mathrm{Log}3} + 2 = \frac{\mathrm{Log}|9w|}{\mathrm{Log}3}.$$

再变回到 z 平面上，便可得到所求的解

$$\phi(z) = \psi\left(\frac{z-\frac{1}{3}}{z-3}\right) = \frac{\mathrm{Log}\left|\frac{9z-3}{z-3}\right|}{\mathrm{Log}3}$$

422

$$= \frac{1}{\mathrm{Log}3}\left\{\mathrm{Log}3 + \frac{1}{2}\mathrm{Log}[(3x-1)^2+9y^2] - \frac{1}{2}\mathrm{Log}[(x-3)^2+y^2]\right\}.$$

例 3 在圆周 C：$|z-5\mathrm{i}|=4$ 外部的上半平面上求一个调和函数 $\phi(x,y)$，它在圆周上的取值为 1，在实轴上的取值为 0（见图 7-49）．该函数可解释为放在一个可导电平面上的带电圆筒导体所产生的电势.

解 实际上，如果把直线看成一个圆心在无穷点的圆，那么这个函数的构造与例 2 中的相似．因此，我们应找一对关于圆周和直线同时对称的点.

若 z_p 是上半平面内的一个点，显然，它关于 x 轴的对称点是 $\bar{z}_p$．如果 z_p 与 $\bar{z}_p$ 也关于圆周 C 对称，则有（见 7.4 节（11）式）

$$\bar{z}_p = \frac{4^2}{(\bar{z}_p+5\mathrm{i})} + 5\mathrm{i}.$$

解之得 $z_p=3\mathrm{i}$.

同例 2 一样，我们知道默比乌斯变换

$$w = f(z) = \frac{z-3\mathrm{i}}{z+3\mathrm{i}}$$

把 $3\mathrm{i}$ 映到原点，把 $-3\mathrm{i}$ 映到 ∞，把两个导体映成了圆心在原点的两个同心圆周，实轴的像的半径为

$$r_1 = |f(0)| = 1,$$

圆周 C 的像的半径为

423

$$r_2 = |f(\mathrm{i})| = \frac{1}{2}.$$

于是，在圆环 $r_2<|w|<r_1$ 上调和并且在边界上取适当值的函数为

$$\psi(w) = \frac{\mathrm{Log}|w|}{\mathrm{Log}\frac{1}{2}} = \frac{-\mathrm{Log}|w|}{\mathrm{Log}2},$$

所以原问题的解为

$$\phi(x,y) = \frac{-1}{\mathrm{Log}2}\mathrm{Log}\left|\frac{z-3\mathrm{i}}{z+3\mathrm{i}}\right|.$$

注意 z 平面上的等势线是圆周（见图 7-50）.

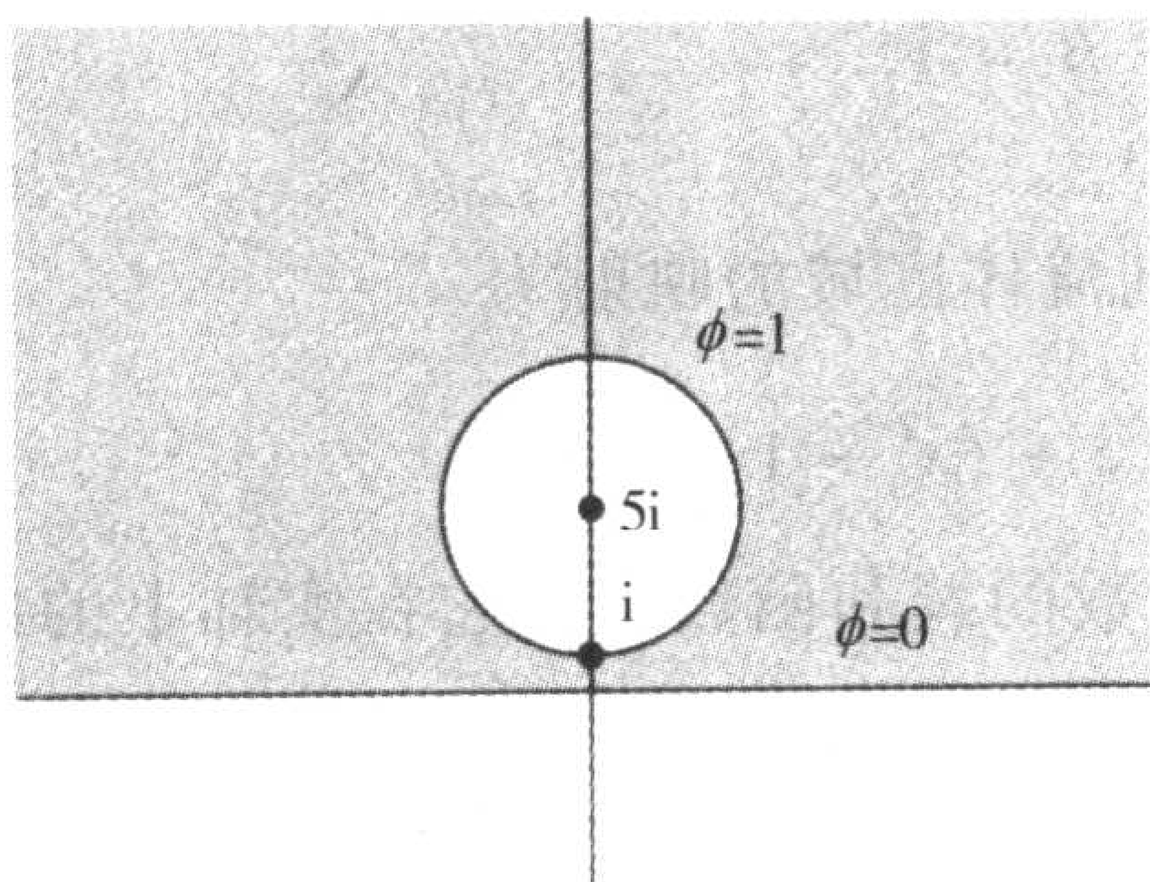


图 7-49　可导电平面上的带电圆筒

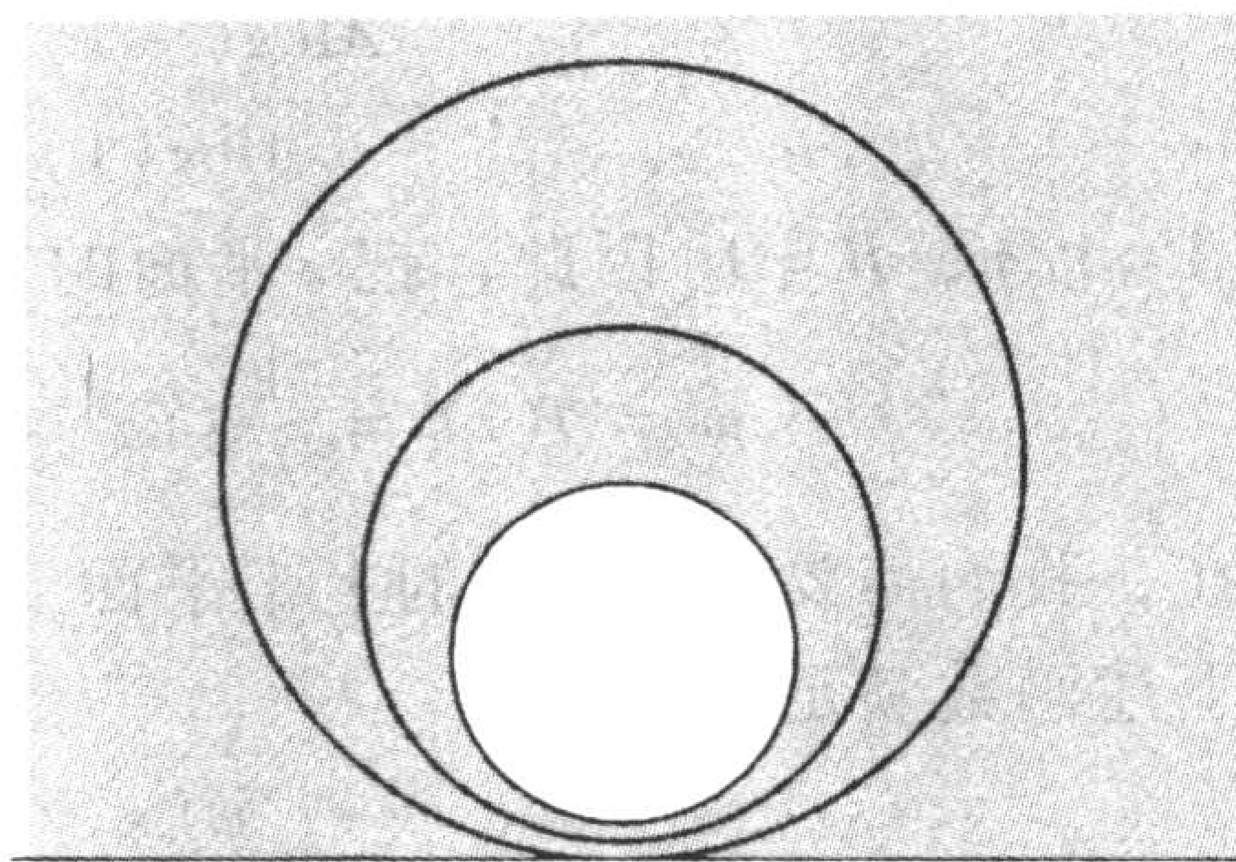


图 7-50　例 3 的等势线 ■

例 4　在图 7-51 所示的无限区域上求一个非常数的调和函数 ϕ，使它在多边形边界上的取值为 0. 图中所画的线表示，当一条深的河流过间断河床时，曲线 $\phi=$ 常数是流线.

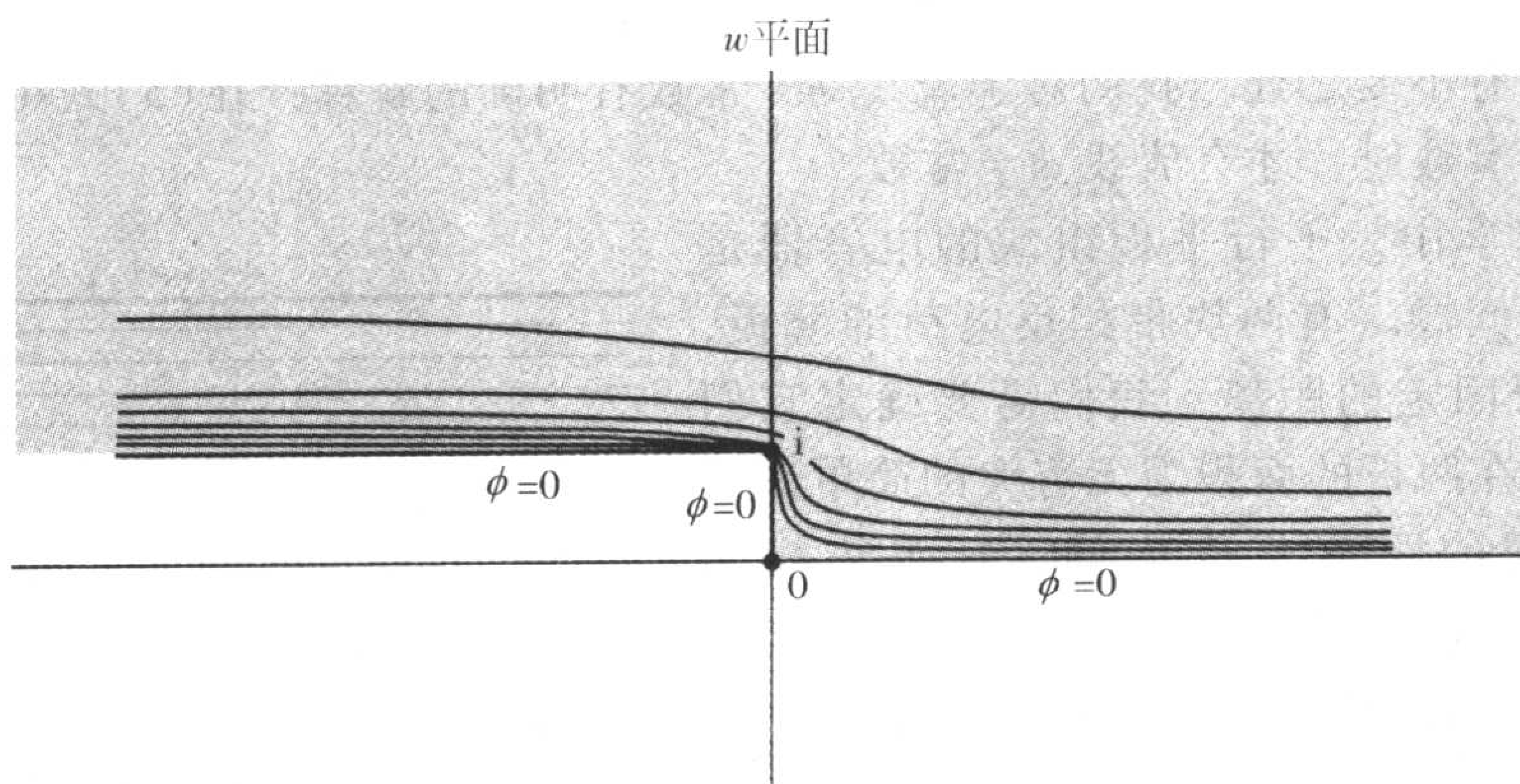


图 7-51　间断河床

解　对于这个几何图形，可应用施瓦茨-克里斯托费尔变换. 由 7.5 节围绕(3)式的分析可知，我们把 x 轴映到 w 平面的间断河床上.（注意施瓦茨-克里斯托费尔变换把已知简单区域映到这个复杂区域）. 设顶点 $w_1=\mathrm{i}$，$w_2=0$ 的原像分别为 $z=-1$，$z=1$. 河床在 $w_1=\mathrm{i}$ 处右向旋转角及在 $w_2=0$ 处的左向旋转角都是 $\pi/2$，因此必有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f'(z)=A(z+1)^{+1/2}(z-1)^{-1/2};$$

查积分表，得

$$w=f(z)=A\{(z^2-1)^{1/2}+\log[z+(z^2-1)^{1/2}]\}+B. \tag{4}$$

[424]

我们取函数在较大实数 z 的函数值是正实数且在上半平面解析的那一分支㊀. 则相对应的 $f(-1)=\mathrm{i}$, $f(1)=0$ 要求

㊀ 这里，我们忽略了很多重要的细节. 在用施瓦茨—克里斯托费尔变换时，分支的选取常常不好把握. 认真思索后，对于(4)式中的 $(z^2-1)^{1/2}$ 选择在较大正数 z 取正值且在较大负数 z 取负值的分支；对于对数函数选择在 $-\pi/2<\arg\zeta<3\pi/2$ 内取值的分支.

$$A\log(-1)+B=Ai\pi+B=\mathrm{i},$$
$$A\log(1)+B=B=0,$$

其解为 $A=1/\pi$，$B=0$. 因此，把 z 平面的上半平面映到流体区域的映射为

$$w=f(z)=\frac{1}{\pi}\{(z^2-1)^{1/2}+\log[z+(z^2-1)^{1/2}]\}. \tag{5}$$

现在，我们需要在 z 平面的上半平面上求一个非常数的调和函数，使它在实轴上的值为 0. 显然，下述函数满足要求：

$$\psi(x,y)=y=\mathrm{Im}(z). \tag{6}$$

（这与 3.4 节中的"壁"几何图形相似）. 要解决题设问题，我们必须把 $\psi(x, y)$ 变回到 w 平面内的流体区域. 然而，由于已经构造了由简单区域到复杂的流体区域的映射 f，因此，只需从 (5) 式中解出它的逆映射再代入 (6) 式即可. 在这里，我们不必考虑如何通过 (5) 式把 z 用 w 表示出来，而只需把所要求的调和函数 $\phi(u, v)$ 简写为

425

$$\phi(u,v)=\mathrm{Im}(f^{-1}(w)).$$

事实上，这并没有不妥之处. 我们对于流线 ϕ = 常数有明确的解释：在 (5) 式中，取 y 是常数，且把 x 看作一个参数时，才有流线 ϕ = 常数. ■

在初等物理学中，平行平板组成的电容器是其中的一个经典问题. 有两块带相反电荷的薄板，它们之间有一个固定的距离，我们需要确定它们之间的电势 ϕ. 在两板的面积为无穷大的简单情况下，ϕ 与两板间的距离 y 成比例，且等势线如图 7-52 所示. 因此，实际问题中，当两板的距离相对于板（大小）比较小的时候，可用上述办法求出 ϕ 的近似值. 不过，板边缘的电势是非常复杂的，它可由共形映射来计算. 例 5 将说明如何求出两个半无限的带相反电荷平板间的电势.

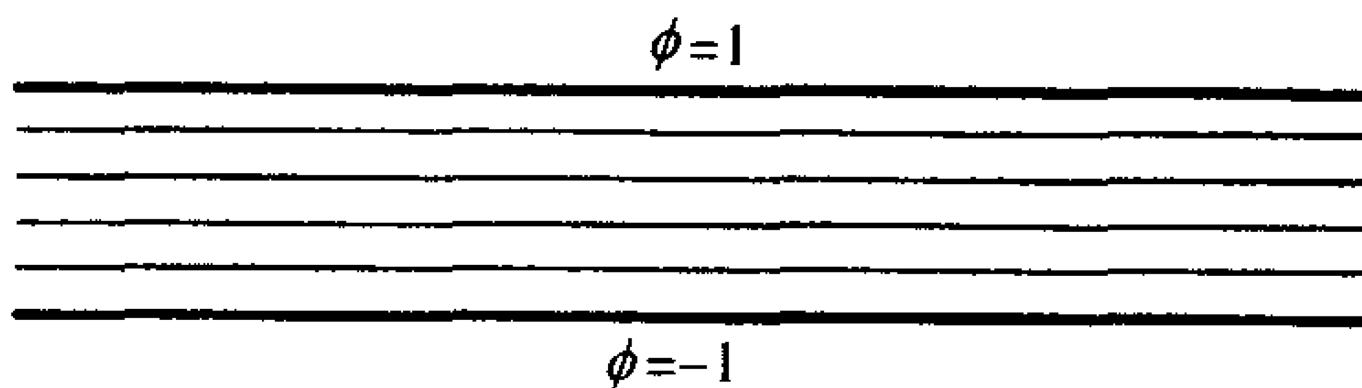


图 7-52　无穷大带电平板

例 5　在一对如图 7-53 所示狭长的平板间求一个调和函数 ϕ，它在两板上的取值分别是 +1 与 −1.

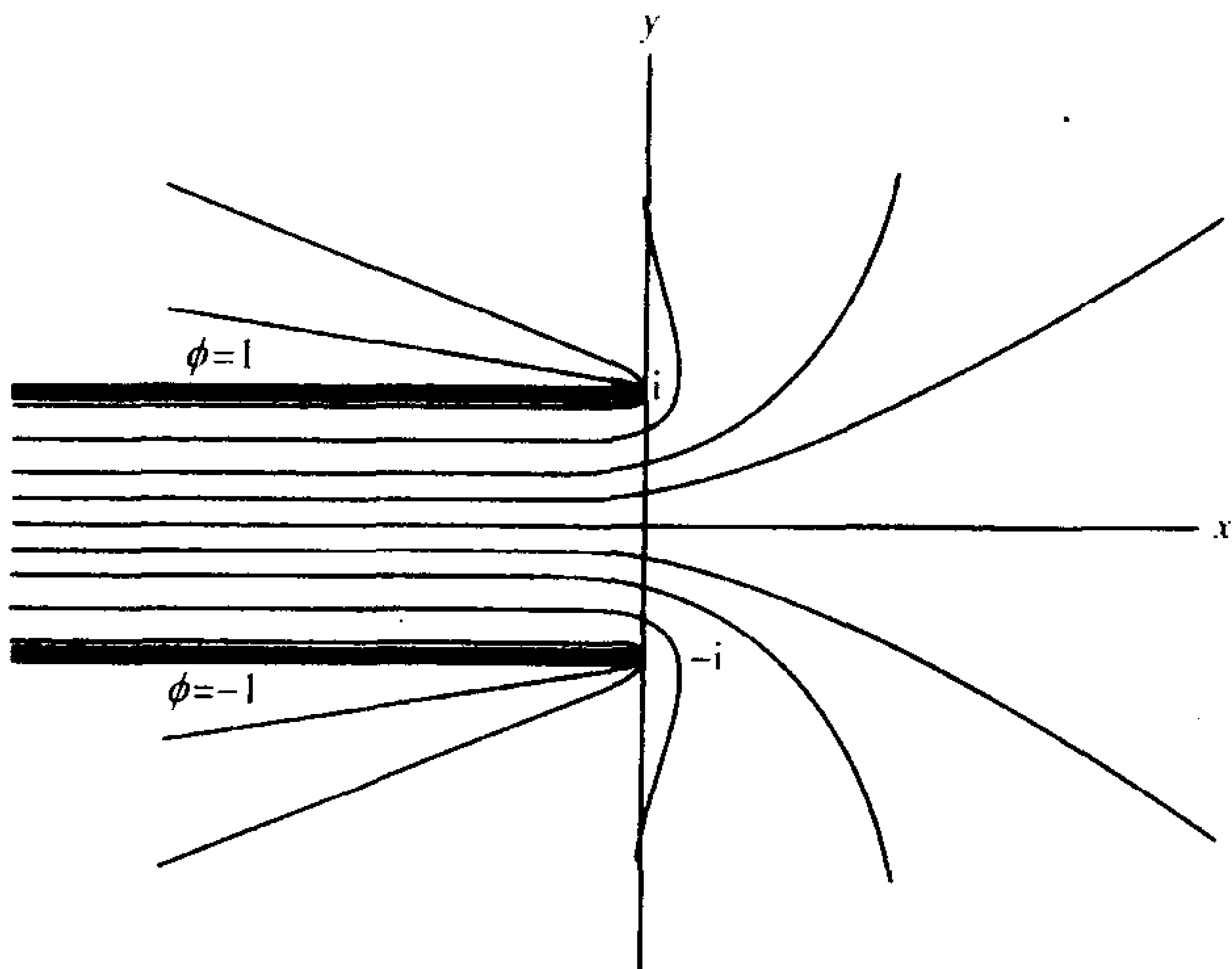


图 7-53　半无界带电平板

解 我们再次应用施瓦茨-克里斯托费尔变换，把给定的区域看成如图 7-54 所示的区域中当点 w_0 趋于 $-\infty$ 时的极限形式. 在点 $w=\mathrm{i}$，$w=w_0$ 及 $w=-\mathrm{i}$ 的极限右向旋转角分别为 π，$-\pi$ 及 π. 如果选取 $z=-1$ 与 $z=0$ 分别为 $w=\mathrm{i}$ 与 $w=w_0$ 的原像，则由施瓦茨-克里斯托费尔变换的保对称性可知，$w=-\mathrm{i}$ 的原像为 $z=1$. 从而，由 7.5 节(3)式可得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=A(z+1)z^{-1}(z-1)=A\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

因此

$$w=f(z)=A\left(\frac{z^2}{2}-\log z\right)+B.$$

由 $f(-1)=\mathrm{i}$，$f(1)=-\mathrm{i}$，并选取 $\log z$ 为对较大的正数 z 取正值的那一个分支，得到

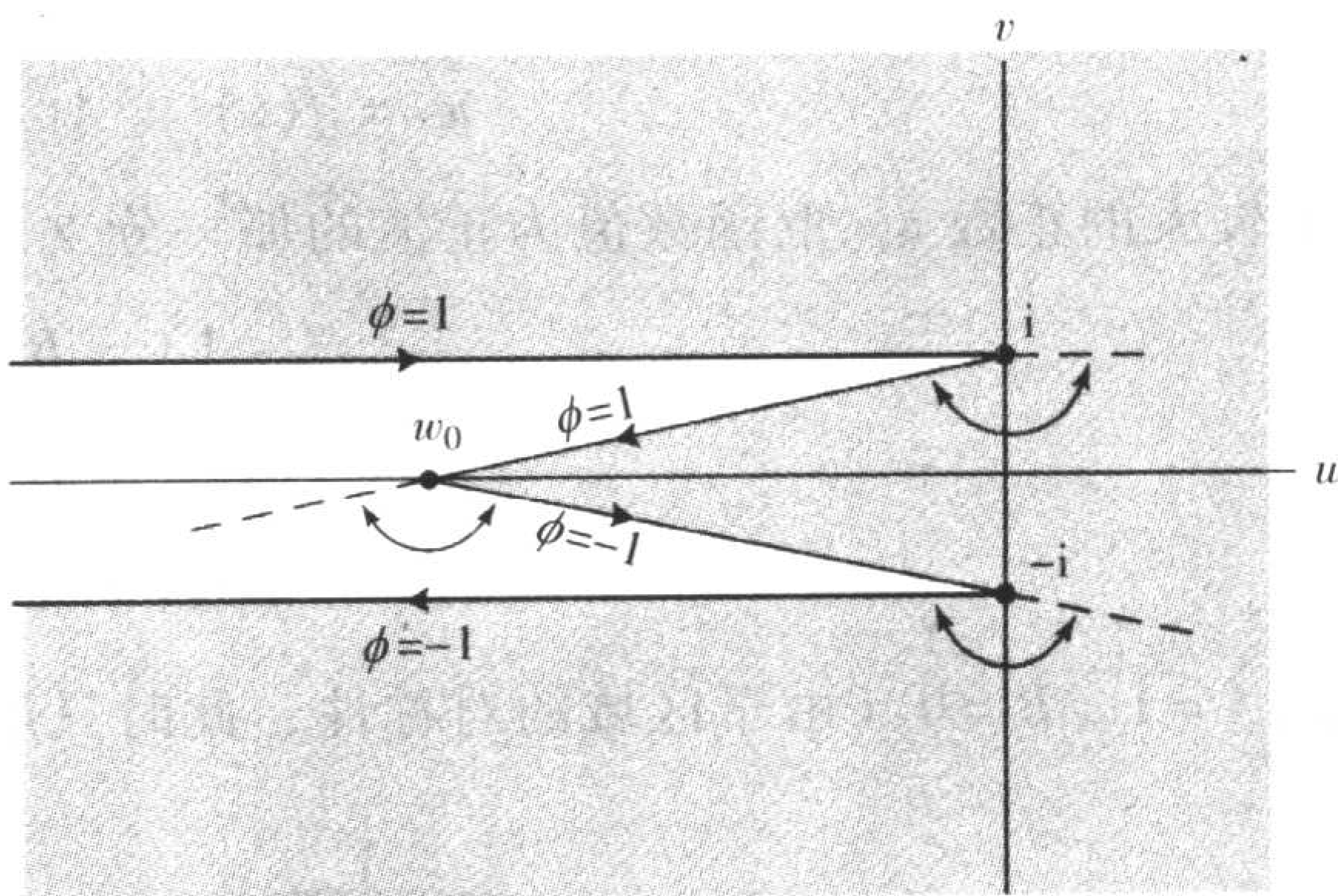


图 7-54 半无限带电板的几何逼近

426

$$A\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\pi\right)+B=\mathrm{i},$$

$$A\left(\frac{1}{2}-0\right)+B=-\mathrm{i},$$

解之，得 $A=-2/\pi$，$B=1/\pi-\mathrm{i}$. 因此，该映射为

$$w=f(z)=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{z^2}{2}-\log z\right)+\frac{1}{\pi}-\mathrm{i}. \tag{7}$$

注意，这里我们并没有验证函数在 $z=0$ 时的条件. 由变换的对称性，这是没有必要的. 容易知道在任何情况下，当 $z\to 0$ 时，$|w|\to\infty$.

变换后的问题如图 7-55 所示. 显然解是

$$\psi(z)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Arg}z-1.$$

此时我们不能求出(7)式的逆函数，但可把(7)式写成关于 r，θ 的参数方程，即

$$w=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-\mathrm{Log}r-\mathrm{i}\theta\right)+\frac{1}{\pi}-\mathrm{i},$$

并且当 r 从 0 到 ∞ 变化时保持 θ 为常数，就可以给出 $\psi=$ 常数的参变量形式. ■

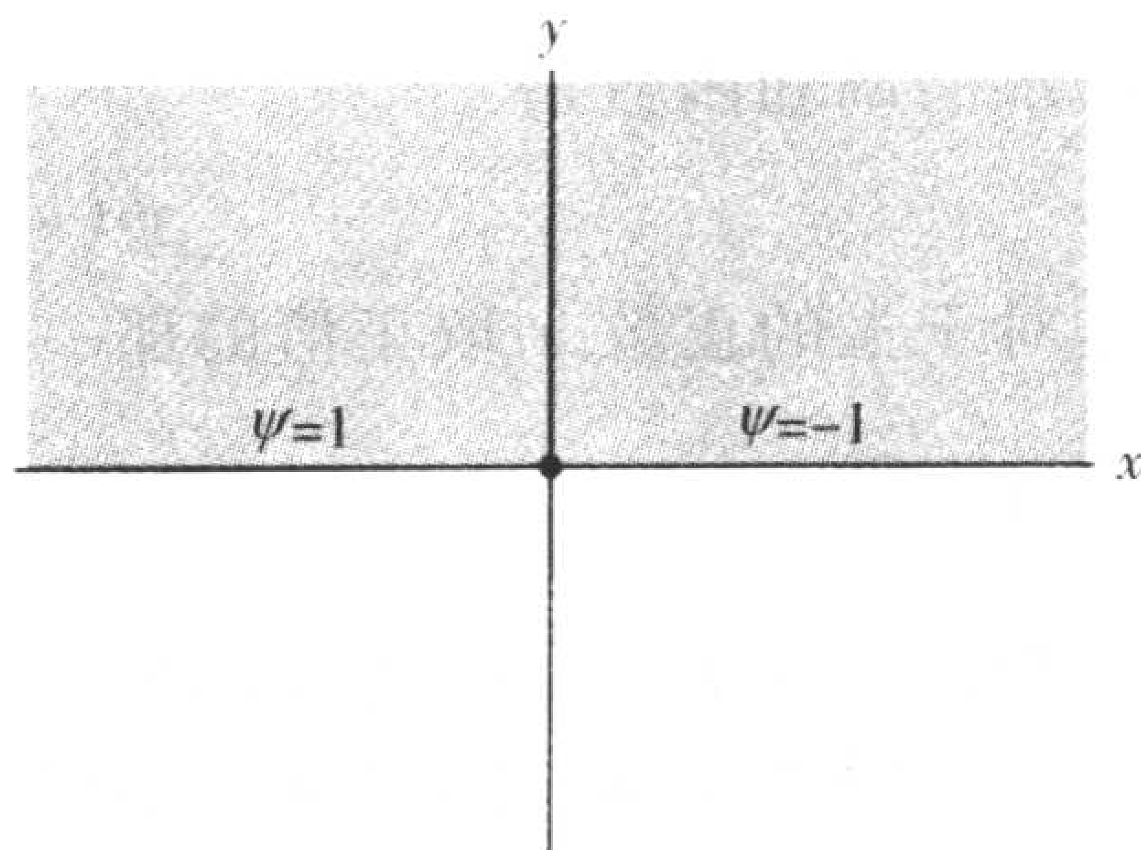


图 7-55 半无限带电平板间的变换问题

例 6 如图 7-56a 所示，在有裂缝的上半平面上求一个非常数的调和函数 ϕ，它在裂缝和实轴上的取值都是0. 线 $\phi=$ 常数可理解为流体越过一个简单障碍物时的流线.

427 ~ 428

解 把所求问题的边界看作图 7-56b 中多边形路径的极限形式. 我们构造一个施瓦茨-克里斯托费尔变换，它把 -1 映到 w_1，0 映到 i，$+1$ 映到 w_2. 当 w_1，w_2 都趋近于0 时，w_1，i，w_2 对应的右向旋转角分别是 $-\pi/2$，π 和 $-\pi/2$. 所以有

$$\frac{dw}{dz}=A(z+1)^{-1/2}z(z-1)^{-1/2}=\frac{Az}{(z^2-1)^{1/2}},$$

及

$$w=f(z)=A(z^2-1)^{1/2}+B. \tag{8}$$

对于较大的正数 z，取函数值为正值的那一分支，可得

$$f(-1)=B=0,$$

$$f(1)=B=0,$$

$$f(0)=Ai+B=i.$$

因此 $A=1$，$B=0$.（由于区域的对称性，此时只用两个常数就能满足三个条件.）

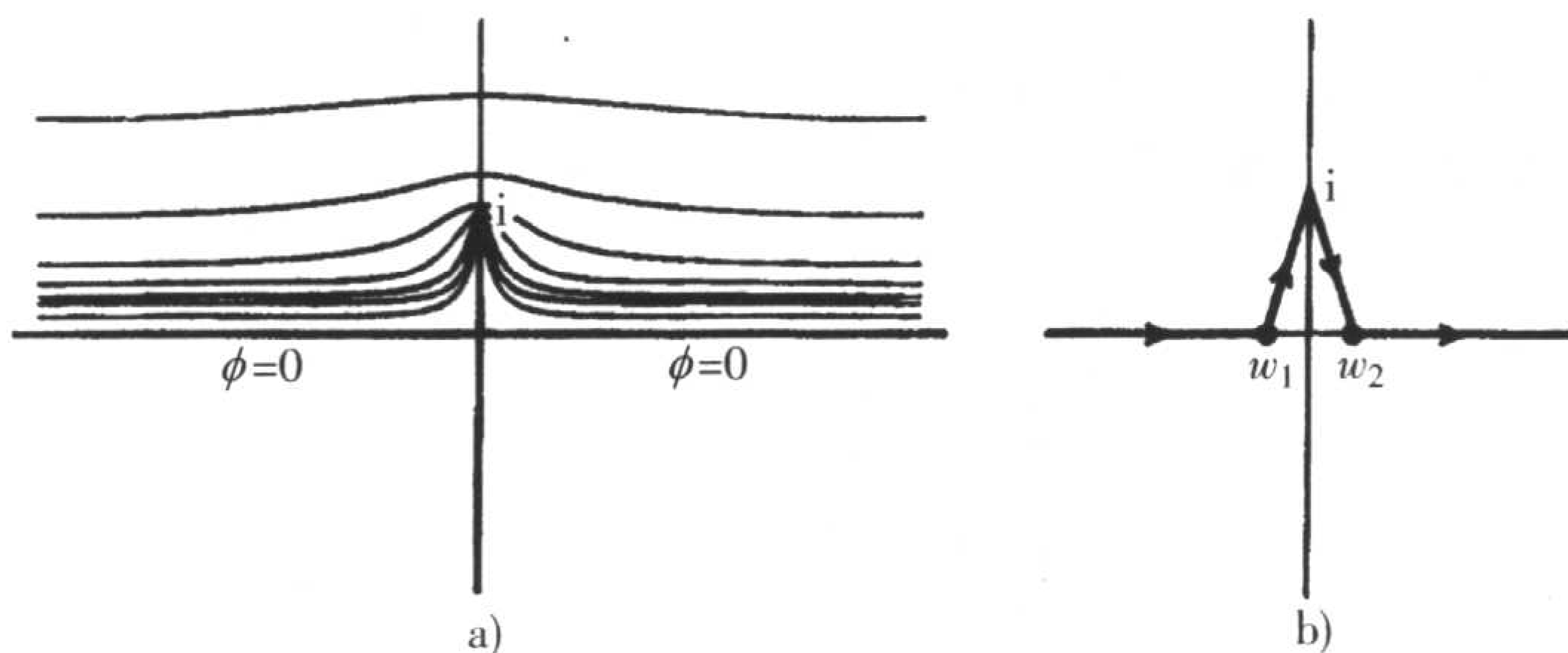


图 7-56　流过一简单障碍物

同例 4 一样，这个问题在 z 平面上转化为求一个非常数的调和函数，它在实轴上的函数值为 0. 所以，仍有 $\psi(z)=\mathrm{Im}z=y$. 此时(8)式的逆映射为

$$z=(w^2+1)^{1/2},$$

从而所求的调和函数是

$$\phi(u,v)=\mathrm{Im}\{(w^2+1)^{1/2}\},$$

429 这里是对于大的正数 w 取正值的那一分支. ■

练习 7.6

1. 求半圆盘上的电势 ϕ，其在边界上的取值如图 7-57 所示.

2. 求上半平面在单位圆周外部区域上的电势，使其满足图 7-58 所示的条件.

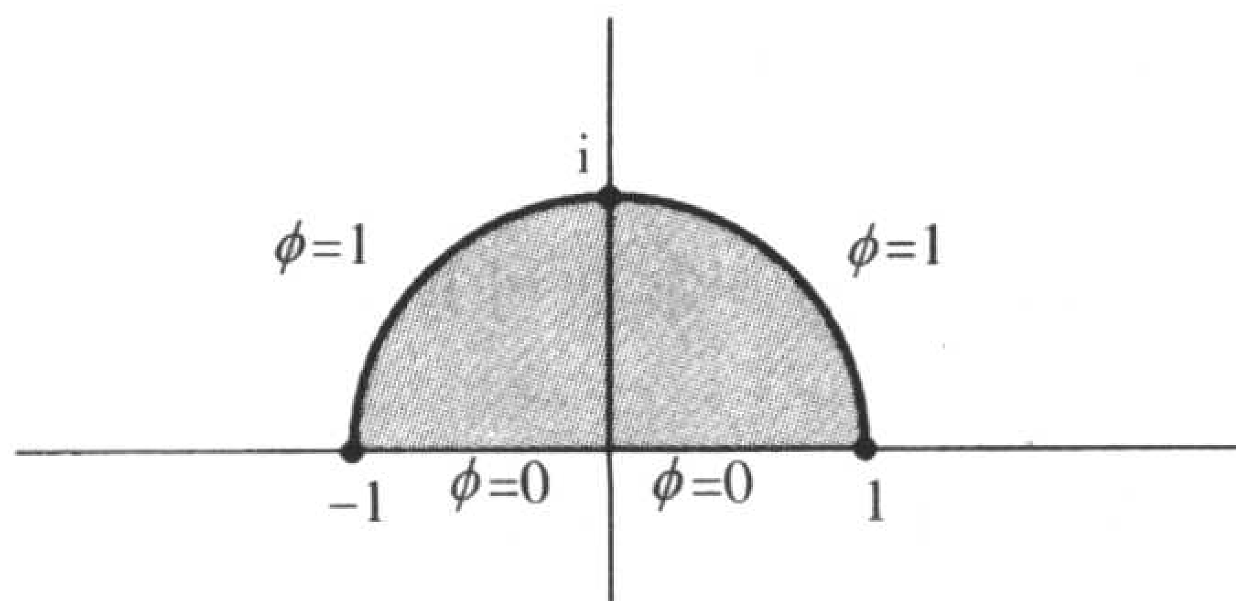


图 7-57　习题 1 的区域

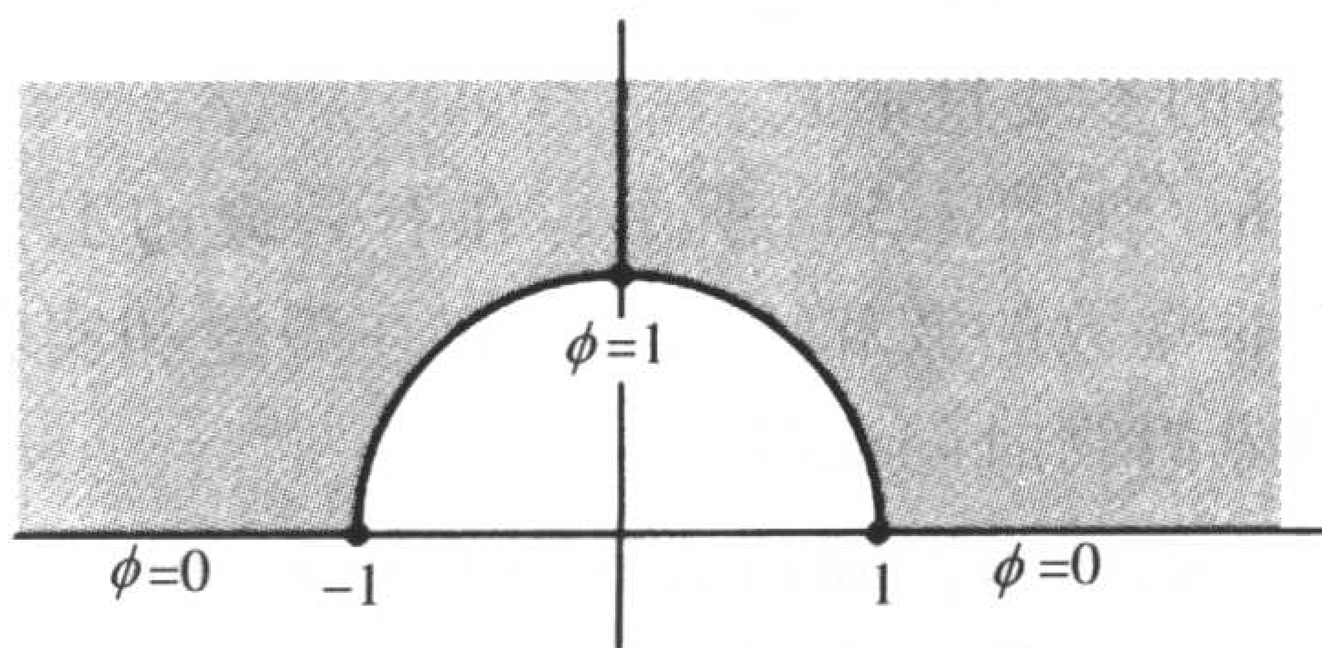


图 7-58　习题 2 的区域

430

3. 求如图 7-59 所示区域上的温度分布.

4. 求单位圆盘上的温度分布，使其在边界上的取值如图 7-60 所示.［提示：把已知区域映到上半平面，然后用练习 7.1 的习题 3.］

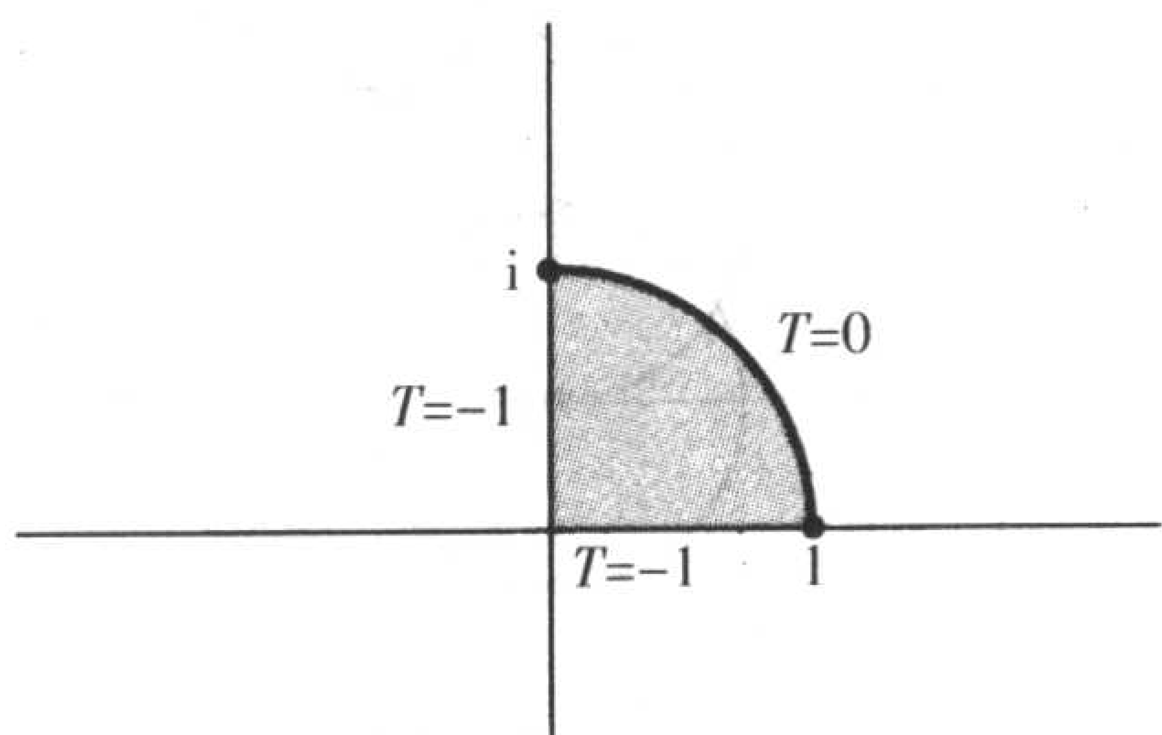


图 7-59 习题 3 的区域

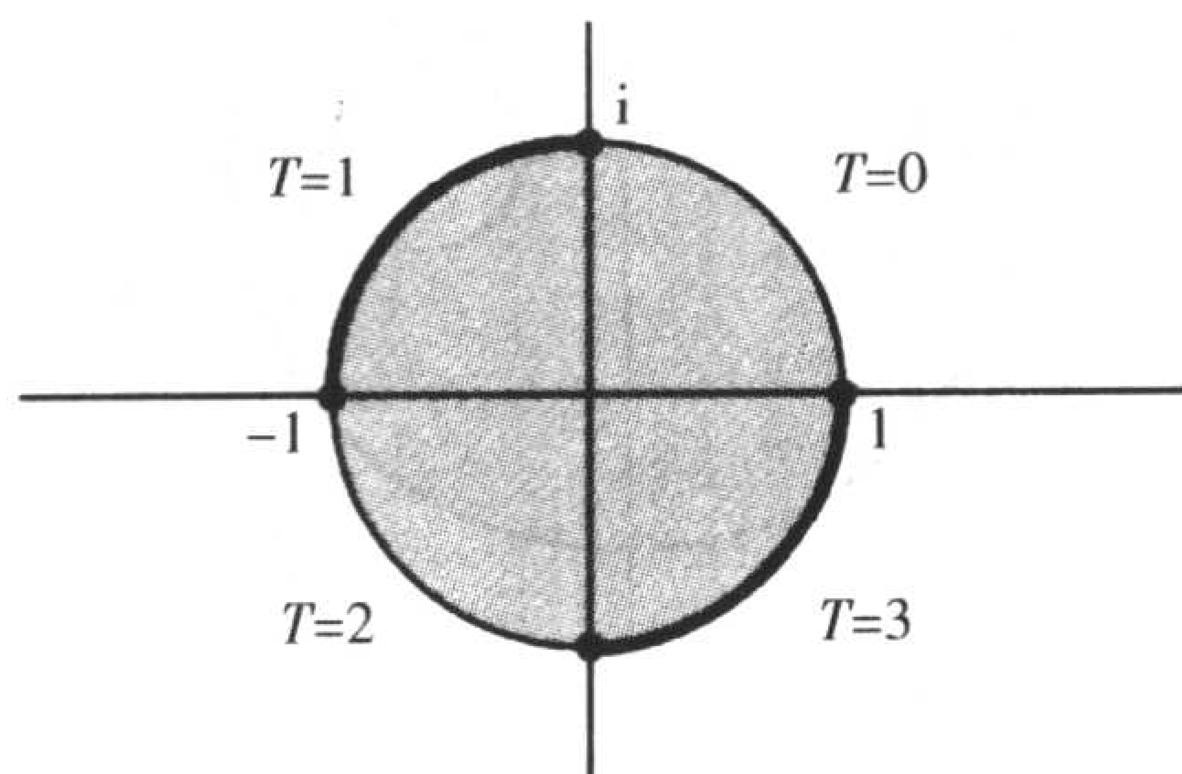


图 7-60 习题 4 的区域

5. 求有裂缝的上半平面的电势，使其在边界上的取值如图 7-61 所示.

6. 求两圆筒形导体之间的区域的电势 ϕ，使其满足如图 7-62 所示的条件.

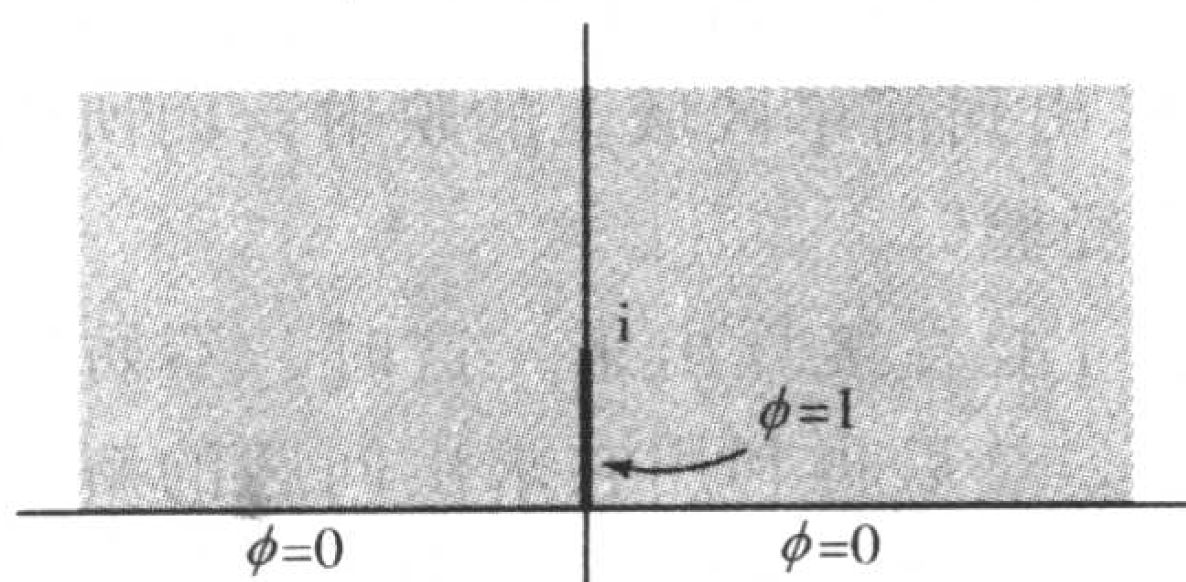


图 7-61 习题 5 的区域

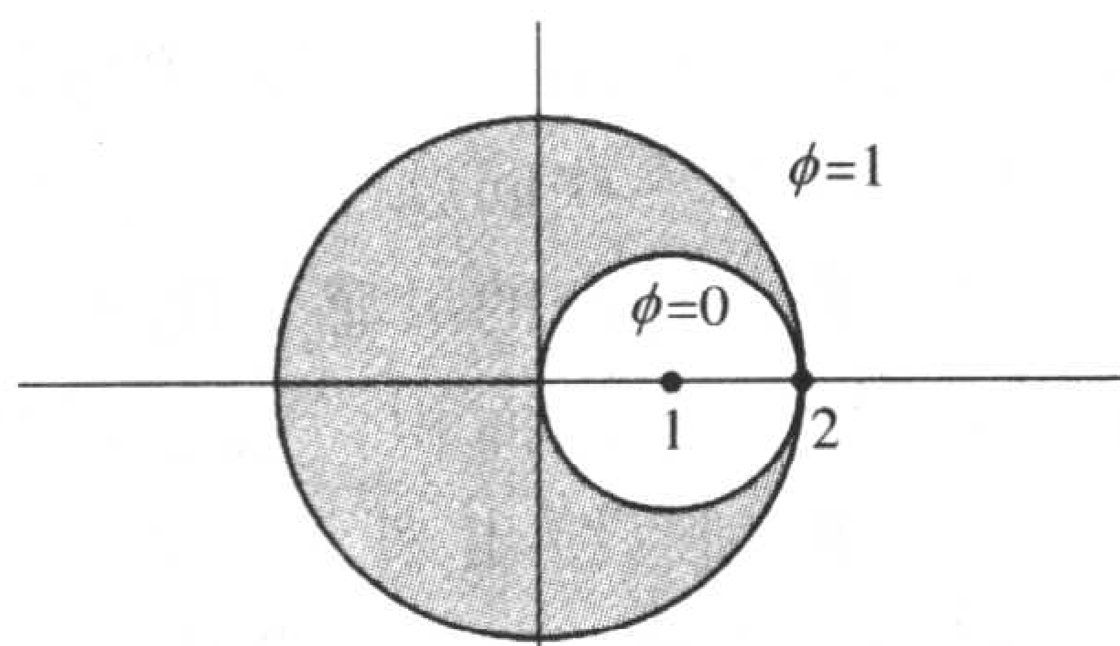
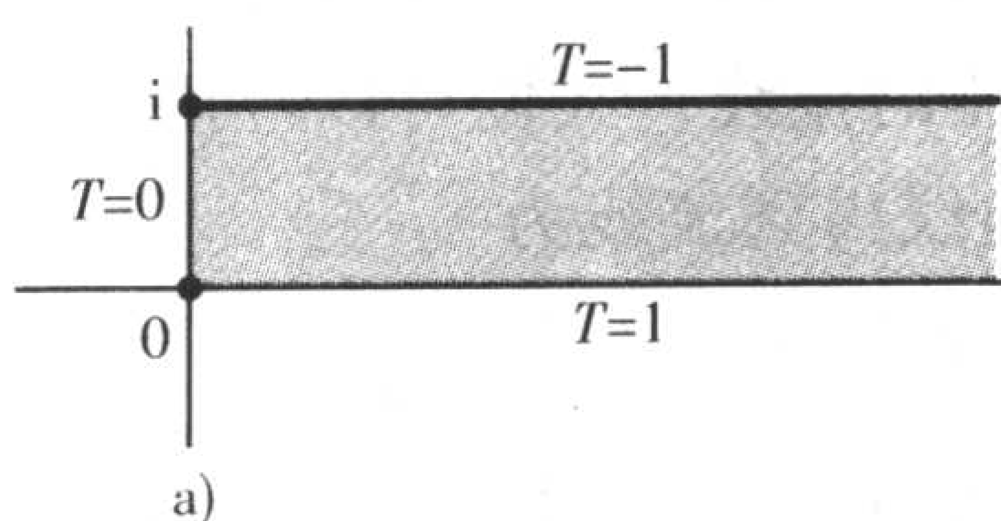


图 7-62 习题 6 的区域

431

7. 求如图 7-63 所示的无限区域内的温度.



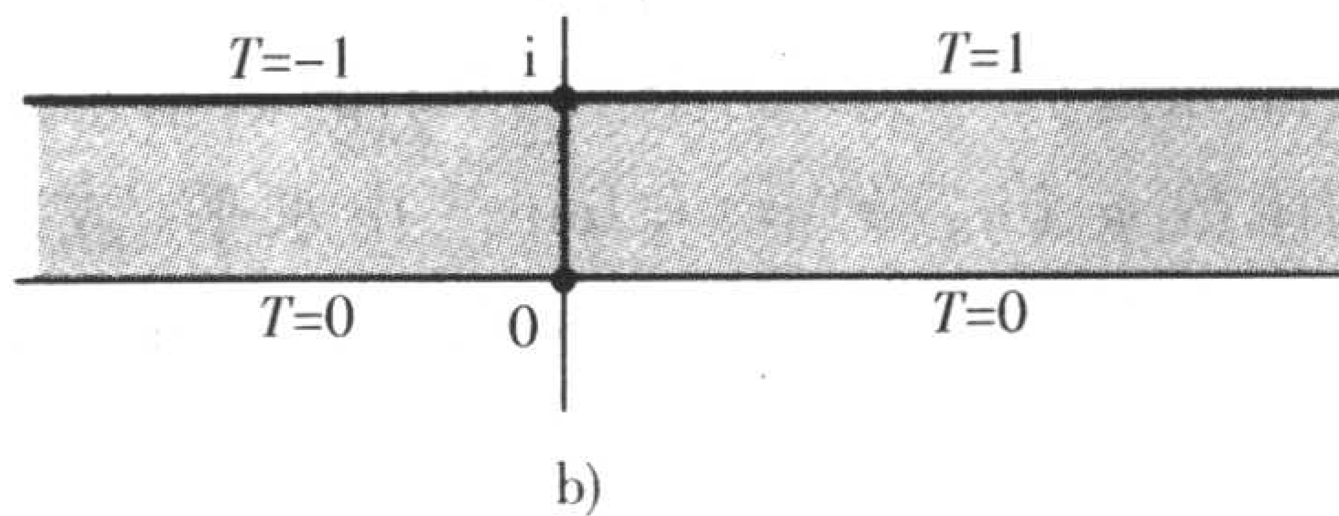


图 7-63 习题 7 的区域

8. 求如图 7-64 所示的两个带电圆柱形导体外部区域的电势.（该解答可用来预测输电线路产生的电磁场.）［提示：用一个默比乌斯变换把该问题转化为例 2 中的情形.］

9. 求如图 7-65 所示的两个嵌套的非同心带电圆柱形导体间的电势.

10. 求如图 7-66 所示的月牙形区域内的温度分布.

11. 求练习 7.5 习题 7 中所示区域上的流体的流线.

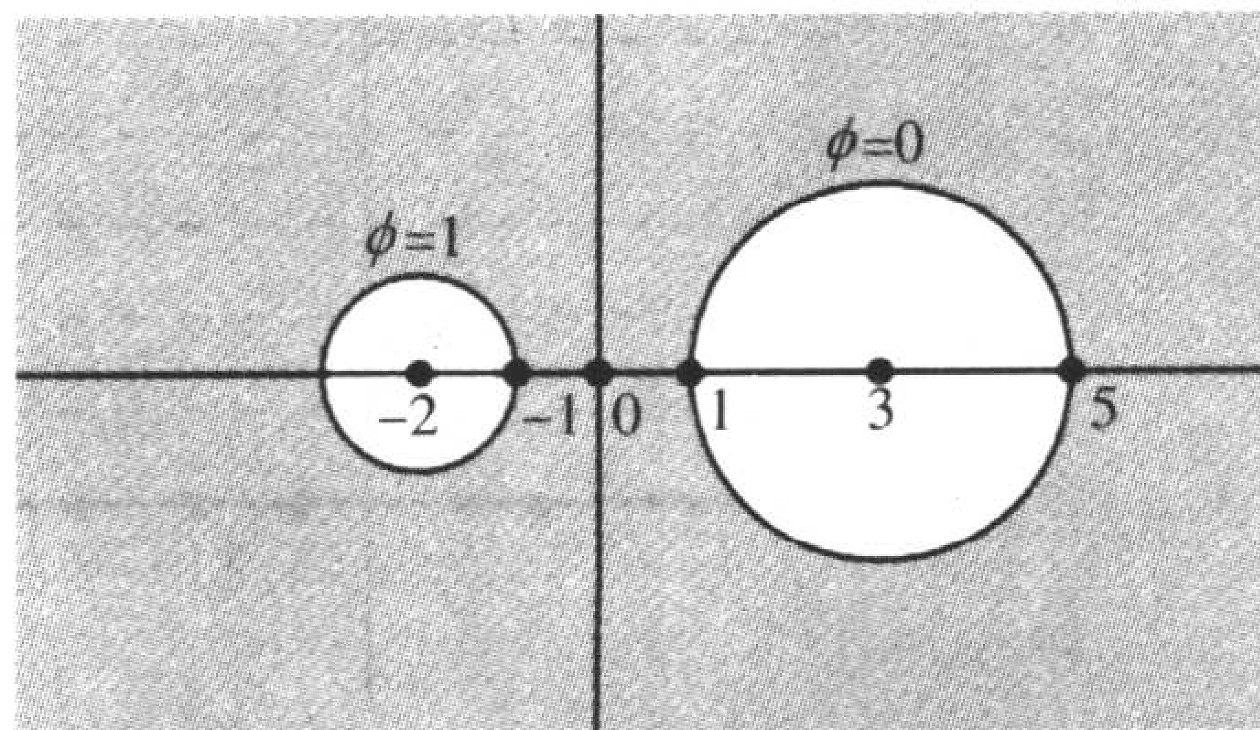


图 7-64 习题 8 的区域

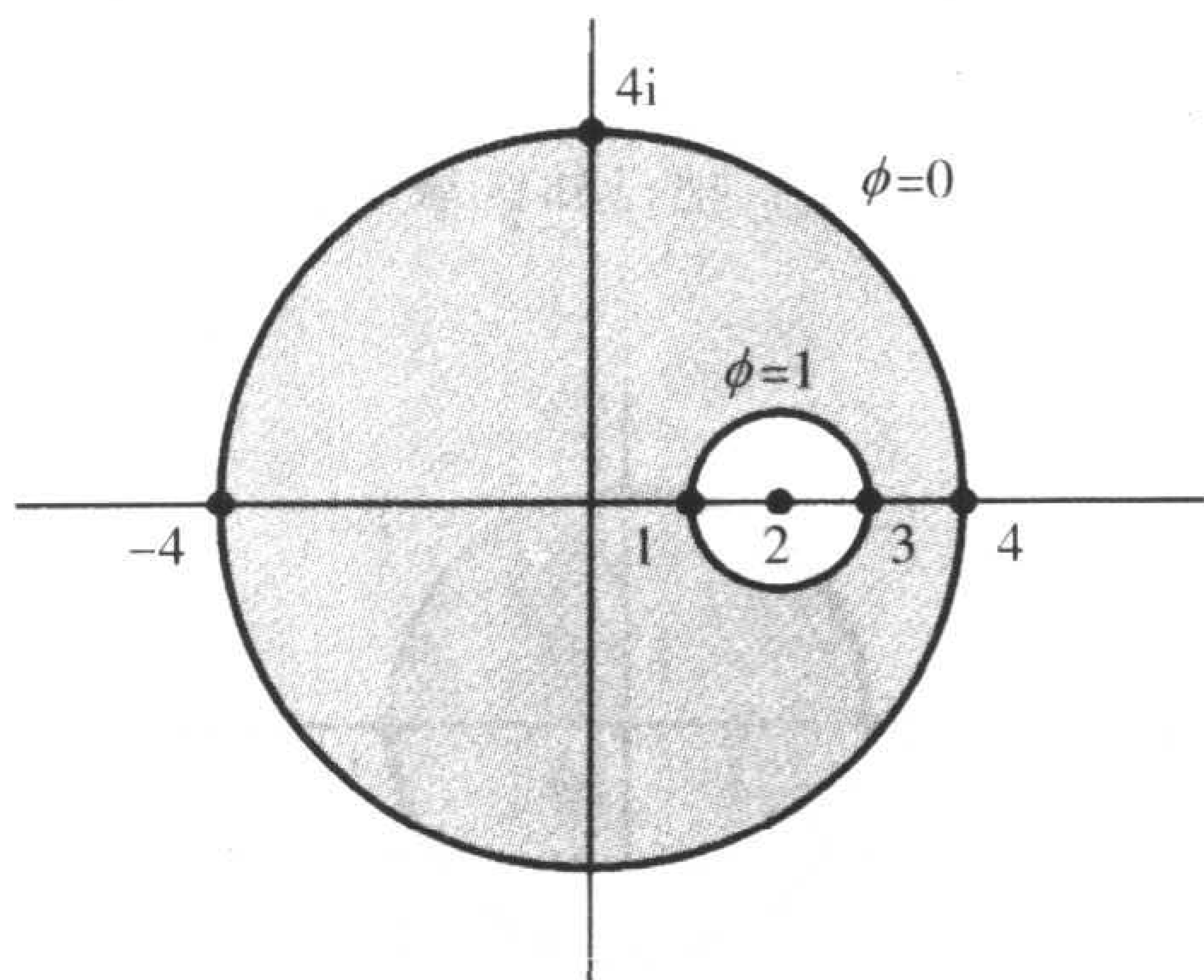


图 7-65 习题 9 的区域

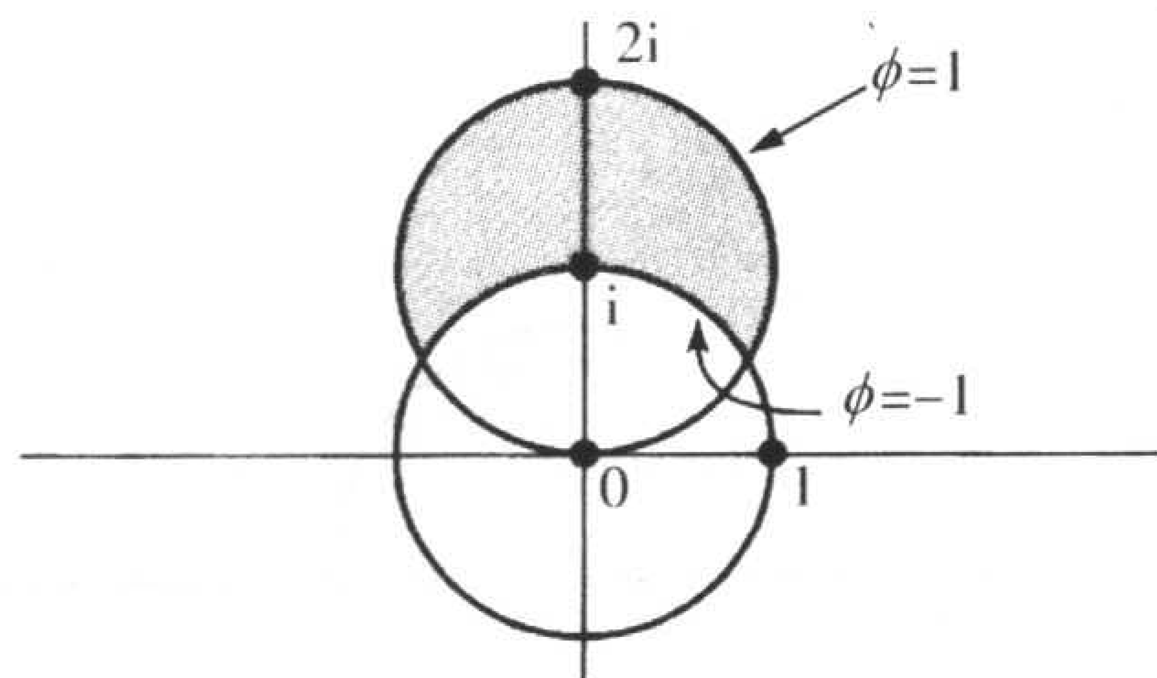


图 7-66 习题 10 的区域

7.7 共形映射在物理中的进一步应用

上一节中的例子所用的方法是相当直接的，对于不规则区域上的边界值问题，通过我们前面学到的一些技巧可构造一个到简单区域上的映射，进而转化为简单区域上的问题. 在这一节，我们将研究另外一些问题. 对于它们，难以直接求出到简单区域上的映射，而所用的技巧可以说似乎是来自于神奇的灵感、偶然的运气或只是“经验”.

432

比如，求一个图形的面积，它非常复杂以至于不可能直接算出来. 这时，不妨换一种思路，先把它的面积“假设”出来，设法得到一些“感觉”，然后再利用它求出问题的解. 这种方法在数学上称为*逆方法*，与 7.6 节中的*直接方法*恰好相反. 作为逆方法的第一个例子，我们通过考虑映射 $w=\sin z$ 和它的逆 $z=\sin^{-1}w$，看看如何来分析和解决问题. 这个变换是一个非常有用的工具，我们可用它来解决四个非常难的物理问题.

由 7.5 节可知，$z=\sin^{-1}w$ 把上半平面映到了半无限带形区域(见图 7-67)，它把实轴映到了带形的底部和边界. 为求出图中所示的堵塞水道中流体的流线，我们可以应用在实轴上取值为 0 的调和函数 $\psi_1(u, v)=v=\operatorname{Im}w$. 由水平(或阶层)曲线得到流线为

433

$$\phi_1(x,y) = \operatorname{Im}(\sin z) = 常数.$$

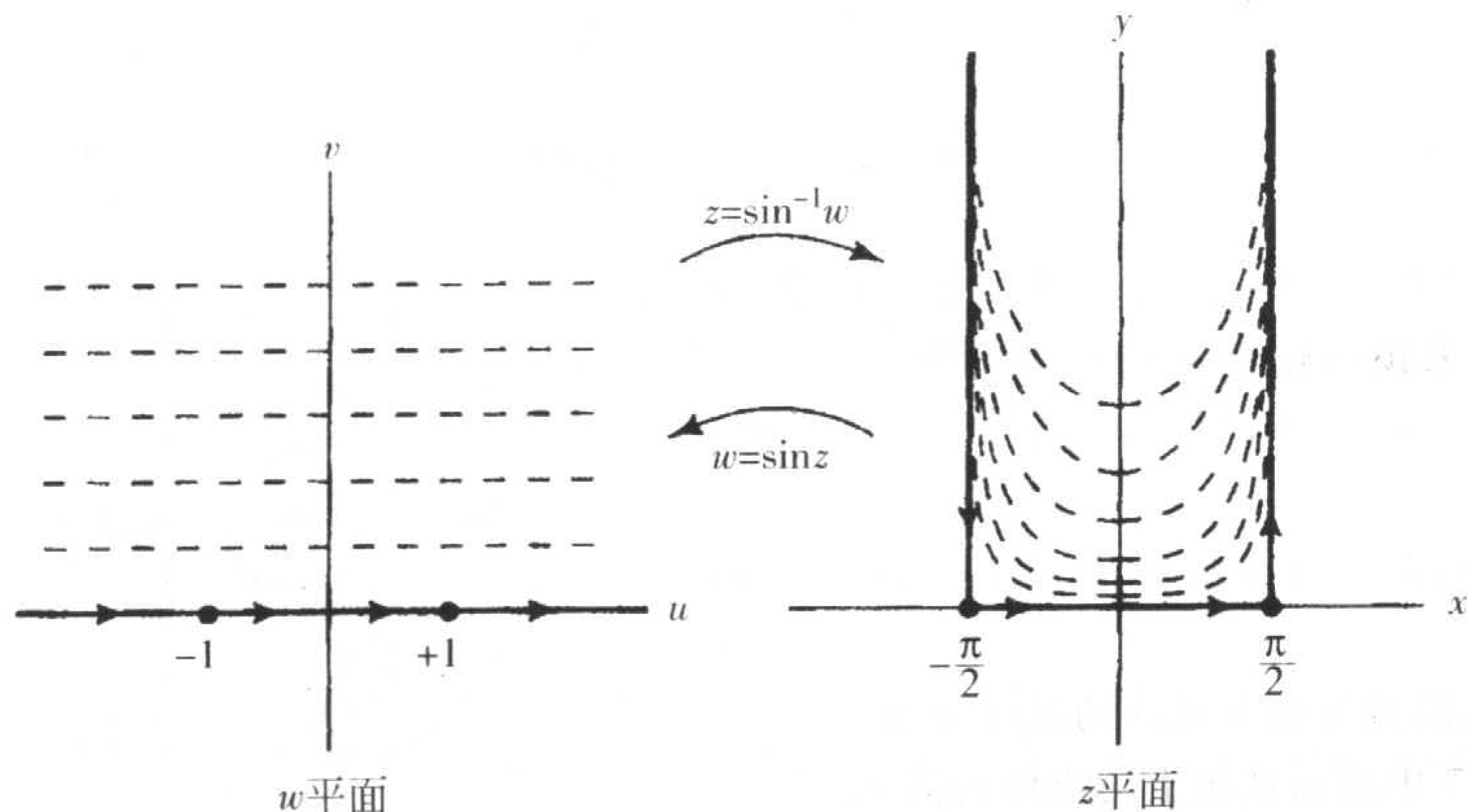


图 7-67 堵塞水道内的流动

另一方面，z 平面上的调和函数 $\phi_2(x, y) = y = \text{Im}z$ 在带形的底部为 0，且直线 $\phi_2 =$ 常数与带形的边界垂直，因此，这些曲线的像是曲线

$$\psi_2(u,v) = \text{Im}(\sin^{-1}w) = \text{常数}, \tag{1}$$

当 $|u| > 1$ 时，该曲线与 u 轴正交；而当 $-1 \leqslant u \leqslant 1$ 时，$\psi_2 = 0$，见图 7-68. 因此，(1)式可理解成宽度为 2 的无限长带形带电导体周围的等势线.

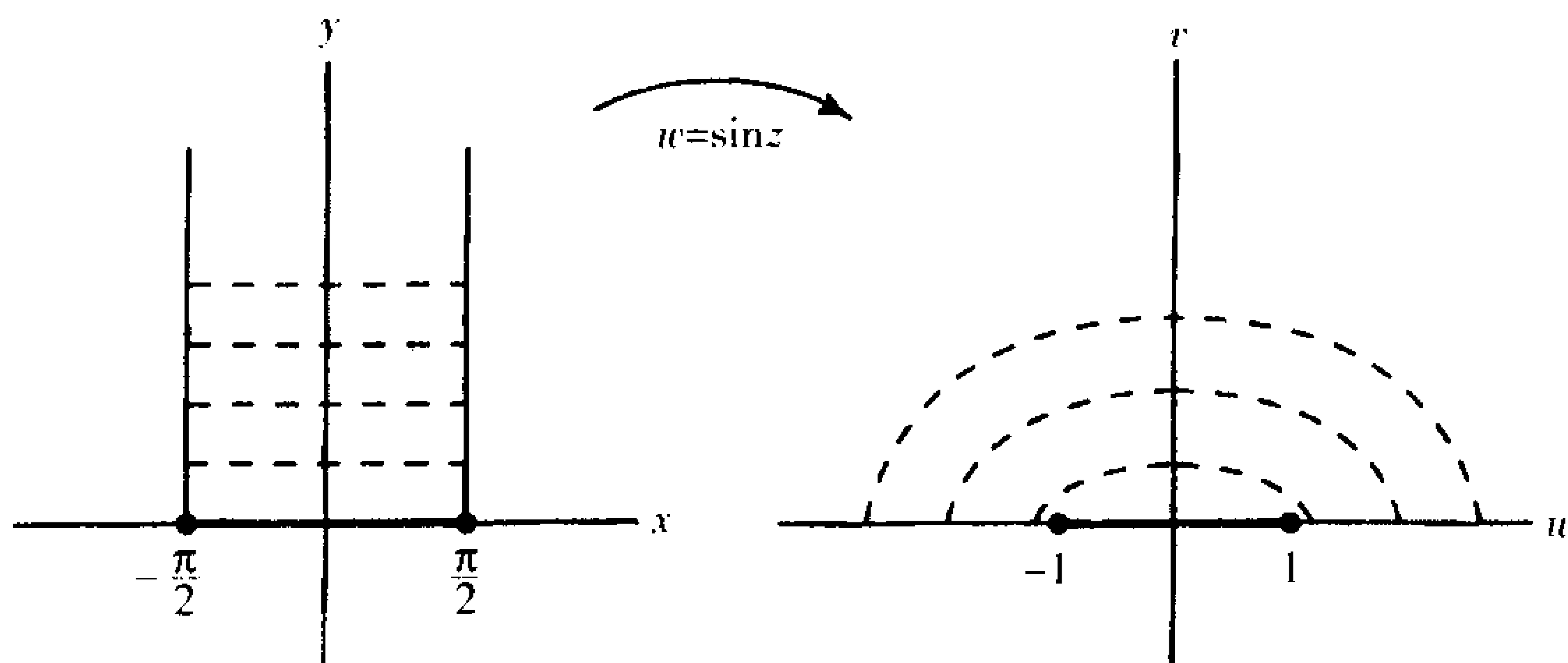


图 7-68 带形带电导体

显然，调和函数 $\psi_2(u, v)$ 的共轭函数为

$$\eta(u,v) = \text{Re}(\sin^{-1}w) \tag{2}$$

(准确来说，η 是 ψ_2 的一个共轭调和函数，见 2.5 节). $\eta(u, v)$ 的水平曲线与 $\psi_2(u, v)$ 的水平曲线正交，所以，它们就像图 7-69 中所示的虚线. 特别地，在 -1 左侧的 u 轴上 $\eta(u, v) = -\pi/2$，在 $+1$ 右侧的 u 轴上 $\eta(u, v) = \pi/2$. 因此，(2)式可以看作两个并排放置的带相反电荷的半无限导电板所产生的电势. [434]

最后，容易证明映射 $w = \sin z$ 是关于 y 轴对称的，见图 7-67. 因此，我们可对它加以限制，进而得到从图 7-70 所示的带形区域到第一象限上的一一映射. 考虑调和函数 $\phi_3(x, y) = 2x/\pi = (2\text{Re}z)/\pi$，它在 y 轴上的函数值是 0，在直线 $x = \pi/2$ 上的函数值为 1，且它的水平曲线与 x 轴正交. 从而"继承"函数

$$\psi_3(u,v) = \frac{2}{\pi}\text{Re}(\sin^{-1}w)$$

在 v 轴上的函数值为 0，在 $u > 1$ 的 u 轴上的函数值为 1，而曲线 $\psi_3 =$ 常数与线段 $0 < u < 1$ 正交. 后者说明 ψ_3 在该线段上的法向导数为 0. 因此，ψ_3 可看成第一象限在稳定状态下的温度，且在 v 轴上保持 0 度，在 $u > 1$ 的 u 轴上保持 1 度，在 u 轴的 $0 < u < 1$ 内是热绝缘的.

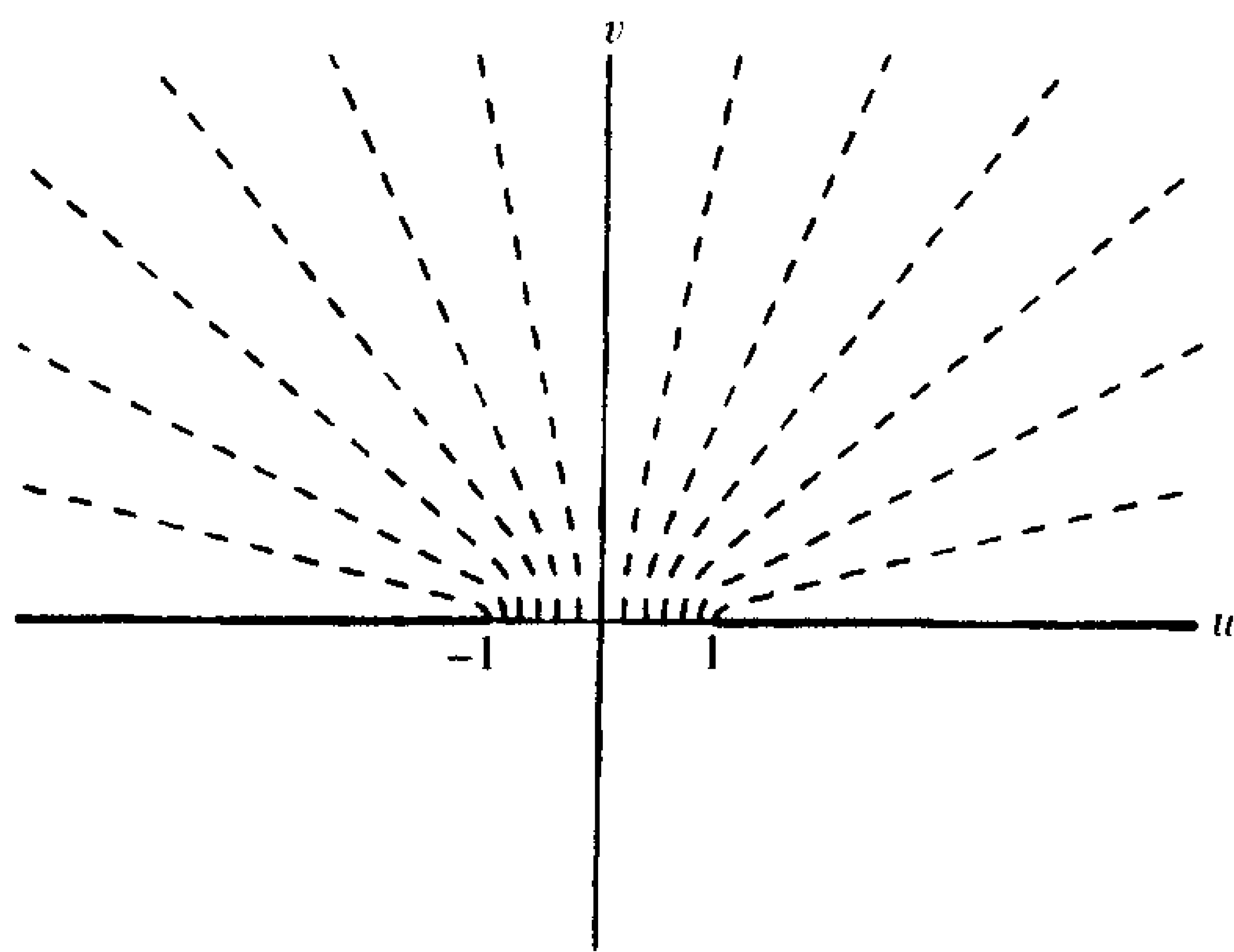


图 7-69 共面的带电板

沿着这个思路，我们可以用函数 $f(z) = z^\alpha$ 来解决一类有趣的问题. 对于 $\alpha > 0$，可选取 f 的一个适当的分支把角形域 $0 < \arg z < \pi/\alpha$ 映射到上半平面. 因此，$\text{Im}z^\alpha$ 是流体在角形域上流

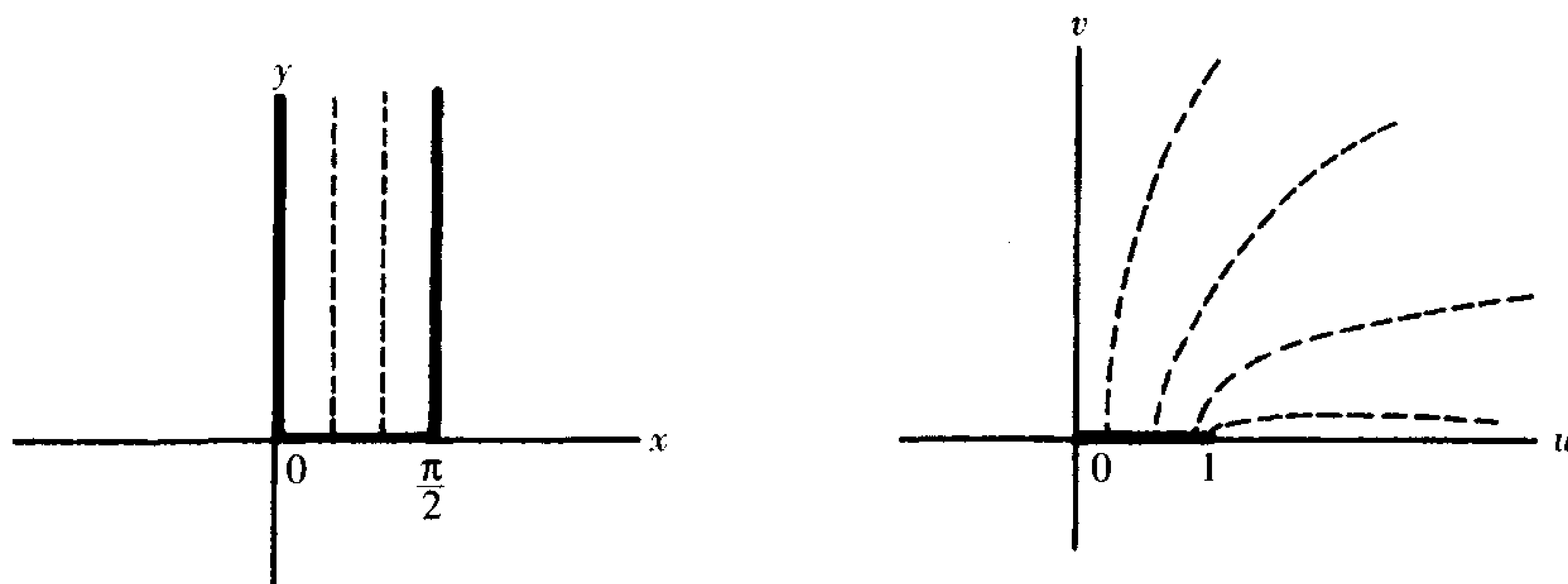


图 7-70 具有绝缘的热结构

体的流函数. 当然，任何一条流线 $\mathrm{Im}z^{\alpha}$ = 常数可看作是流体经过一个障碍物的周界. 例如，若 $\alpha=2$,

$$\mathrm{Im}z^2 = 2xy,$$

435 在流体内部我们有流函数，例如，双曲线 $xy=1$ [参见图 2.6(b)]. 对于 $\alpha=-1$，水平曲线(见图 7-71)

$$\mathrm{Im}z^{-1} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \text{常数}$$

都是通过原点的圆周. 我们可把这些曲线看成 $z=0$ 处的一个(二维)偶极子的等势线.

对于调和函数 $\mathrm{Log}|z|$ 的水平曲线，我们有一个有趣的解释. 因为它们都是同心圆(见图 7-72)，可以看作是在原点处流体形成的涡流或旋涡的流线. 另一方面，如果把它们看作等温线或等势线，则我们断定在 $x=y=0$ 处有一个热源或点电荷[⊖]. 最后需要说明的是，研究一个给定的旋涡或源的叠加效应是非常有用的.

下面通过一个简单的例子说明，逆方法在应用上是非常重要的.

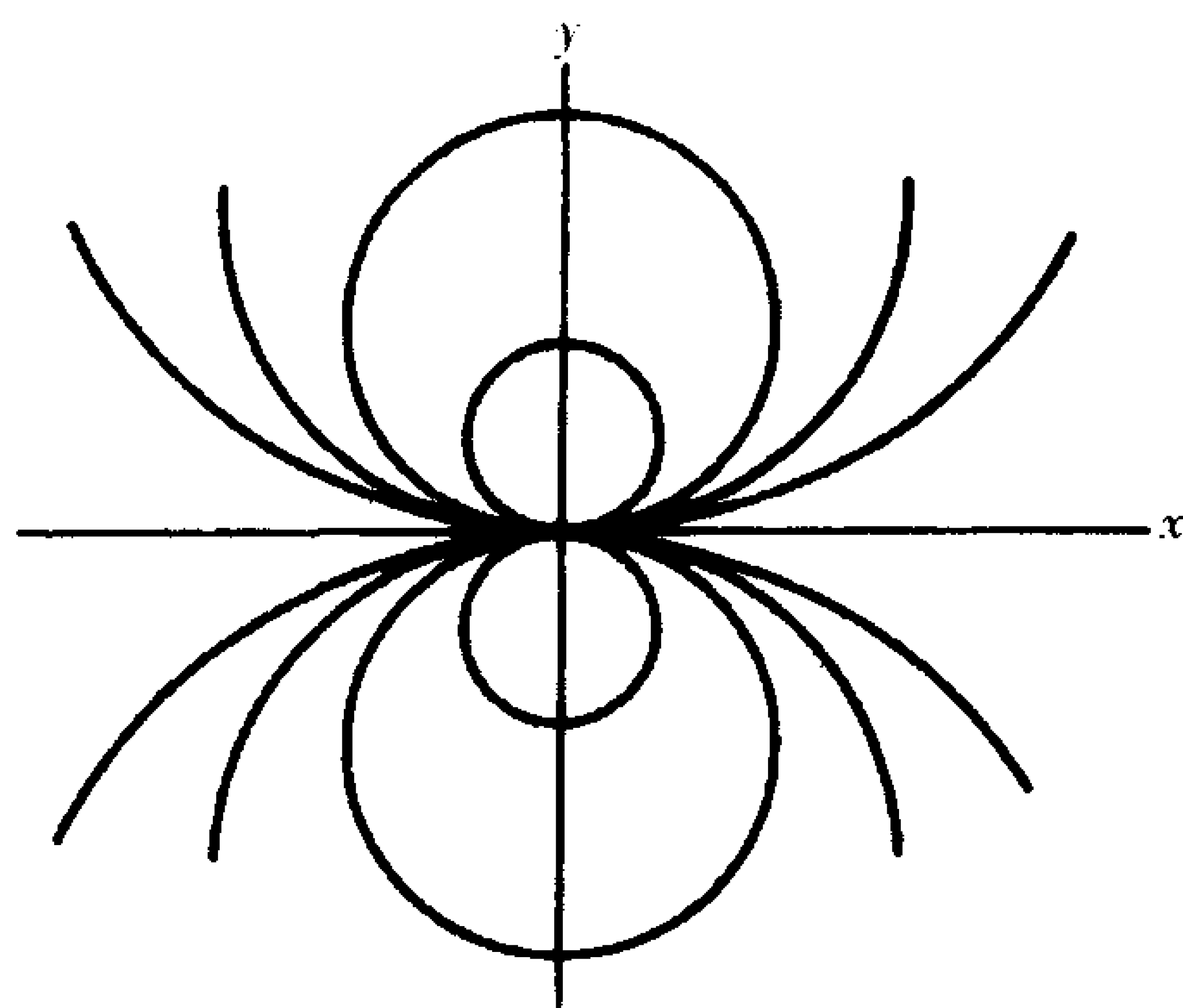


图 7-71 偶极子的等势线

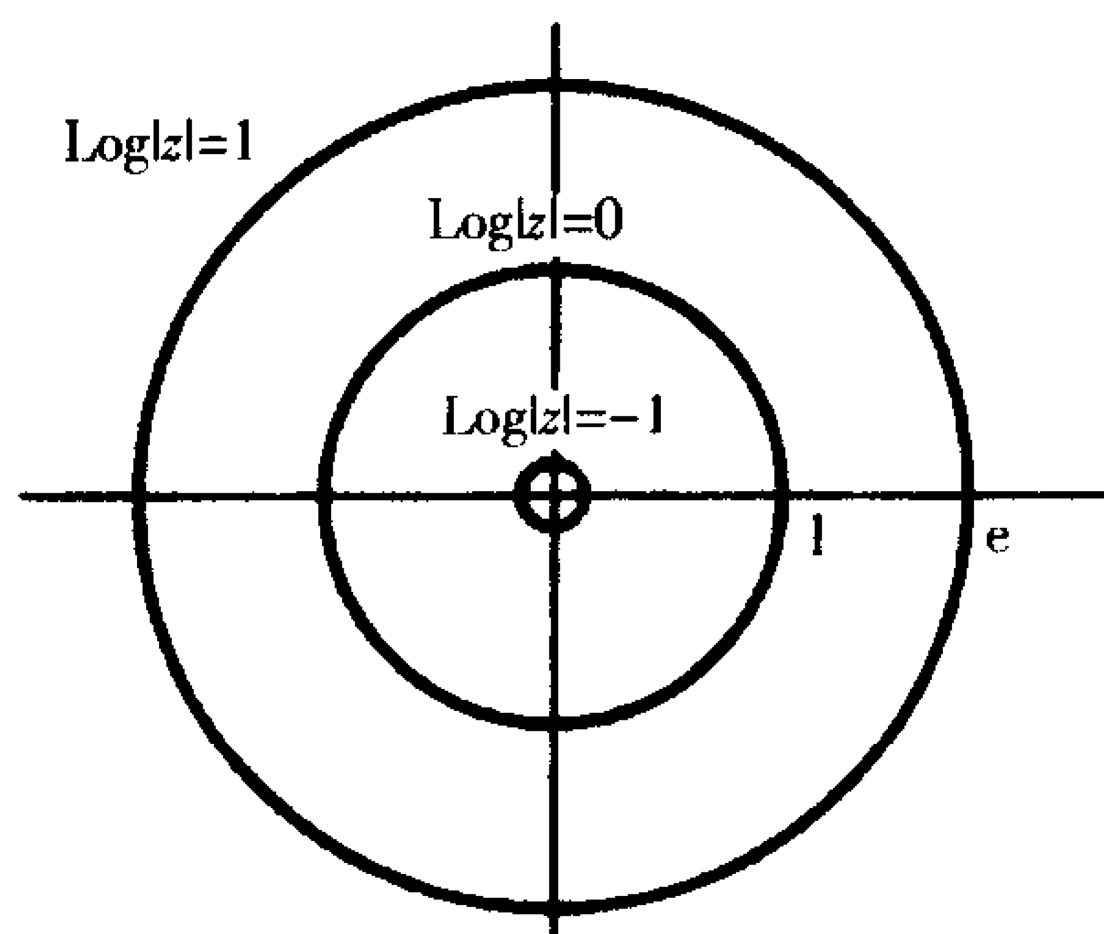


图 7-72 涡流流线

⊖ 注意二维中的点电荷对应于三维中的线电荷.

例 1　如图 7-73 所示，求环绕一个圆柱形障碍物流动的流线.

解　我们假设某一时刻流体的流动关于 x 轴对称（后面会提到，其他假设也可以），那么只需考虑 $y \geqslant 0$ 的情况.

为把这个流动区域映到 w 平面的上半平面，需找一个（非常数的）解析函数 $f(z)$，它在 x 轴（至少 $|x|>R$ 的部分）和圆周 $|z|=R$ 上为实数. 满足第一个条件的函数有一大类，例如，系数为实数的有理函数；对于第二个条件，注意到圆周方程可表示为 $z\bar{z}=R^2$，我们有 $\bar{z}=R^2/z$；因此，在圆周上有理函数 $z+R^2/z$ 等于 $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$. 从而，我们得到映射

$$w=f(z)=z+\frac{R^2}{z}. \tag{3}$$

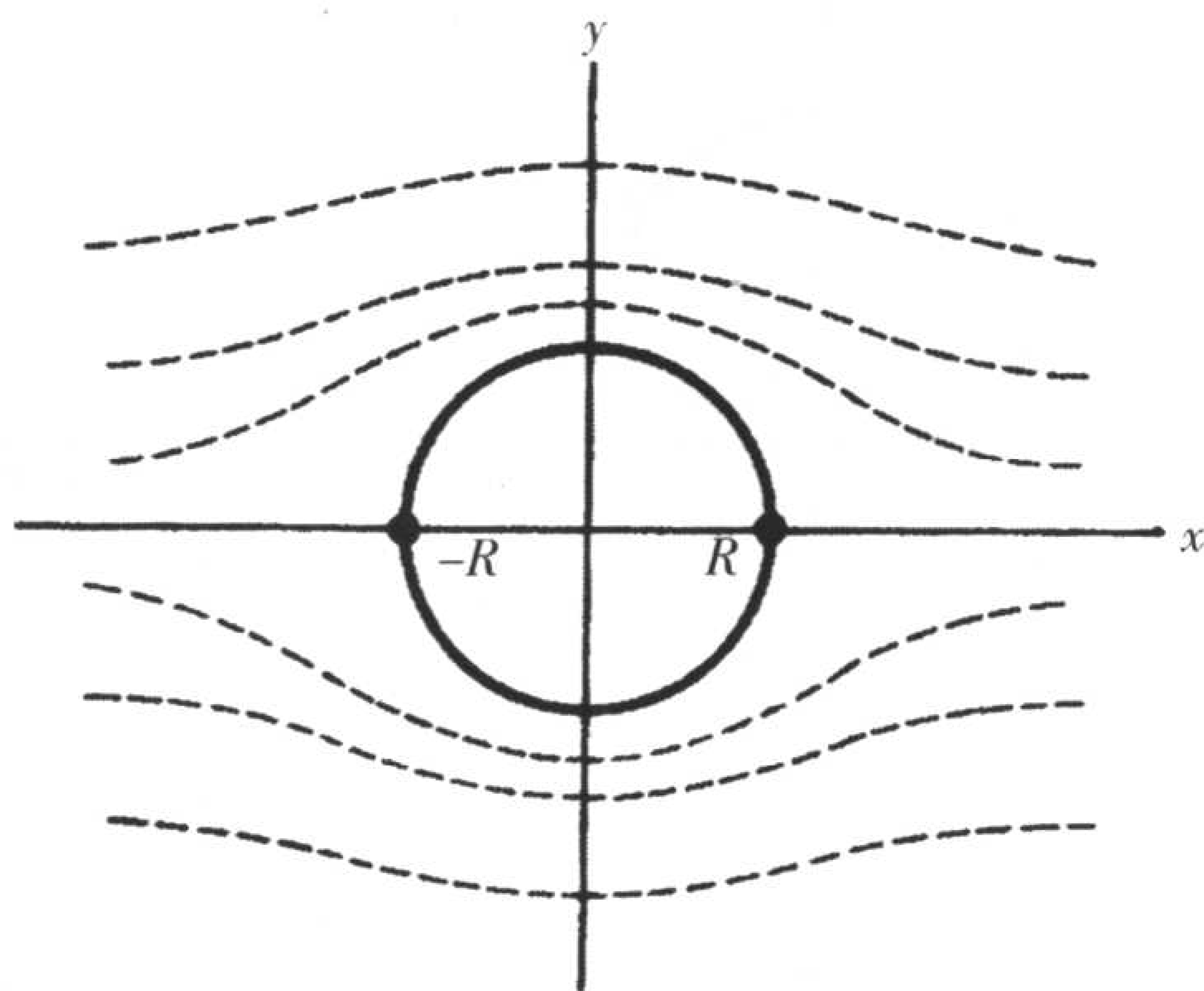


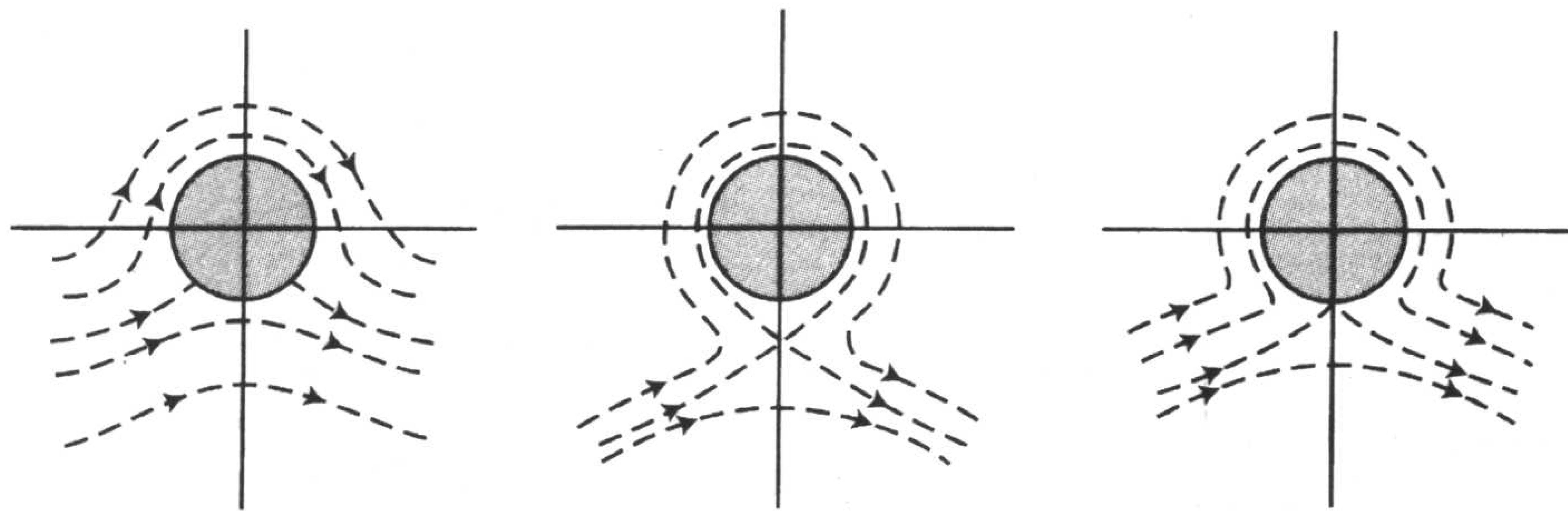
图 7-73　绕一个圆柱的流动

436~437

容易验证(3)式是从 $y>0$ 的流动区域到上半平面的一一映射. 因此得到流函数 $\psi(u,v)=v=\mathrm{Im}w$，相应的流线为

$$\phi(x,y)=\mathrm{Im}\left(z+\frac{R^2}{z}\right)=\text{常数}. \qquad \blacksquare$$

若不用对称性的假设，我们只要求圆周本身是一个流线. 这时，我们可以在流函数上加上 $\mathrm{Log}|z|$ 的任意常数倍（因为 $|z|=R$ 是一个流线），并且得到如图 7-74 所示的“环流”.


图 7-74　绕一个圆柱的环流

1908 年，天才数学家儒可夫斯基（N. Joukowski）不是对圆周 $|z|=R$，而是对如图 7-75a 所示的圆心不在原点的圆周应用了映射(3)，结果发现它在映射(3)下的像为如图 7-75b 所示的一个机翼. 于是，对于不同的圆周，通过映射(3)我们可以生成各种各样的儒可夫斯基机翼. 此外，由于我们已经找到了一大类围绕圆柱体的流动（图 7-73 与图 7-74），因此可以用“儒可夫斯基变换”即映射(3)把它们映到机翼面上，进而计算环绕机翼的流动. 例如，我们通过选择合适的圆周 C，并对映射作诸如

$$w = f(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z^3} + \cdots$$

438 的修改，来制作满足某些工程规格的机翼，见图 7-76.

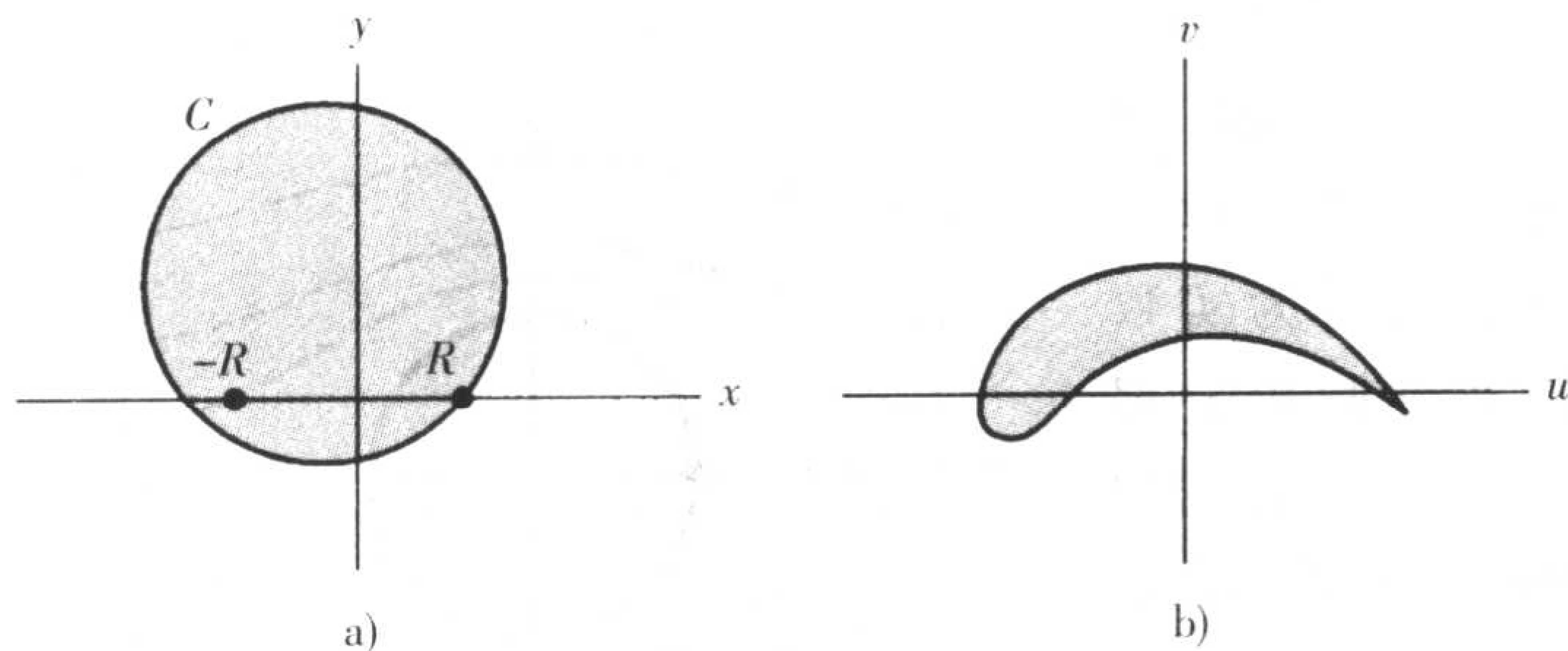


图 7-75 儒可夫斯基机翼

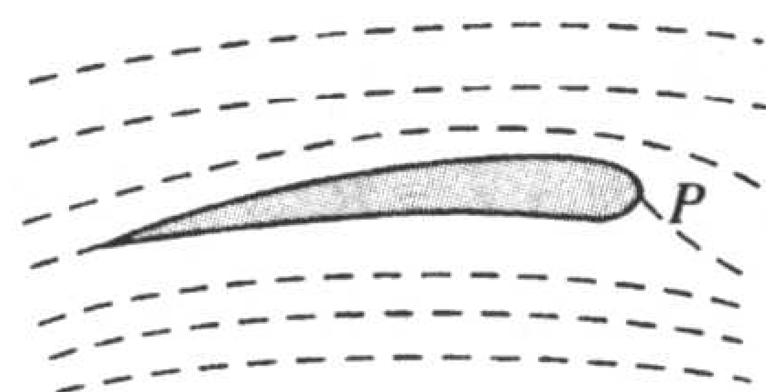


图 7-76 连接点

在设计飞机时，这个技巧是非常有用的，有兴趣的读者可参看专业文献.

练习 7.7

1. 分析图 7-77 所示平板上的温度的分布.［提示：利用练习 7.5 习题 7 的结果和正弦函数.］

2. 如图 7-78 所示，流体环绕一个倾斜角为 α 的直线障碍物流动. 流函数 ψ 在障碍物上是常数，且流线($\psi=$常数)在远离原点时趋于水平直线. 证明：

$$\psi(x,y) = \operatorname{Im}\left[e^{-i\alpha} z\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\sqrt{1 - \frac{e^{2i\alpha}}{z^2}} \right) \right]$$

满足上述条件.

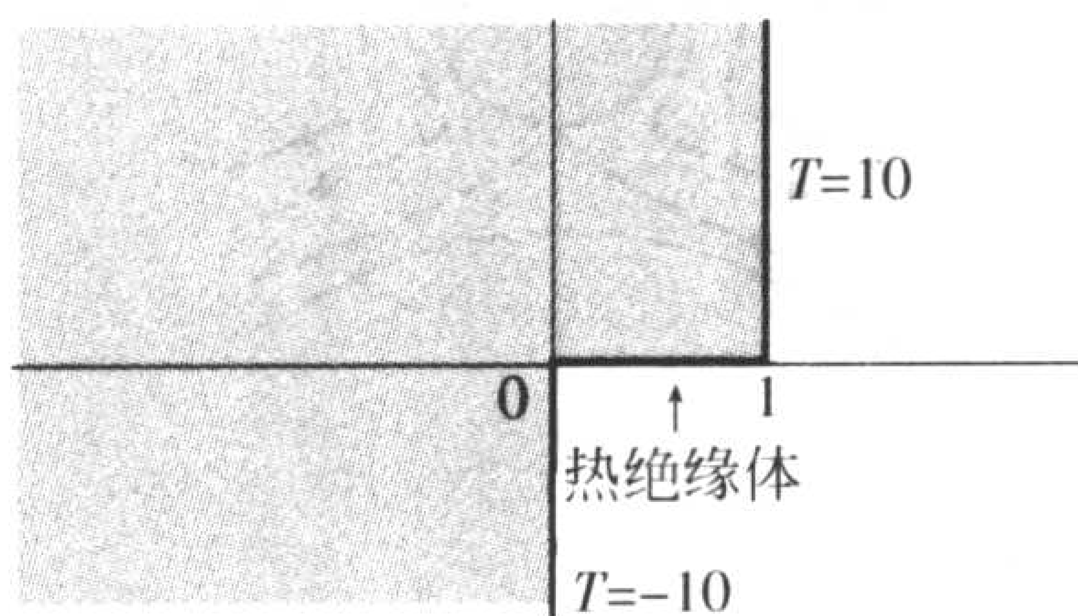


图 7-77 习题 1 的区域

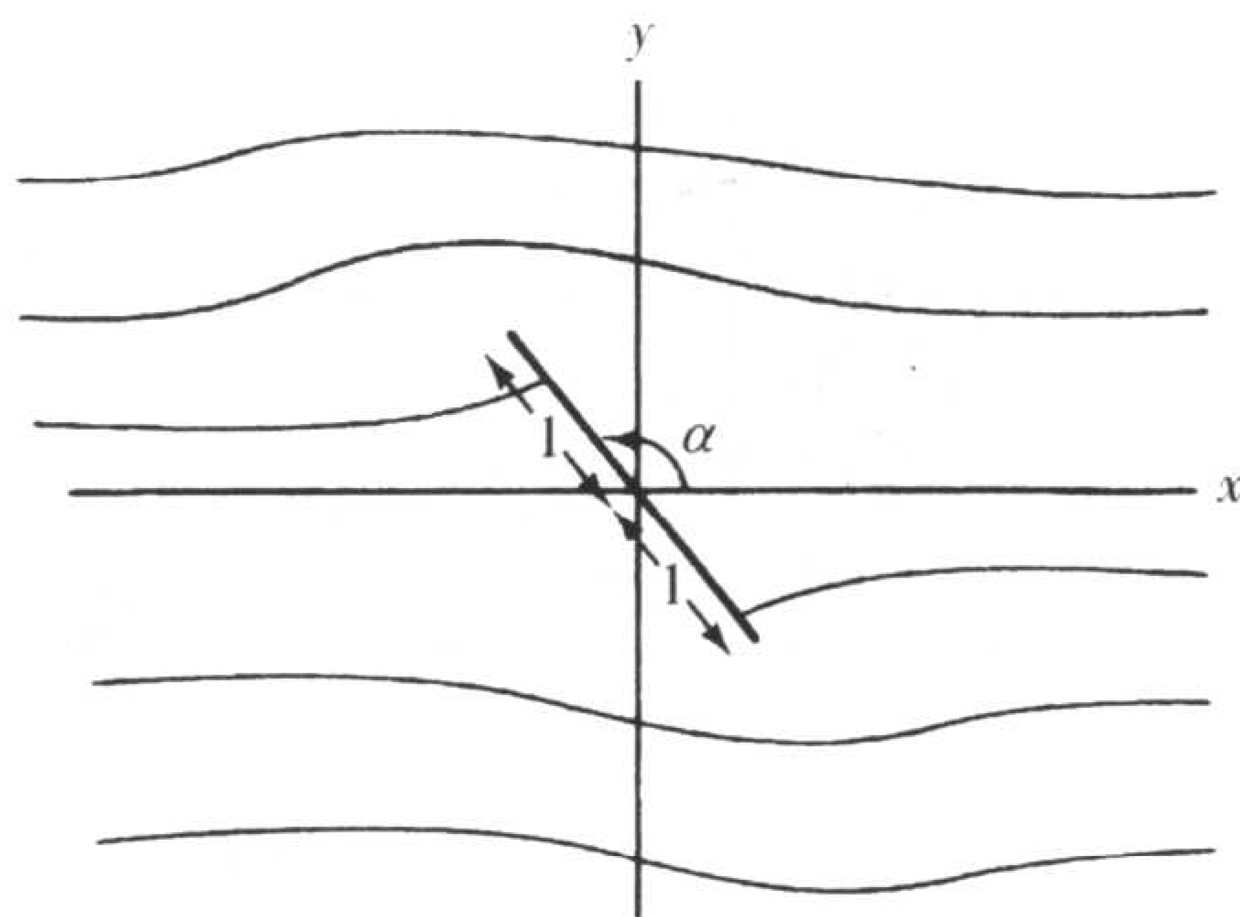


图 7-78 习题 2 的区域

3. 求在如图 7-79 所示的边界条件下第一象限内的温度分布.

4. 例 1 的另一种方法是把图 7-80 所示的阴影区域映射到上半平面：首先用一个默比乌斯变换把 R 映射到 ∞，$-R$ 映射到 0. 则此时阴影区域映射到了角度为 90 度的角形域，如果必要的话，可把该角形域旋转成第一象限. 然后对该映射取平方，它就把第一象限映到上半平面. 取整个变换的虚部就可以得到流函数问题的解. 证明运用上面的方法得到映射为

439 ~ 440

$$w = -\left(\frac{z+R}{z-R}\right)^2,$$

流函数是

$$\psi(z) = \operatorname{Im} w = \frac{4yR(x^2+y^2-R^2)}{[(x-R)^2+y^2]^2}.$$

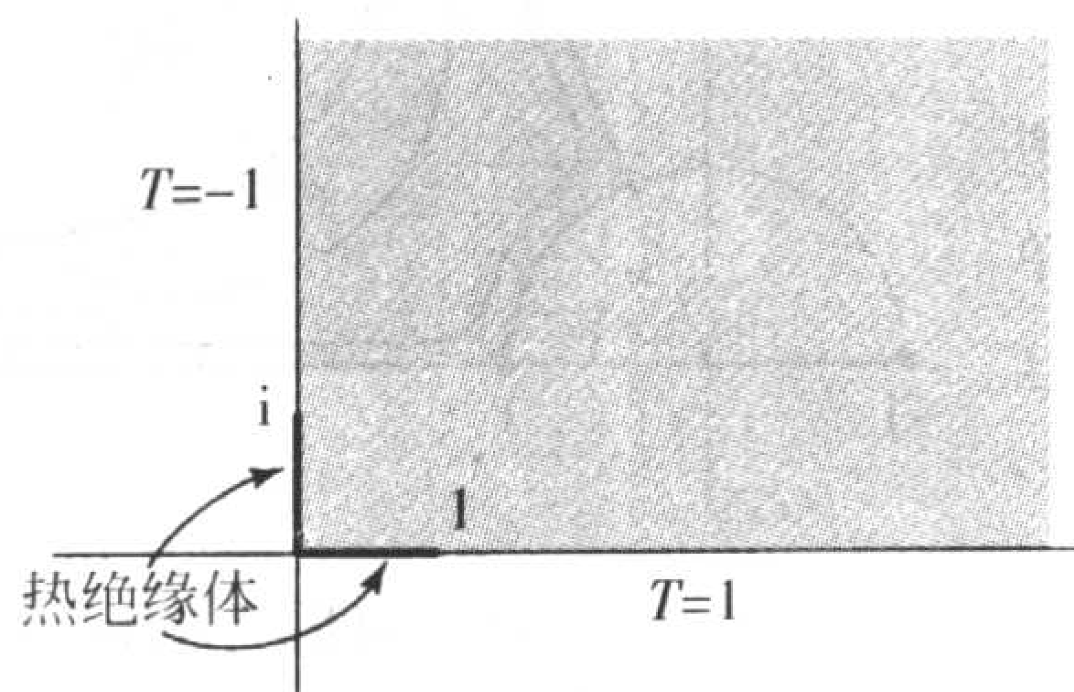


图 7-79 习题 3 的区域

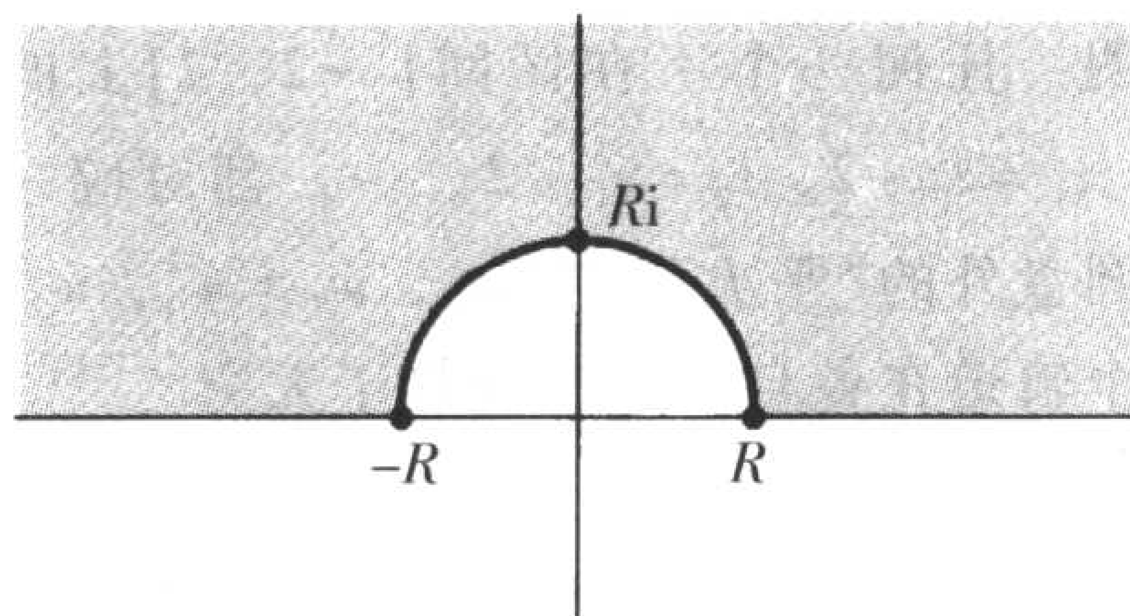


图 7-80 习题 4 的区域

尽管该函数在这个阴影区域上调和，在边界的取值为 0，但物理上一般不用它. 因为当 y 比较大时，我们要找的流线必然趋近于水平线. 即当流体远离障碍物时，曲线 $\psi(x, y) =$ 常数必然接近于 $y =$ 常数. 显然，上面的解并不是这种情形. (这说明，在前面处理这个问题时，我们忽略了一个附带的复杂情况，即在无界区域上无穷远处的边界条件.)

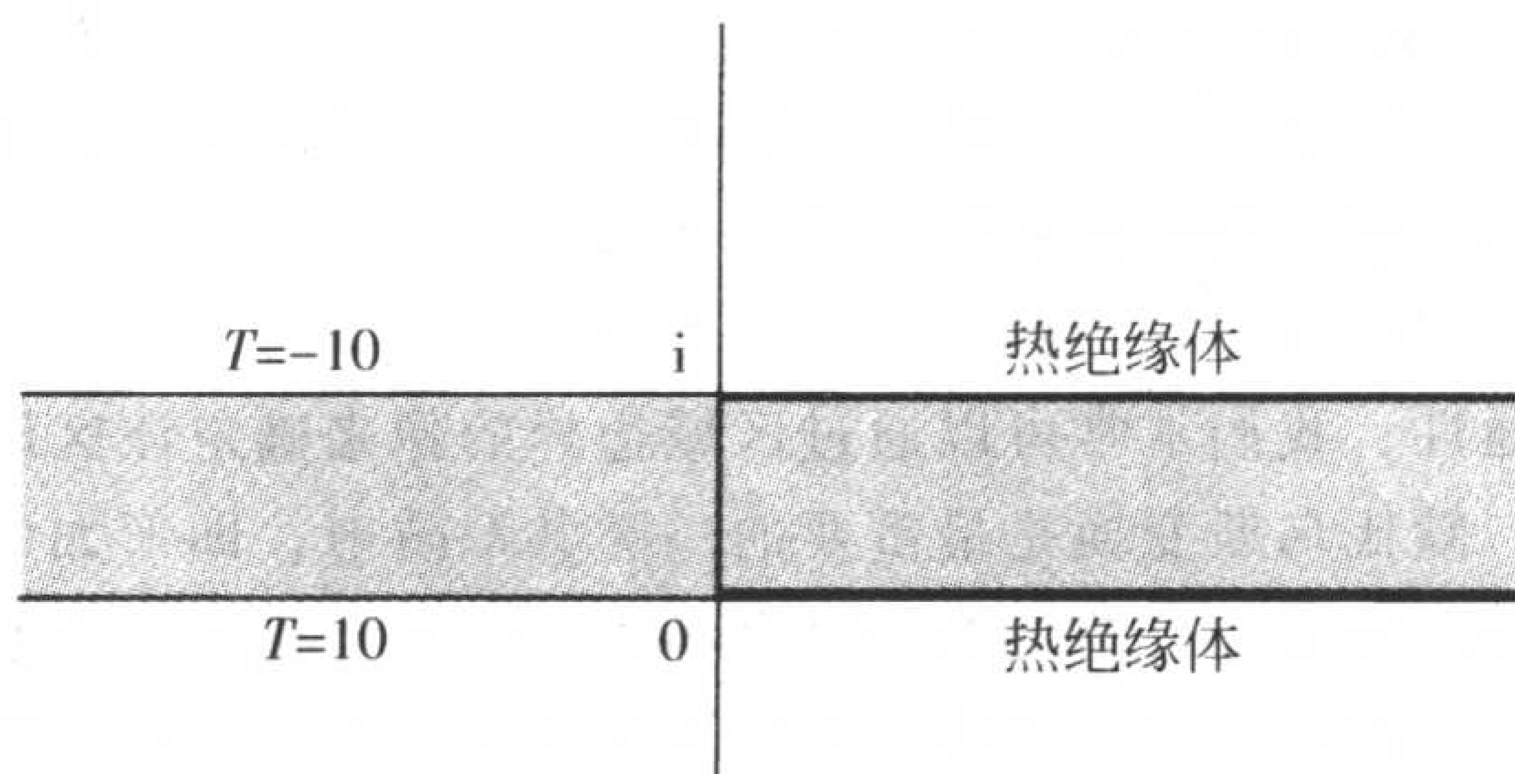


图 7-81 习题 5 的区域

5. 在图 7-81 所示的条件下，分析平板区域 $0<y<1$ 内的温度分布.
6. 证明：映射(3)把两个同心圆 $|z|=R$ 和 $|z|=R'>R$ 分别映成如图 7-82 所示的一条线段和一个椭圆. 由此求出一个条形导体与环绕它的导电的椭圆筒之间的电势.

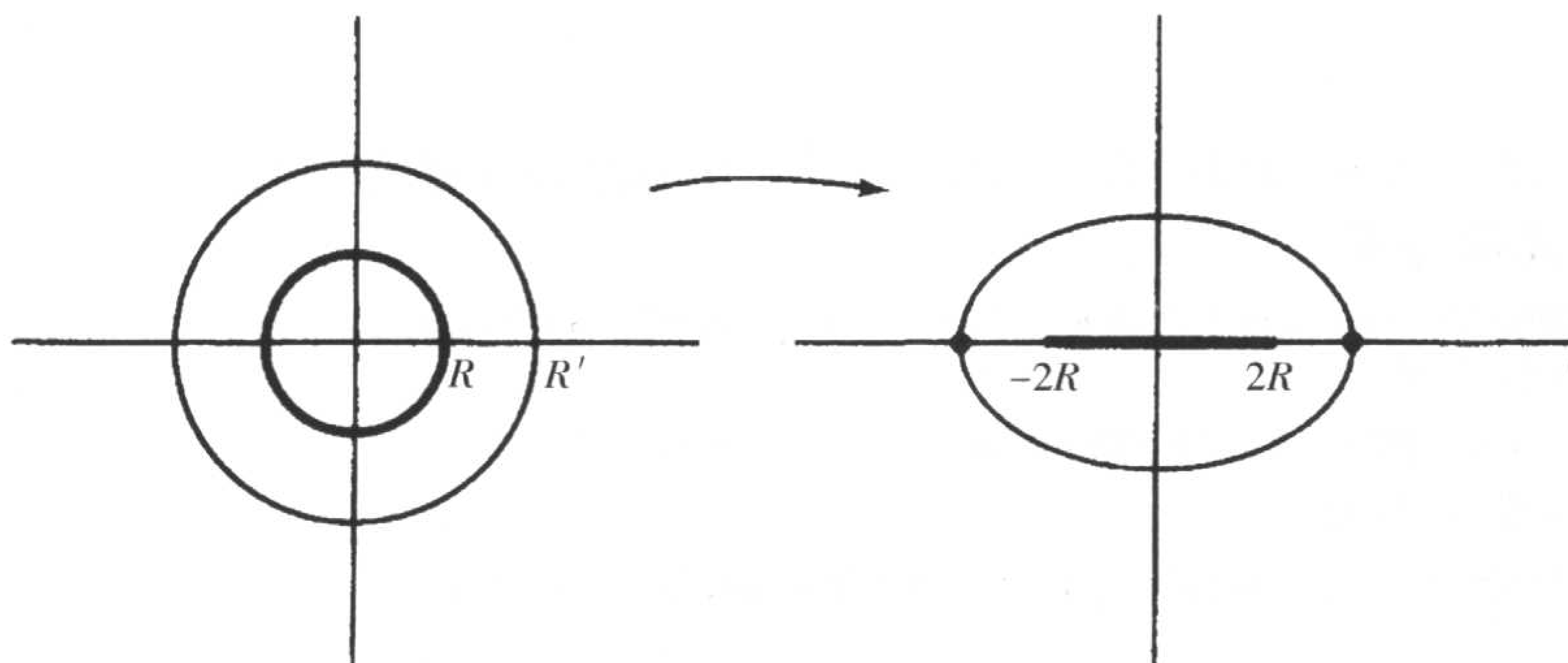


图 7-82 习题 6 的区域

441

7. 利用映射(3)求出如图 7-83 所示的流体的流线.
8. 本题中，我们将验证 2.7 节中的一个结论：从区间[-2, 2]外任何点出发，函数 $f(z)=z^2-2$ 迭代形成的轨道是无界的.

(a) 证明：儒可夫斯基变换 $z=w+1/w$ 是单位圆盘 $|w|>1$ 的外部和复 z 平面上除去区间 $[-2, 2]$ 的区域之间的一个一一映射. 此外，若 w 平面上的序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 趋于无穷，则相对应的 z 平面上的序列 $\{z_n=w_n+1/w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也趋于无穷.

(b) 证明：若 $|w_1|>1$ 且 $w_2=w_1^2$，则相对应的点 $z_1=w_1+1/w_1$ 和 $z_2=w_2+1/w_2$ 满足 $z_2=z_1^2-2$.

(c) 证明：任何一个不在区间 $[-2, 2]$ 上的起始点 z_0 的轨道 z_0，$z_1=z_0^2-2$，$z_2=z_1^2-2$，…，都对应一个起始点 w_0 在单位圆盘外的"平方轨道" w_0，$w_1=w_0^2$，$w_2=w_1^2$，…，并且这两个轨道在各自平面上都趋于无穷.

442

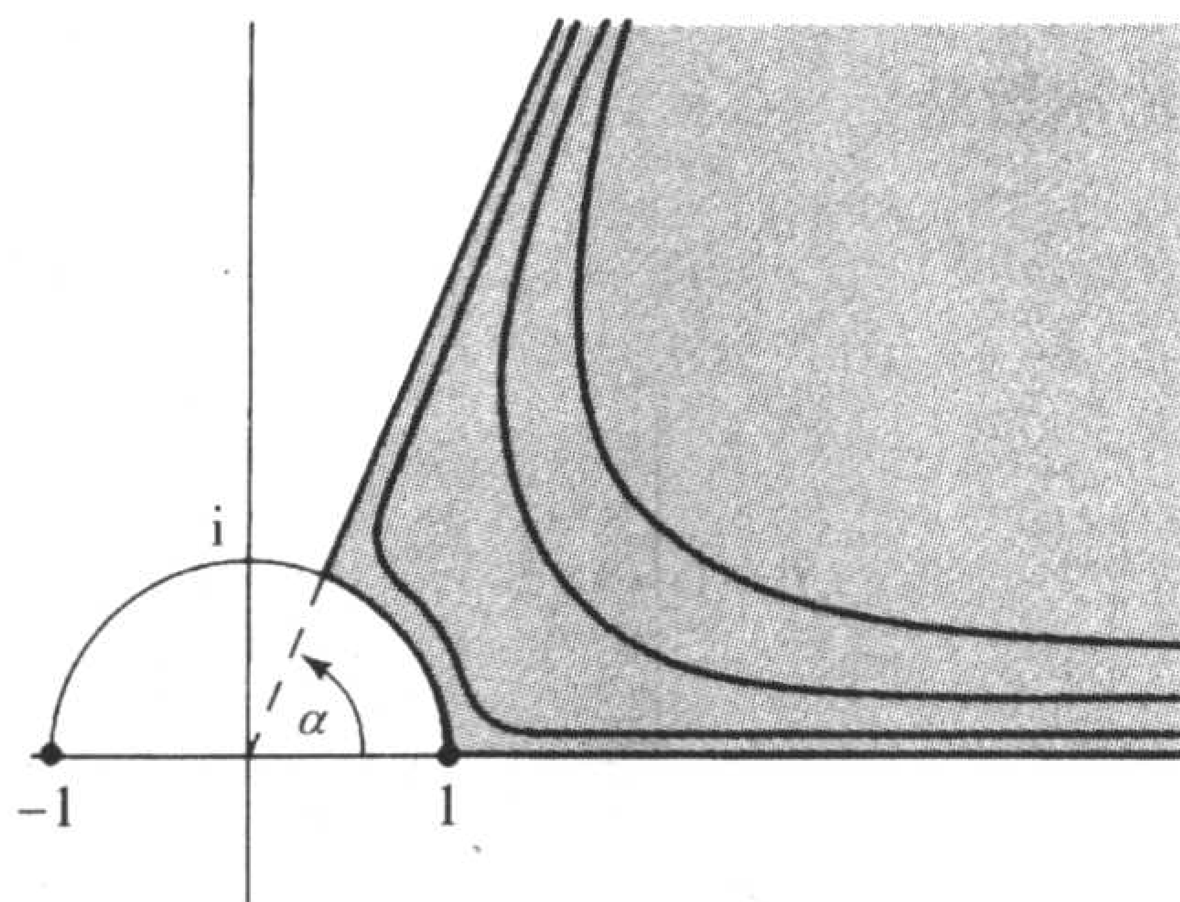


图 7-83　习题 7 的区域

小结

解析映射最重要的性质之一是拉普拉斯方程解的不变性. 即，若 $w=f(z)$ 是将一个区域映到另一区域的一一解析函数（这意味着 $z=f^{-1}(w)$ 也是解析的），并且如果 $\phi(z)$ 在第一个区域上调和，那么 $\psi(w):=\phi(f^{-1}(w))$ 在第二个区域上调和. 这对于拉普拉斯方程求解边界值问题非常有用. 首先做一个把已知区域映到一个诸如象限、半平面或圆环等简单区域的映射，使相应的问题得到简化. 然后通过这个映射再把在简单区域上得到的解函数代回到原区域.

解析映射在导数不为零的所有点处是共形的，也就是说，它在这些点是保角的. 利用这个性质和区域的连通性，我们常常可以通过区域边界的像来确定该区域的映射的像.

默比乌斯变换是最重要的一类共形映射，即形如 $(az+b)/(cz+d)$ 且 $ad\neq bc$ 的函数. 它们可理解为平移、旋转、伸缩和反演变换的复合函数. 由于默比乌斯变换把直线和圆周组成的类映到它自身，且具有保对称性，所以，在解决以直线或圆为边界的区域上的问题时，它们是常用的方法.

另一方面，施瓦茨–克里斯托费尔变换把半平面映到多边形区域，因此，它是解决这类几何问题的有力工具. 通过确定多边形角点的导数 f' 的条件，可以求出映射 f.

静电学、热流和流体力学的许多二维问题都可通过上述方法解决. 有时，遇到一些情况比较复杂的问题，可运用逆方法来解决. 即先假设出结果，再分析需要解决的问题.

参考文献

前面所列出的大多数参考文献都介绍有共形映射，但下面的参考文献更有用：

黎曼映射定理和几何性质

[1] Goluzin, G. M. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. American Mathematical Society, 1969.

[2] Nehari, Z. *Conformal Mapping*. Dover Publications, Inc., New York, 1975.

施瓦茨–克里斯托费尔变换

443

[3] Levinson, N., and Redheffer, R. *Complex Variables*. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.

[4] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. I. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

共形映射概要

[5] Kober, H. *Dictionary of Conformal Representations*, 2nd ed. Dover Publications, Inc., New York, 1957.

应用

[6] Courant, R. *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces.* John Wiley & Sons, Inc. (Interscience Division), New York, 1950.

[7] Dettman, J. W. *Applied Complex Variables*. Dover Publications, Inc., New York, 1984.

[8] England, A. H. *Complex Variable Methods in Elasticity*. John Wiley & Sons, Inc. (Interscience Division), New York, 1971.

[9] Frederick, C., and Schwartz, E. L. "Conformal Image Warping," *IEEE Computer Graphics and Applications*, March 1990, pp. 54–61.

[10] Kyrala, A. *Applied Functions of a Complex Variable*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.

[11] Marsden, J. E., and Hoffman, M. J. *Basic Complex Analysis*, 2nd ed. W. H. Freeman and Company, Publishers, New York, 1987.

[12] Milne-Thomson, L. M. *Theoretical Hydrodynamics*, 2nd ed. The Macmillan Company, New York, 1968.

[13] Rothe, R., Ollendorff, F., and Pohlhausen, K. *Theory of Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[14] Smythe, W. R. *Static and Dynamic Electricity*, 3rd ed. Hemisphere Publications Corporation, New York, 1989.

444

第 8 章　应用数学的变换

在 3.6 节中，我们在分析线性时不变系统时，对于以正弦函数作为输入函数的优点作了一些说明. 下面我们简要介绍一下应用形如 $Ae^{i\omega t}$ 的函数作为输入函数的一些特点：

1. 记号的紧凑性. 一个实表达式，例如 $\alpha\cos(\omega t+\phi)+\beta\sin(\omega t+\psi)$，可以简单表示为 $\mathrm{Re}(Ae^{i\omega t})$.

2. $Ae^{i\omega t}$ 的导数等于 $Ae^{i\omega t}$ 乘以 $i\omega$，即在某种意义上代数运算代替了微分.

3. 以 $Ae^{i\omega t}$ 为输入的系统稳态响应与输入具有同样的形式，也是 $e^{i\omega t}$ 的一个复常数倍.

基于以上理由，如果能将一个一般的输入函数 $F(t)$ 表示为这些正弦曲线和的形式，则对求解输出响应是很有用的. 那时，我们对每个函数的正弦曲线部分求出输出响应(这一点比较容易)，然后再将它们相加(在线性系统中解的叠加是允许的)，就能够确定这个函数的输出响应.

以傅里叶级数和傅里叶变换为工具的傅里叶分析主要用于将函数分解为这些正弦曲线和的形式. 其他一些变换(特别是梅林变换、拉普拉斯变换、z 变换)与傅里叶分析的用处相同，它们可将任意函数分解为基本形式的叠加，以方便我们对某一特定分析问题的研究. 还有一种变换——希尔伯特变换，它在理论与实践上与以上变换有着密切的关联，尽管希尔伯特变换的用途不是对函数进行分解.

这些数学运算的适用范围并不局限于解析函数，但限制在解析函数上的讨论将使一些关键性质的推导更加显然. 因此本书最后这一章主要研究解析函数的变换，其中略去了一些超出本书范围的证明过程.

445

8.1　傅里叶级数(有限傅里叶变换)

正如引言中所介绍的，本章的主要目标是建立一种可能性，即将一个实变量函数 $F(t)$(可能取复值)表示为形如 $e^{i\omega t}$ 的正弦函数的和. 本节主要研究一种特殊情形：$F(t)$ 是以 L 为周期的周期函数，即对任意 t，$F(t)=F(t+L)$.

自然地，我们希望能够找到 F 的一个分解，使得正弦函数 $e^{i\omega t}$ 与 F 的周期相同，也就是说，只选择满足 $e^{i\omega(t+L)}=e^{i\omega t}$ 的那些 ω. 这蕴涵 $e^{i\omega L}=1$，所以 ω 必为下列数之一：

$$\omega_n=\frac{2\pi n}{L}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

特别地，我们假设 $L=2\pi$(若不然，总可以通过变换使之满足此条件). 下面的问题是如何确定(复)数 c_n 使之满足

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int}.\tag{1}$$

假设此时，等式(1)中的级数在 $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$(因此对所有的 t)一致收敛于 $F(t)$. 对任意固定的整数 m，将(1)式两端同时乘以 e^{-imt}，得

$$F(t)\mathrm{e}^{-imt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}, \tag{2}$$

它在 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ 上也是一致收敛的，从而 $F(t)\mathrm{e}^{-imt}$ 是连续的，右端的级数可逐项积分[见 5.3 节定理 8]．对(2)式两端关于 t 在区间$[-\pi, \pi]$上积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\mathrm{e}^{-imt}\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\mathrm{d}t; \tag{3}$$

然而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \left.\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)t}}{\mathrm{i}(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & n \neq m, \\ t\big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & n = m. \end{cases}$$

因此(3)式右端只剩下 $2\pi c_m$ 这一项．于是，只要(1)中的级数在 $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ 上一致收敛，便有如下关于系数 c_m 的公式

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\mathrm{e}^{-imt}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

无论级数收敛与否，我们有以下定义．

446

定义 1　设函数 F 以 2π 为周期，且在$[-\pi, \pi]$上可积，则系数由公式(4)给出的级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$ 称为 F 的傅里叶级数(Fourier series)，c_n 称为 F 的**傅里叶系数**(Fourier coefficients)．

更一般地，如果 $F(t)$ 的周期为 L，则它的傅里叶[⊖]级数形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t/L},$$

傅里叶系数为

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2\pi t/L}\mathrm{d}t.$$

我们已经证明了在"$F(t)$的形如(1)的表达式一致收敛"的假设条件下，我们所讨论的级数一定是傅里叶级数．下面研究这个假设条件并试着确定在什么条件下傅里叶级数收敛于 F.

解析函数理论可以帮助我们部分地回答上述问题．考虑在某圆环 D 内的解析函数 $f(z)$，该圆环包含单位圆周，如图 8-1 所示．这时，f 可表示为一个洛朗级数：

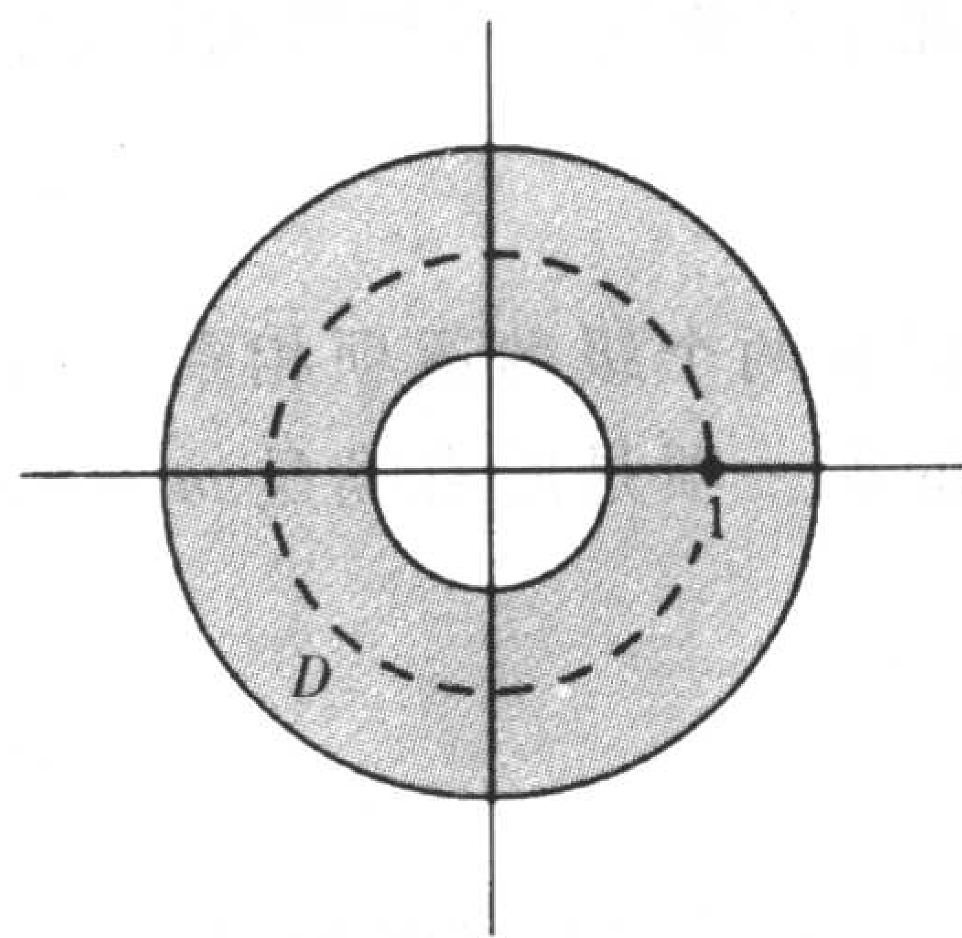


图 8-1　圆环的解析性

447

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in D). \tag{5}$$

这个级数在单位圆周上是一致收敛的，我们比较关心的是 f 在单位圆周上的取值．设单位圆周的参数函数为 $z = \mathrm{e}^{it}$，$-\pi \leqslant$

⊖ 傅里叶(Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830)在拿破仑时期研究大炮制造时发现了这种级数．

$t \leqslant \pi$，引入记号：$F(t) := f(e^{it})$，从而(5)式可改写为

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}. \tag{6}$$

这时，$F(t)$的周期恰好是2π，且(6)式将F分解成一个一致收敛的正弦曲线级数！所以(6)式必为$F(t)$的傅里叶级数.

实际上，此时我们还能提供一种独立的方法推导出傅里叶级数的系数公式(4). 根据5.5节定理14，(5)式中的系数由下式给出：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

将参数方程代入，得

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-it(n+1)} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt,$$

它与(4)式是一致的.

当然，我们证得的结果并不多. 只是证明了当$F(t)$与一个解析函数$f(z)$在$z = e^{it}$处的值相等时，F的傅里叶级数一致收敛于F. 而且，由洛朗展开式求傅里叶级数的方法往往理论性较强，应用价值不大.

例 1 应用前面的方法，求周期函数

$$F(t) = e^{2\cos t}$$

的傅里叶级数.

解 我们需求出一个解析函数$f(z)$，使它在单位圆周上$z = e^{it}$的值等于$F(t)$的值. 这一点比较简单；因为

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

当$z = e^{it}$时，我们注意到

448

$$F(t) = e^{(z+1/z)} =: f(z),$$

因此，F的傅里叶级数可以通过f的洛朗级数得到. 我们有

$$e^{(z+1/z)} = e^z e^{1/z} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{-\ell}}{\ell!}\right),$$

可将这两个级数逐项相乘.（洛朗级数可逐项相乘，本书对此不作证明.）所得结果中，含有z^n的那一项是所有满足$m - \ell = n$的项$z^m/m!$与$z^{-\ell}/\ell!$的乘积之和. 将所有项加起来，我们有

$$e^{(z+1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \left(\sum_{m=|n|}^{\infty} \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{(m-|n|)!}\right).$$

从而，F的傅里叶级数是

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

其中

$$c_n = \sum_{m=|n|}^{\infty} \frac{1}{m!(m-|n|)!}.$$ ■

例 2 设 f 解析，且 $F(t)=f(e^{it})$. 证明：F 的傅里叶级数可逐项微分.

证 我们知道，洛朗级数(5)可逐项微分，即

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{7}$$

对于 $z=e^{it}$，由链式法则有

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\mathrm{i}e^{it}.$$

在上式中代入(7)式，并将 $f(e^{it})$ 看作 $F(t)$，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(e^{it}) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n e^{\mathrm{i}(n-1)t}\mathrm{i}e^{it},$$

或

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}n a_n e^{\mathrm{i}nt},$$

这表明(6)式可逐项微分. ■ 449

这种方法有着广泛的应用，作为另一个例子，我们就调和函数在单位圆盘上的泊松公式给出一个启发式的推导. 在 4.7 节中，由于已经给出了泊松公式的证明，因此，我们下面只管放心讨论，不用担心每个细节的严密性.

给定一个周期为 2π 的连续实值函数 $U(\theta)$，我们要求 $|z|<1$ 内的调和函数 $u(z)$，使之当 $z\to e^{i\theta}$ 时，$u(z)$ 趋于 $U(\theta)$. 换句话说，我们要解单位圆盘内的狄利克雷问题(见 4.7 节). 首先假设 $U(\theta)$ 有一个傅里叶展开式

$$U(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)e^{-\mathrm{i}n\phi}\mathrm{d}\phi\right]e^{\mathrm{i}n\theta},$$

其中，第二个等式是将系数公式(4)代入得到的. 合并第 n 项与第 $-n$ 项，得(注意到 $n=0$ 除外)

$$\begin{aligned}U(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)\mathrm{d}\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)\left(e^{\mathrm{i}n(\theta-\phi)}+e^{-\mathrm{i}n(\theta-\phi)}\right)\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)\mathrm{d}\phi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

下面利用数学家们熟悉的阿贝尔-泊松求和公式计算级数的和. 首先，引入变量 r 得到一个函数 $g(r,\theta)$：

$$g(r,\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)\mathrm{d}\phi + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}U(\phi)r^n\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi. \tag{8}$$

证明分三步. 第一，注意到 $0\leqslant r<1$ 时，级数

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\phi) \tag{9}$$

关于 ϕ 是一致收敛的. 因此，在(9)式两端同时乘以 $U(\phi)$ 后可进行逐项积分. 积分后的结果

正是(8)式右端的 2π 倍. 这样(8)式可改写为

$$g(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\phi)\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \phi)\right\}\mathrm{d}\phi. \tag{10}$$

第二，令 $z = re^{i\theta}$，注意到级数(9)实际上是幂级数

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} e^{-in\phi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-in\phi} \tag{11}$$

的实部. 因为该幂级数在 $|z| < 1$ 时收敛，所以它定义了单位圆盘内的一个解析函数，从而它

450

的实部(9)是调和的！因此，$g(r, \theta)$也是某一解析函数的实部[因为 $U(\phi)$是实的]，并且当 $r<1$ 时，g 是关于 $z = re^{i\theta}$的调和函数. 在(10)中，令 $r=1$ 即得 $U(\theta)$的傅里叶级数，所以我们猜测(10)式就是狄利克雷问题的解，即 $u(z) = u(re^{i\theta}) = g(r, \theta)$在 $|z| < 1$ 时调和，且 $|z| \to 1$ 时，$u(z)$趋于 $U(\theta)$.

最后，由下面的等式可完成第三步：

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}. \tag{12}$$

我们把这个等式留作习题 4，请读者自行证明. 结合(10)式，我们得到泊松公式

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U(\phi)}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}\mathrm{d}\phi,$$

它可将圆盘内部的调和函数用其“边界值”表示出来. 关于泊松公式的详细证明，读者可参考 4.7 节.

现在我们将已得到的结果总结如下：在一些相当严格的解析性假设下，等式

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \tag{13}$$

成立，其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}\mathrm{d}t \quad (\text{对所有的 } n). \tag{14}$$

仅从(13)式或(14)式，我们看不出对 F 的解析性有任何要求. 实际上，对任意的可积函数 F，都可由(14)式来求出它的傅里叶系数. 于是我们会想，为什么(13)式的成立与解析性有关？我们能否希望傅里叶级数在较弱的条件下收敛呢？答案是肯定的，但是更加一般的收敛定理的证明已经超出了解析函数论的范围. 这里我们仅给出其中的一些结果而不作证明.

下面的第一个定理多少有点符合我们的想法，它只是假定 $|F|^2$ 可积，而得到的却是一个非常弱的收敛形式.

定理 1 设积分 $\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 \mathrm{d}t$ 存在，则由(13)式和(14)式定义的傅里叶级数存在，并且在平方的意义下收敛于 F，即

451

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|F(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

例 3 设 $|F|^2$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积，证明傅里叶系数的帕塞瓦尔(Parseval)等式：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt = \lim_{N\to\infty} 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2. \tag{15}$$

解 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right|^2 dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[F(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right]\left[\overline{F(t)} - \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n e^{-int}\right] dt.$$

因为 $F(t) \cdot \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n e^{-int}$ 的共轭是 $\overline{F(t)} \cdot \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$，上式右端可变为

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt - 2\mathrm{Re} \sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right)\left(\sum_{n=-N}^{N} \bar{c}_n e^{-int}\right) dt. \tag{16}$$

由前面的傅里叶系数公式(14)，上式中的第二项可写为 $-2(2\pi)\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$. 第三项可被展开，为避免混淆，必须改变其中一个和式的指标；于是这一项变为

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n \sum_{m=-N}^{N} \bar{c}_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt.$$

由前面讲过的该类积分的计算，上式等于

$$2\pi \sum_{n=-N}^{N} c_n \bar{c}_n.$$

这样，我们证明了

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\right|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt - 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

452

根据定理 1，$N\to\infty$ 时，上式左端趋于 0. 从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt - \lim_{N\to\infty} 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = 0,$$

故(15)式得证. ■

下面的傅里叶收敛定理在工程应用中很有价值. 在理论上，开关电路中会产生不连续的输入函数，例如图 8-2 中所示的周期阶梯函数.

我们限定周期函数 F 在任一周期上有有限个间断点. 特别地，设 F 的周期为 2π，且在区间 $[-\pi, \pi]$ 上给出一个有限细分

$$-\pi = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = \pi$$

满足下列条件：

1. $F(t)$ 在每一个开子区间 (τ_j, τ_{j+1}) $(j=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 上连续可微.

2. 当 t 从左边趋于任意细分点 τ_j 时，$F(t)$ 与 $F'(t)$ 趋于有限值，分别记为 $F(\tau_j -)$，

$F'(\tau_j -)$.

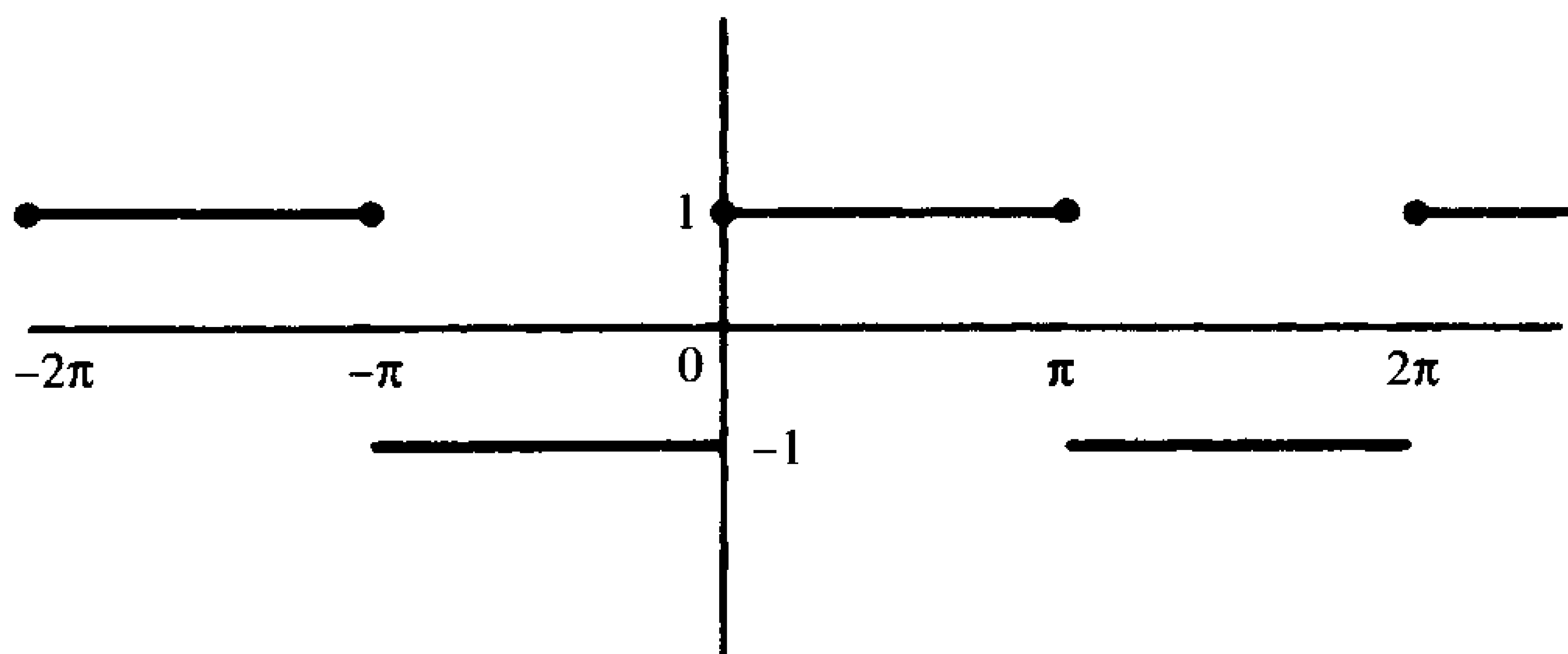


图 8-2 周期阶梯函数

3. 当 t 从右边趋于任意细分点 τ_j 时，$F(t)$ 与 $F'(t)$ 趋于有限值，分别记为 $F(\tau_j +)$，$F'(\tau_j +)$.

我们把这样的函数称为分段光滑函数.

显然，如果 F 在 τ_j 连续，则 $F(\tau_j -) = F(\tau_j +) = F(\tau_j)$. 对于图 8-2 中所示的阶梯函数，$F(0-) = F(\pi+) = -1$，$F(0+) = F(\pi-) = +1 = F(0) = F(\pi)$. 而且，$F'(0-) = F'(0+) = 0$，但 $F'(0)$ 不存在.

453

定理 2 设 F 是周期函数且分段光滑，则 F 的傅里叶级数在它的所有连续点处收敛于 $F(t)$，在间断点处收敛于 $\frac{1}{2}[F(\tau_j +) + F(\tau_j -)]$.

例 4 求图 8-2 所给出的阶梯函数的傅里叶级数，并说明它的收敛性.

解 它的傅里叶系数由下式给出

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\mathrm{e}^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(1)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{若 } n = 0, \\ \dfrac{\mathrm{i}\{(-1)^n - 1\}}{\pi n} & \text{其他.} \end{cases}$$

因此，它的傅里叶级数为

$$\frac{\mathrm{i}}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n}\right]\mathrm{e}^{int}. \tag{17}$$

由定理 2，对 $0 < t < \pi$ 它收敛于 $+1$，对于 $-\pi < t < 0$ 它收敛于 -1，对于 $t = 0$ 和 $t = \pi$ 收敛于平均值 0. ■

当傅里叶分析(有时称频率分析)用于解决由微分方程所控制的线性系统问题时，自然会提出傅里叶级数可否合理地逐项微分的问题. (显然，例 2 的条件太严格了.)下面我们给出一个结论，它似乎包含了工程师们所感兴趣的大多数情况：设 F 有一个收敛的傅里叶级数展开式

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{int}, \tag{18}$$

进一步假设对这个级数逐项微分后，得到的级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n \mathrm{e}^{int} \tag{19}$$

(由 M 判别法)在$[-\pi, \pi]$上一致收敛. 在这些条件下，我们知道“求导后的级数”(19)可从 $-\pi$ 到 t 合理地逐项积分. 但这个积分的结果是原级数(18)加上一个常数. 因此，(19)式的和函数必为 $F(t)$的导数. 这样我们就证明了下面的定理. 454

定理 3 设傅里叶展开式(18)成立，且对它逐项求导后的级数(19)在$[-\pi, \pi]$上一致收敛，则 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{int} = \frac{d}{dt}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

例 5 求周期函数

$$F(t) = \left|\sin\frac{t}{2}\right|^5$$

的傅里叶级数，并说明对它逐项求导后的级数的收敛性.

解 (注意到 F 的周期为 2π.) F 的傅里叶系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^5 e^{-int}dt.$$

应用恒等式

$$\sin^5\theta = \frac{5}{8}\sin\theta - \frac{5}{16}\sin3\theta + \frac{1}{16}\sin5\theta$$

及一些基本技巧，即可计算出上述积分. 通过计算我们可得到 $F(t)$的傅里叶级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{240/\pi}{225-1036n^2+560n^4-64n^6}e^{int}, \tag{20}$$

并且由定理 2，它收敛于 $F(t)$. 对上式逐项微分得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{in(240/\pi)}{225-1036n^2+560n^4-64n^6}e^{int}. \tag{21}$$

通过与(收敛)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 240/\pi 64n^5$[因子 2 确保了 n 充分大时此级数的项能控制级数(21)中相应的项]进行比较，级数(21)一致收敛. 因此(21)式为 $F'(t)$的傅里叶级数. 再对(21)式逐项微分，得到的级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 240/\pi 64n^4$相比较，则

$$F''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{-n^2(240/\pi)}{225-1036n^2+560n^4-64n^6}e^{int}.$$

显然，还可继续进行两次逐项微分，得到 $F^{(3)}(t)$ 与 $F^{(4)}(t)$的傅里叶级数. 事实上，读者可自行验证原函数 $F(t)$恰好只有四阶连续导数！(当 t 经过 0，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…时，五阶导数的值由 $-\frac{15}{4}$跃为 $+\frac{15}{4}$.) ■ 455

下面的例子说明了实践中如何利用傅里叶级数求解线性问题.

例 6 求满足微分方程

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\frac{d f(t)}{dt} + 2f(t) = F(t) \tag{22}$$

的函数f，其中F是如下所述的“锯齿”周期函数：

$$F(t) := \begin{cases} -1-\dfrac{2t}{\pi} & -\pi \leqslant t \leqslant 0, \\ -1+\dfrac{2t}{\pi} & 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

（参见图 8-3.）

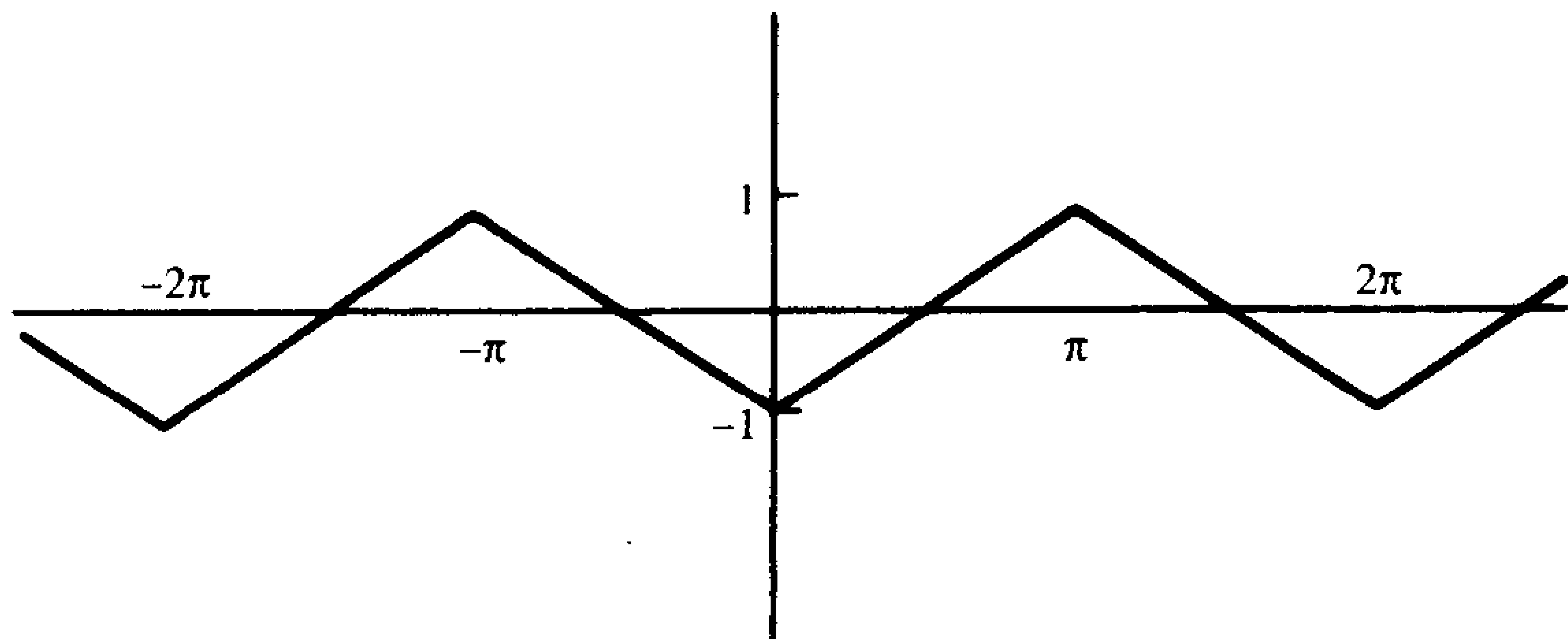


图 8-3 锯齿函数

解 我们先来看如何求下面简单方程的解：

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 2\frac{dg(t)}{dt} + 2g(t) = e^{i\omega t}, \tag{23}$$

其中方程(22)右边的“强制函数”由一条简单的正弦曲线代替. 本章引言中的介绍表明，方程(23)的解的形式为$g(t)=Ae^{i\omega t}$. 为确定A，将$g(t)$代入方程(23)得

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2i\omega Ae^{i\omega t} + 2Ae^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

或（除以$e^{i\omega t}$）

456

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 2)A = 1.$$

解出A，从而得到方程(23)式的解

$$g(t) = \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + 2i\omega + 2}. \tag{24}$$

下面把给定的函数$F(t)$展开成一个傅里叶级数. 由傅里叶系数公式(14)，得

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-1-\frac{2t}{\pi}\right)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(-1+\frac{2t}{\pi}\right)e^{-int}dt \\ &= \begin{cases} 0 & n=0, \\ \dfrac{2}{\pi^2 n^2}\{(-1)^n - 1\} & n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

所以，由定理 2 得

$$F(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{\pi^2 n^2} e^{int}. \tag{25}$$

现在我们做如下讨论：由(25)式知，$F(t)$可表示为无限条正弦曲线的线性组合，而(24)式对于单条正弦曲线给出了一个解. 由线性性，我们断定：对这些解作同样的线性组合应得到给定方程的解，即应有

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{\pi^2 n^2} \frac{e^{int}}{-n^2 + 2in + 2}. \tag{26}$$

为证实这一点，首先注意到(26)式的每一项是方程(22)的解. 另外，将(26)式的级数与收敛级数$\sum(8/\pi^2 n^4)$作比较(它们的极限相同)，我们可断言前者也收敛，并且可合理地逐项微分两次. 因为(22)式中所涉及的导数次数不高于2次，这样所求的函数f满足方程(22). ■

[读者应该注意到，锯齿级数(25)逐项微分后各项是阶梯函数级数(17)相应项的$2/\pi$倍，与此一致的是，除一些间断点0，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…外，锯齿函数的导数为阶梯函数(17)的$2/\pi$倍. 这种现象在定理3中并没有体现，它反映了这样一个事实——对于傅里叶级数还有一些更强的收敛结果. 其中的一些可在本章后面的参考文献中找到.]

傅里叶级数的系数公式(14)有时也称为*有限傅里叶变换*("无限"傅里叶变换将在8.2节中介绍). 在工程应用中，傅里叶变换的高效率计算是至关重要的，但在实践中，人们往往需要计算数值积分，原因如下： 457

1. $F(t)$的值只能通过测量数据获得，无明确的数学表达式.

2. 即使给定$F(t)$的一个解析表达式，也可能不存在不定积分的闭形式的表达式.

现在固定n，积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(t)}{2\pi} e^{-int} dt$$

的一个黎曼和估计形式为(见4.2节)

$$S_{n,N} = F(\tau_1) e^{-in\tau_1} \frac{t_1 - t_0}{2\pi} + F(\tau_2) e^{-in\tau_2} \frac{t_2 - t_1}{2\pi} + \cdots + F(\tau_N) e^{-in\tau_N} \frac{t_N - t_{N-1}}{2\pi},$$

其中$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = \pi$，且$t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$. 选取一个细分，将$[-\pi, \pi]$分为$N$个等长的子区间，令$t_j = -\pi + 2\pi j/N$；取"样本"点$\tau_j$为每个子区间的左端点，即$\tau_j = t_{j-1}$. 则黎曼和可简化为

$$S_{n,N} = \sum_{j=0}^{N-1} F\left(-\pi + \frac{2\pi j}{N}\right) \frac{e^{-in(-\pi + 2\pi j/N)}}{N} = \sum_{j=0}^{N-1} A_j e^{-i2\pi nj/N}, \tag{27}$$

其中$A_j := F(-\pi + 2\pi j/N) e^{in\pi}/N$. 当$N$增大时，和$S_{n,N}$收敛于系数$c_n$；因此，产生的误差由我们选择的$N$来控制.

当然，N的值越大，需要的计算步骤越多. 由(27)式估算一个系数c_n需要N次乘法运算. 若要估算有限傅里叶变换的N个这样的系数，则总共需要N^2次(复数)的乘法运算. 实际应用中往往需要取N为数以千计的数，因此这种算法需要的计算量太大. 但是，通过对(27)式中的项进行适当地分组，计算量就会大大减少.

例如，设$N = 16$，若计算$S_{1,16}$，可得如下形式：

$$S_{1,16} = \sum_{j=0}^{15} A_j e^{-i2\pi j/16} = \sum_{j=0}^{15} A_j e^{-i\pi j/8}.$$

$\{e^{-ij\pi/8}: j=0, 1, 2, \cdots, 15\}$中的一些数值是重复的(见表 8.1).

表 8.1 $\{e^{-ij\pi/8}: j=0, 1, 2, \cdots, 15\}$的数值

j	$e^{-ij\pi/8}$		j	$e^{-ij\pi/8}$	
0	1.000		8	-1.000	
1	0.924	-0.383i	9	-0.924	+0.383i
2	0.707	-0.707i	10	-0.707	+0.707i
3	0.383	-0.924i	11	-0.383	+0.924i
4		-1.000i	12		+1.000i
5	-0.383	-0.924i	13	0.383	+0.924i
6	-0.707	-0.707i	14	0.707	+0.707i
7	-0.924	-0.383i	15	0.924	+0.383i

因此，计算$S_{1,16}$实际上只需要执行三次复数乘法：

$$\begin{aligned}S_{1,16} = {} & A_0 - A_8 - i(A_4 - A_{12}) + 0.924[A_1 - A_7 - A_9 + A_{15} - i(A_3 + A_5 - A_{11} - A_{13})] \\ & + 0.707[A_2 - A_6 - A_{10} + A_{14} - i(A_2 + A_6 - A_{10} - A_{14})] \\ & + 0.383[A_3 - A_5 - A_{11} + A_{13} - i(A_1 + A_7 - A_9 - A_{15})].\end{aligned}$$

458

如果对$S_{n,16}$的 16 个值都同样节省，乘法的计算次数便由$16^2=256$次减少到$16\times 3=48$次.

快速傅里叶变换(FFT)是通过对(27)式中项的重排来计算变换系数的一种算法. FFT 兴起于 20 世纪 60 年代末期，在现代系统分析与信号处理上有重要应用. 对于形如2^m的N值，计算N个$S_{n,N}$的值所需的所有乘法运算次数大概减少到$Nm/2=(N/2)\log_2 N$次. 现在已有很多现成的 FFT 程序，小型计算机数秒内可处理 4096 个点的变换. FFT 的基本原理在习题 12 中给出；其应用及误差分析在参考文献中有所讨论.

练习 8.1

1. 计算下列函数的傅里叶级数.

(a) $F(t)=\sin^3 t$

(b) $F(t)=\left|\cos^3 \dfrac{t}{3}\right|$

(c) $F(t)=t^2 \quad (-\pi<t<\pi)$

(d) $F(t)=t|t| \quad (-\pi<t<\pi)$

459

2. 验证下列函数的傅里叶表达式，并说明傅里叶级数在区间$[-\pi, \pi]$上的收敛性质.

(a) $\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\text{为偶数}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi(n^2-1)} e^{int} = |\sin t|$

(b) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh\pi}{(1-in)\pi} e^{int} = e^t$

(c) $\displaystyle\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t\leqslant 0,\\ \sin t, & 0\leqslant t\leqslant\pi\end{cases}$

(d) $\displaystyle\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nt-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant t\leqslant 0,\\ t, & 0\leqslant t<\pi\end{cases}$

3. 习题 2 中的哪些级数可逐项微分？

4. 证明(12)式. [提示：利用(11)式.]

5. 将级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

改写为一个三角级数的形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,$$

试推导关系式

$$\alpha_0 = c_0,$$
$$\alpha_n = c_n + c_{-n} \qquad (n \geqslant 1),$$
$$\beta_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad (n \geqslant 1).$$

系数 c_n 满足什么条件时，这个级数的和是一个实函数？

6. (a) 如果 $F(t)$ 只定义在 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 上，证明：通过定义 $F(-t) := -F(t)$，$0 < t \leqslant \pi$，在区间 $[-\pi, \pi]$ 上构造 $F(t)$ 的傅里叶级数便可得到 F 的傅里叶正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nt,$$

它的系数为

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\sin nt\,dt.$$

说明傅里叶正弦级数在 $0 \leqslant t \leqslant \pi$ 上收敛于 $F(t)$ 的条件.

460

(b) 与(a)一样，证明：通过定义 $F(-t) := F(t)$ $(0 < t \leqslant \pi)$ 得到一个傅里叶余弦级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos nt,$$

它的系数为

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\,dt, \qquad \alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\cos nt\,dt \quad (n \geqslant 1).$$

说明傅里叶余弦级数在 $[0, \pi]$ 上的收敛条件.

7. 求下列方程的周期解的傅里叶表达式.

(a) $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + 3f = \sin^4 t.$

(b) $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + \dfrac{df}{dt} + f = t^2$，$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$，连续且以 2π 为周期.

(c) $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + 4\dfrac{df}{dt} + 2f =$ (图 8-2 中所示的阶梯函数).

8. 证明：函数 $F(t) = t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的傅里叶正弦级数与傅里叶余弦级数分别为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$$

及

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n\text{为奇数}}}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}.$$

(参见习题 6.)

9. 假设我们希望解单位圆盘上的狄利克雷问题，并且所求的关于 $z = e^{i\theta}$ 的调和函数的边值由级数

$$U(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta$$

给出. 证明此狄利克雷问题的解为

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n r^n \sin n\theta.$$

10. 作为应用傅里叶方法求解偏微分方程的一个重要例子，考虑热流沿端点保持0度、长度为 π 的均衡杆的非静态问题. 此时，温度 T 是关于杆上点的位置 $x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 及时间 t 的函数. 设起点($t=0$)的温度分布指定为 $f(x)$，T 必满足方程

461

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$
$$T(0,t) = T(\pi,t) = 0,$$
$$T(x,0) = f(x),$$

其中 $0 < x < \pi$，$t > 0$. 若傅里叶展开式可逐项微分，证明

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx e^{-n^2 t}$$

是方程的解，其中 a_n 由

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\sin n\xi \mathrm{d}\xi$$

定义. [提示：利用习题6的傅里叶正弦级数.] 当 $t \to \infty$ 时，$T(x, t)$ 的极限值是多少？为什么？

11. 傅里叶方法的另一个重要应用是处理振动弦问题. 一条被拉紧的弦固定在 $x=0$ 和 $x=\pi$ 两点，它的初始形状函数为 $u = f(x)$，其中 u 为弦在点 x 处的位移，然后释放该弦. 振动弦的位移函数 $u(x, t)$ 由方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = f(x),$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

控制，其中 $0 < x < \pi$，$t > 0$. 再设傅里叶展开式可以逐项微分，证明

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nt$$

是上述方程的解，其中 b_n 定义为

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\sin n\xi \mathrm{d}\xi.$$

[提示：应用傅里叶正弦级数.] 若"初始条件"改为

$$u(x,0) = 0,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f(x).$$

462

如何修改上述 $u(x, t)$ 的表达式？

结合以上式子，求满足更一般初始条件

$$u(x,0) = f_1(x),$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x)$$

的偏微分方程的解 $u(x, t)$.

12. (快速傅里叶变换)考虑(27)式的计算. 如本节中所提到的，计算 N 个 $S_{n,N}$ 的值显然需要 N^2 次复数乘法.

(a) 设 N 为偶数：$N = 2N_1$. 证明 $S_{n,N}$ 的公式可改写为

$$S_{n,N}=\sum_{j=0}^{N_1-1}A_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nj/N}+\sum_{j=0}^{N_1-1}A_{j+N_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n(j+N_1)/N}$$
$$=\sum_{j=0}^{N_1-1}\{A_j+(-1)^nA_{j+N_1}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nj/N}=\sum_{j=0}^{N_1-1}B_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nj/N}.$$

(b) 现在计算 N 个 $S_{n,N}$ 的值需要多少次复数乘法？[答案：N 个系数乘以每个系数的 $N_1(=N/2)$ 次 $=N^2/2$ 次乘法；当然与 -1 的乘法不计算在内.] 迭代这个过程，乘法次数将再次减半(假设 N_1 还是偶数). 然而，(a)式中的和式与(27)式中的形式不同——在求和范围内，指数上的 N 与 N_1 不一致. 因此我们必须再回到步骤(a).

(c) 证明：若 n 是偶数，$n=2n_1$，则(a)中和式的形式为

$$S_{n,N}=\sum_{j=0}^{N_1-1}B_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nj/N}=\sum_{j=0}^{N_1-1}B_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n_1j/N_1},$$

若 n 是奇数，$n=2n_1+1$，则和式可写为

$$S_{n,N}=\sum_{j=0}^{N_1-1}\{B_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j/N}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n_1j/N_1}=\sum_{j=0}^{N_1-1}C_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n_1j/N_1}.$$

(d) 注意到在(c)中，计算系数 C_j 需要“前面的”$N_1=N/2$ 次乘法，那么计算 N 个 $S_{n,N}$ 值需要多少次复数乘法？[答案：$N/2$ 次乘法加上 N 个系数乘以每个系数的 $N/2$ 次 $=N/2+N^2/2$.]

(e) 由 $N_1=N/2$ 代替 N，(c)的和式与(27)式中的和式在形式上完全相同. 若对(c)中的两个新和中的每一个重复上述步骤，则求和的项数变为 $N_2=N_1/2=N/4$ 项，并且需要前面的 N_2 次乘法运算来计算新的系数. 这时计算 N 个 $S_{n,N}$ 值需要多少次复数乘法？[答案：计算系数 C_j 需前面的 N_1 次乘法，加上 2 乘以类似(c)中的每个新和所需的 N_2 次乘法，再加上 N 个系数乘以每个系数的 $N/2$ 次，即 $N/2+2(N/4)+N^2/4=2(N/2)+N^2/4$ 次.] [463]

(f) 再重复一次(c)中的步骤，计算 N 个 $S_{n,N}$ 值需要多少次复数乘法？[答案：$3(N/2)+N^2/8$.]

(g) 若 N 是 2 的某次幂，按(c)的步骤一直做下去，把每个和式降低到一项，计算 N 个傅里叶系数需要多少次复数乘法？[答案：$(\log_2N)(N/2)+N$ 次乘法.]

8.2 傅里叶变换

本节主要研究将任意函数分解为正弦曲线的问题. 我们已经知道如何将周期函数表示为一个傅里叶级数，因此，对于非周期函数，我们也希望找到类似的表达式.

首先，给定一个非周期函数 $F(t)$，$-\infty<t<\infty$，并假设它是连续可微的. 如果选取形如 $(-L/2,\ L/2)$ 的一个区间，在此区间上，$F(t)$ 可表示为一个 t 的傅里叶级数

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi t/L},\qquad \frac{-L}{2}<t<\frac{L}{2},\tag{1}$$

其中系数为

$$c_n=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2\pi t/L}\mathrm{d}t\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{2}$$

事实上，(1)式中的级数定义了一个周期函数 $F_L(t)$，$(-\infty<t<\infty)$，它在 $(-L/2,\ L/2)$ 上与 $F(t)$ 是一致的；参见图 8-4. [注意，即使 $F(t)$ 光滑，$F_L(t)$ 也可能是不连续的.]

这样，我们得到了 $F(t)$ 在长度为 L 的区间上的一个正弦曲线表达式. 这时，如果令 $L\to\infty$，我们似乎有理由猜测，$F_L(t)$ 可能会演变成 $F(t)$ 对所有 t 的正弦曲线表达式. 下面我们来探讨这个问题.

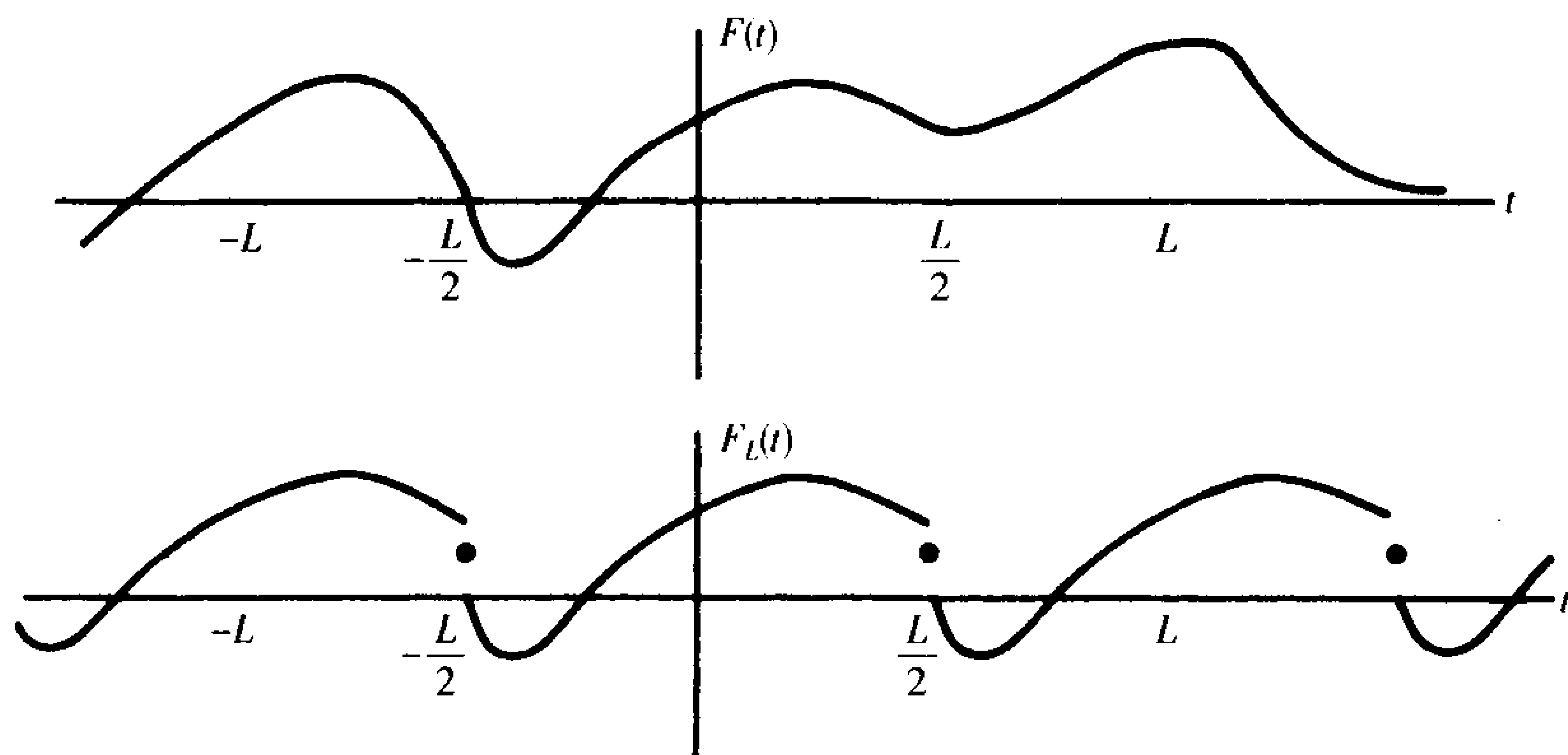


图 8-4 修改 $F(t)$ 得到的周期函数 $F_L(t)$

我们将上述等式改写为看起来有些奇怪的形式，但当 $L\to\infty$ 时，对理解这些等式会有帮助. 定义 $g_n=c_nL/2\pi$，对(1)式的级数中引进因子 $[(n+1)-n]\equiv1$，则有

464

$$F_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in2\pi t/L} \frac{[(n+1)-n]2\pi}{L} \tag{3}$$

及

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} F(t)e^{-in2\pi t/L}dt. \tag{4}$$

记 $\omega_n=n2\pi/L$，则

$$F_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_L(\omega_n)e^{i\omega_n t}(\omega_{n+1}-\omega_n), \tag{5}$$

其中，对于任意实数 ω，函数 $G_L(\omega)$ 定义为

$$G_L(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} F(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{6}$$

当 $L\to\infty$ 时，$G_L(\omega)$ 自然趋于一个函数 $G(\omega)$：

$$\boxed{G(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt.} \tag{7}$$

它就是人们熟悉的 F 的傅里叶变换. 而且，当 $L\to\infty$ 时，$\Delta\omega_n:=\omega_{n+1}-\omega_n$ 趋于 0，又 ω_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变动，所以从形式上看(5)式很像积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

的黎曼和.

这使我们猜想，当 G 由(7)式定义时，对非周期函数 F 有如下等式：

465

$$\boxed{F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega.} \tag{8}$$

(8)式称为傅里叶反演公式.

(7)式和(8)式是傅里叶变换理论最本质的公式. 像我们在前面的讨论中提到的那样，可把(8)式中的积分看作是正弦曲线在频率 ω 的一个连续统上的广义“和”. 在这个和中，(7)式表示“系数”$G(\omega)\mathrm{d}\omega$.

例 1 求函数

$$F(t)=\frac{1}{t^2+4}$$

的傅里叶变换，并验证 F 的傅里叶反演公式.

解 函数

$$F(t)=\frac{1}{t^2+4}=\frac{1}{(t-2\mathrm{i})(t+2\mathrm{i})}$$

在除去简单极点 $t=\pm 2\mathrm{i}$ 外解析. 我们利用留数定理求傅里叶变换，并取积分的主值：

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{t^2+4}\mathrm{d}t.$$

若 $\omega\geqslant 0$，我们在下半平面内用不断扩大的半圆周作闭合周线，由第 6 章的计算技巧得

$$\begin{aligned}G(\omega)&=\frac{1}{2\pi}(-2\pi\mathrm{i})\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{t^2+4};-2\mathrm{i}\right)\\&=-\mathrm{i}\cdot\lim_{t\to-2\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{t-2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-2\omega}}{4}\qquad(\omega\geqslant 0).\end{aligned}$$

同理，对 $\omega<0$，我们在上半平面内闭合周线，得

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}(2\pi\mathrm{i})\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{t^2+4};2\mathrm{i}\right)=\frac{\mathrm{e}^{2\omega}}{4}\qquad(\omega<0).$$

综上，

$$G(\omega)=\frac{\mathrm{e}^{-2|\omega|}}{4}.$$

为了验证傅里叶反演公式，我们计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2|\omega|}}{4}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

由对称性知，上式的虚部等于 0，积分等于

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2|\omega|}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega&=2\cdot\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\omega}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left.\frac{\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i}t)\omega}}{-2+\mathrm{i}t}\right|_{\omega=0}^{\infty}=\frac{1}{t^2+4}.\end{aligned}$$

466

因此

$$\frac{1}{t^2+4}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2|\omega|}}{4}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{9}$$

■

对于傅里叶级数，在傅里叶积分表达式(7)、(8)成立的情况下，我们得到了许多定理. 在应用上，有一个非常有用的定理，它涉及上一节定理 2 中的分段光滑函数 $F(t)$；即在每个有界区间内，除去有限个点 $t=\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_n$ 外，$F(t)$连续可微，且在每一点 τ_j 处，$F(t)$与

$F'(t)$的"单边极限"存在. 注意，定理中的积分要求取积分主值，这样就保证了反演变换在间断点处的收敛性.

定理 4 设 $F(t)$ 在每个有界区间上分段光滑，且 $\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|dt$ 存在，则 F 的傅里叶变换 $G(\omega)$ 存在，且

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}F(t) & \text{在 } F \text{ 的连续点},\\ \dfrac{F(t+)+F(t-)}{2} & \text{在其他点处}.\end{cases}$$

例 2 求函数

$$F(t)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant t\leqslant\pi,\\ 0, & \text{在其他点处}\end{cases}$$

(见图 8-5)的傅里叶变换并验证其反演公式.

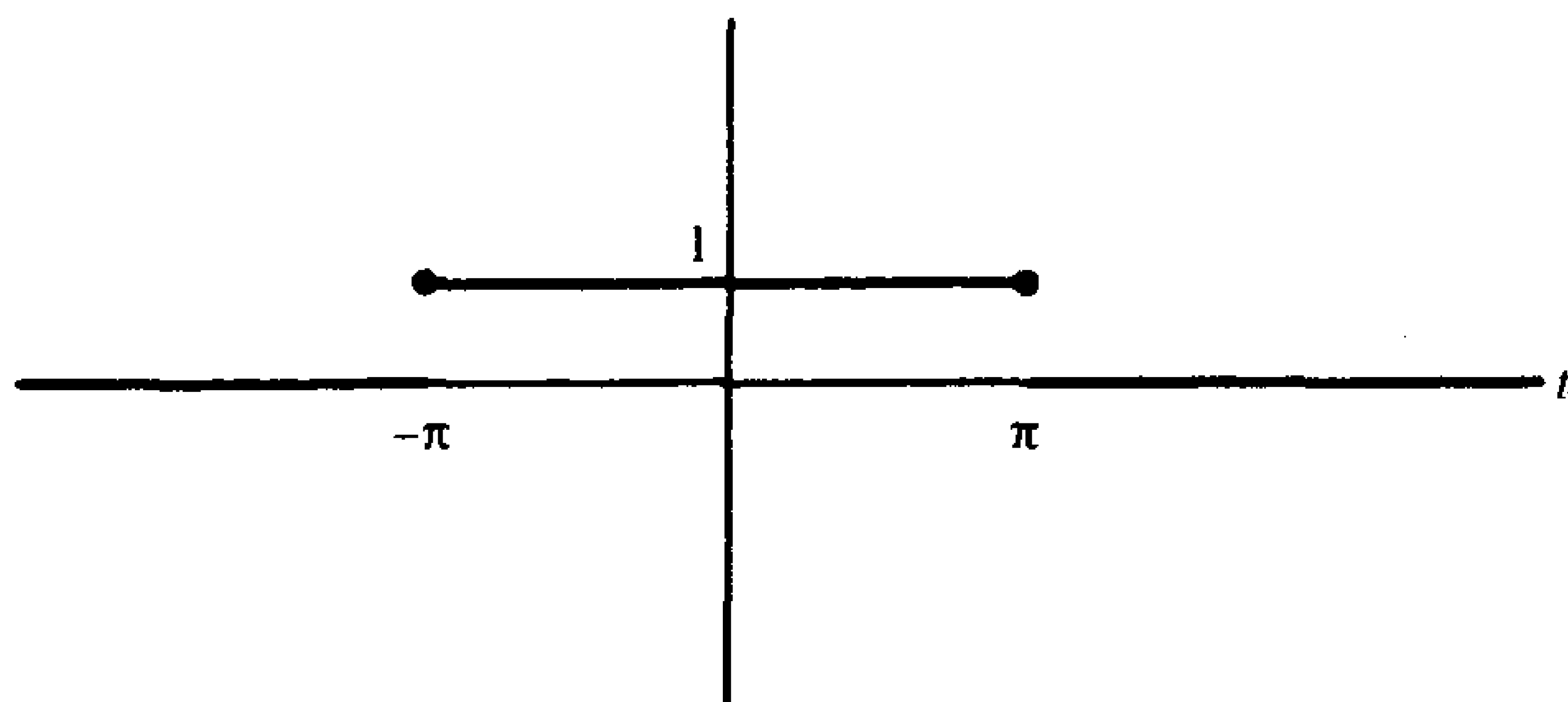


图 8-5 方脉冲函数

解 $F(t)$的傅里叶变换为

467

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1)e^{-i\omega t}dt=\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}.$$

因此由定理 4，得 $F(t)$的反演变换

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}e^{i\omega t}d\omega=\begin{cases}1, & |t|<\pi,\\ 0, & |t|>\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm\pi.\end{cases}\tag{10}$$

为验证上式，将(10)左端改写为

$$\text{p. v.}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(\pi+t)}-e^{i\omega(-\pi+t)}}{\omega}d\omega.\tag{11}$$

由 6.5 节例 1，

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=i\pi.$$

对上式作变量替换 $x=C\omega$，得

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iC\omega}}{\omega}d\omega=\begin{cases}i\pi & C>0,\\ -i\pi & C<0.\end{cases}$$

显然

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

因此，我们得到

若 $t<-\pi$，则(11)式化为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[-\mathrm{i}\pi-(-\mathrm{i}\pi)]=0$；

若 $t=-\pi$，则(11)式化为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[0-(-\mathrm{i}\pi)]=\frac{1}{2}$；

若 $-\pi<t<\pi$，则(11)式化为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\mathrm{i}\pi-(-\mathrm{i}\pi)]=1$；

若 $t=\pi$，则(11)式化为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\mathrm{i}\pi-0]=\frac{1}{2}$；

若 $\pi<t$，则(11)式化为$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\mathrm{i}\pi-\mathrm{i}\pi]=0.$ ■

例 3 求函数

$$F(t) = \begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant 6\pi,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(见图 8-6)的傅里叶变换并验证其反演公式.(物理学家称之为有限列波.) 468

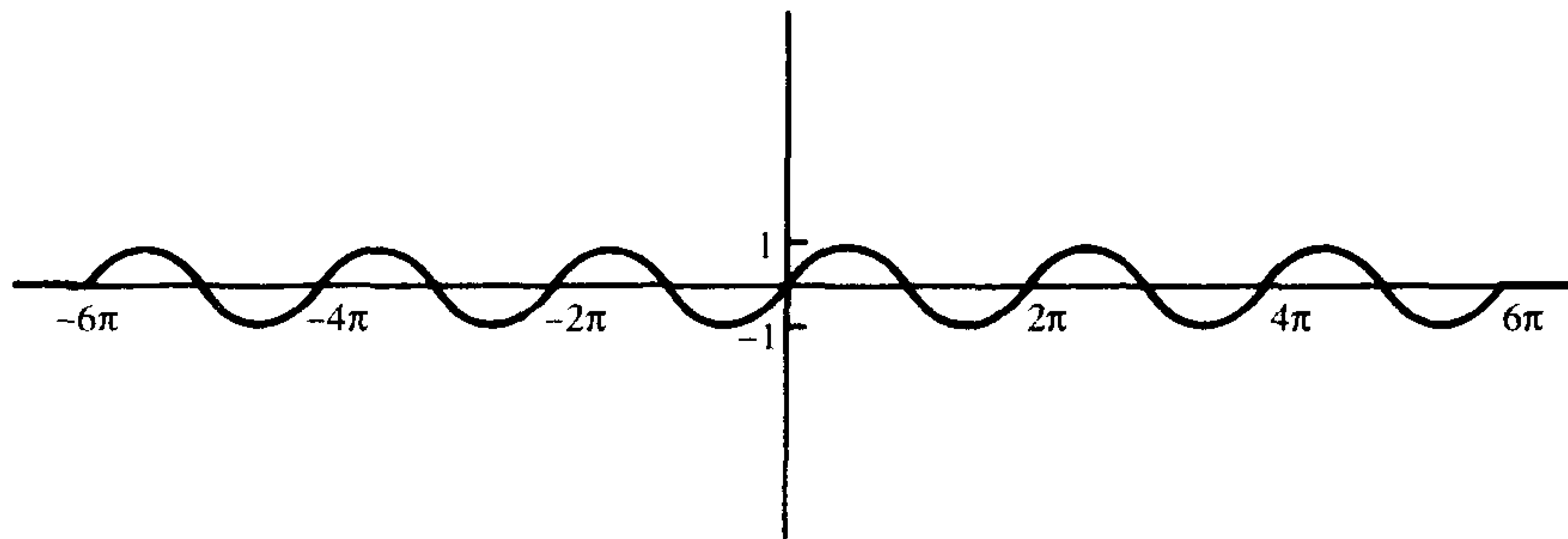


图 8-6 有限列波

解 $F(t)$的傅里叶变换为

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-6\pi}^{6\pi}(\sin t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}\sin 6\pi\omega}{\pi(1-\omega^2)}.$$

由于 $F(t)$处处连续，所以反演公式蕴涵

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}\sin 6\pi\omega}{\pi(1-\omega^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = F(t). \tag{12}$$

为了验证上式，将左端改写为

$$\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(6\pi+t)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(-6\pi+t)}}{(1-\omega^2)}\mathrm{d}\omega = \text{p. v.}\ \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(6\pi+t)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(-6\pi+t)}}{(\omega-1)(\omega+1)}\mathrm{d}\omega$$

(因为 $\omega=\pm 1$ 是可去奇点).

利用 6.5 节的凹周线方法可以计算积分

$$\text{p. v.}\ \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(6\pi+t)}}{(\omega-1)(\omega+1)}d\omega.$$

当 $t\geqslant-6\pi$ 时，借助图 8-7a 中的闭周线及第 6 章引理 3 和引理 4，得

$$\begin{aligned}\text{p. v.}\ \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(6\pi+t)}}{(\omega-1)(\omega+1)}d\omega &= \frac{-1}{2\pi}(\pi i)\{\text{Res}(-1)+\text{Res}(1)\}\\ &= \frac{-i}{2}\left[\frac{e^{-i(6\pi+t)}}{-2}+\frac{e^{i(6\pi+t)}}{2}\right]\\ &= \frac{\sin(6\pi+t)}{2}=\frac{\sin t}{2}.\end{aligned}$$

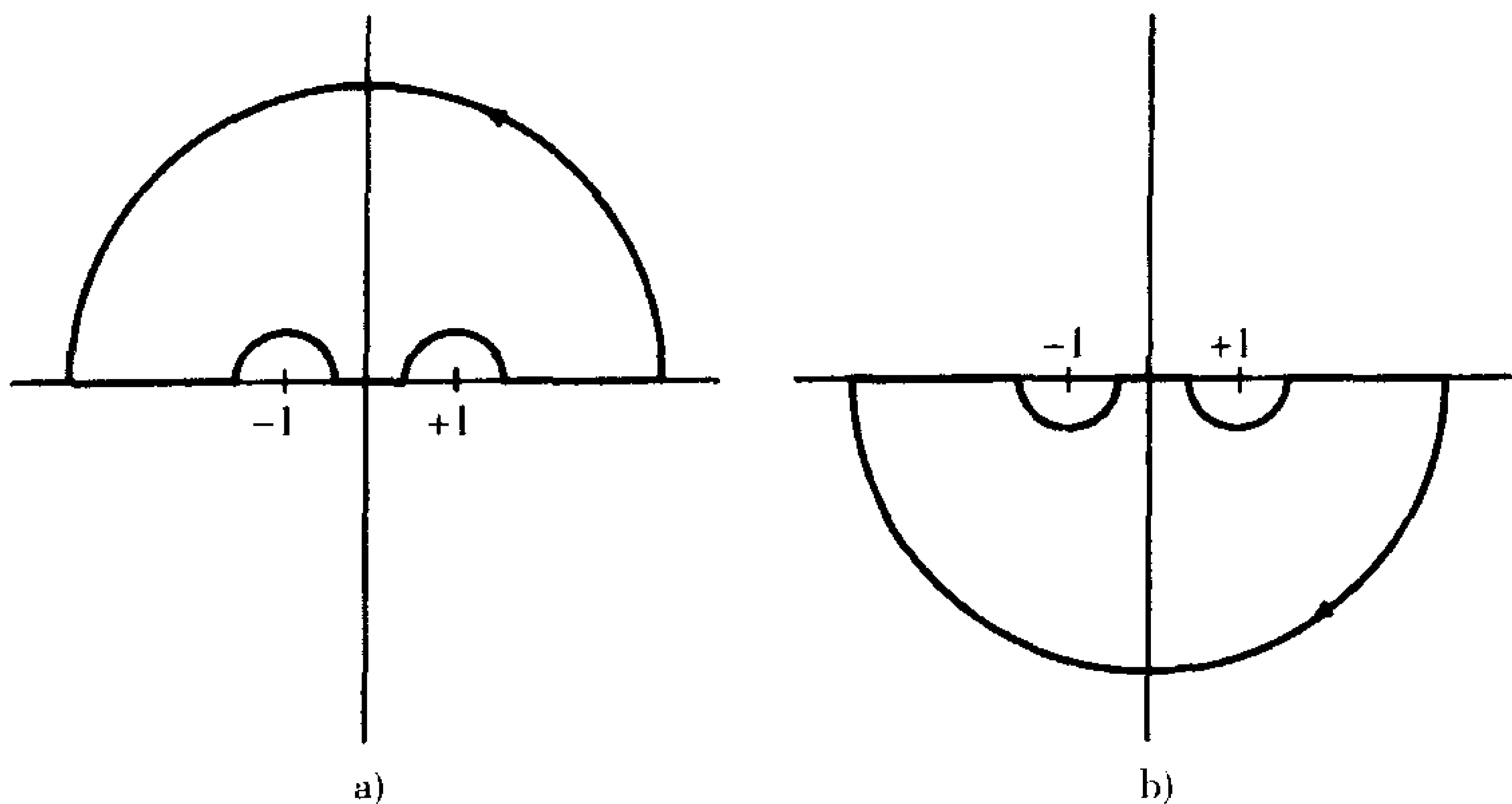


图 8-7 例 3 的周线

类似地，当 $t\leqslant-6\pi$ 时，我们借助图 8-7b 中的闭周线，得到

$$\begin{aligned}\text{p. v.}\ \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(6\pi+t)}}{(\omega-1)(\omega+1)}d\omega &= \frac{-1}{2\pi}(-\pi i)\{\text{Res}(-1)+\text{Res}(1)\}\\ &= -\frac{\sin t}{2}.\end{aligned}$$

469

同理可得

$$\text{p. v.}\ \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega(-6\pi+t)}}{(\omega-1)(\omega+1)}d\omega = \begin{cases}\dfrac{\sin t}{2} & t\geqslant 6\pi,\\ -\dfrac{\sin t}{2} & t\leqslant 6\pi.\end{cases}$$

将两个结果结合起来，就证明了(12)式. ■

像傅里叶级数那样，傅里叶变换方程也可用于求解线性系统的问题. 下面举例说明.

例 4 求满足微分方程

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}+2\frac{d f(t)}{dt}+2f(t)=\begin{cases}\sin t & |t|\leqslant 6\pi,\\ 0 & \text{在其他点处}\end{cases}\tag{13}$$

的函数.

解 在8.1节例6中，我们知道方程$f''+2f'+2f=e^{i\omega t}$的解是

$$\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2+2i\omega+2}.$$

现在(13)式右端是上例中的函数$F(t)$，且(12)式可理解为F是形如$e^{i\omega t}$的正弦曲线的"叠加". 因此，我们断定相应的解的叠加

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sin 6\pi\omega}{\pi(1-\omega^2)}\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2+2i\omega+2}\right)d\omega \tag{14}$$

470

就是给定方程的解. 像前面一样，应该证明这个表达式收敛且可在积分号下微分两次. 但是，我们更愿意应用留数理论得到表达式(习题2)

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant -6\pi,\\ \dfrac{2}{5}(e^{-6\pi-t}-1)\cos t+\dfrac{1}{5}(e^{-6\pi-t}+1)\sin t, & -6\pi\leqslant t\leqslant 6\pi,\\ -(e^{6\pi}-e^{-6\pi})e^{-t}\left(\dfrac{2}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t\right), & t\geqslant 6\pi,\end{cases}$$

可直接验证$f(t)$就是微分方程(13)的解. ■

如果对函数与它的变换之间的关系式(7)和(8)的解释不那么严格，则作为处理周线积分的一个有趣的例子，我们下面给出一个等式的非正式推导，这个等式称为傅里叶展开定理.

例5 设函数$F(t)$在开带形区域$|\mathrm{Im}t|<\delta$内解析，且以常数M为界，$G_L(\omega)$由(6)式定义. 证明：当$L\to\infty$时，对任意的实数t，有

$$\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}G_L(\omega)e^{i\omega t}d\omega\to F(t). \tag{15}$$

证 首先注意到，如果$F(t)$存在傅里叶变换，则它必为$G_L(\omega)$当$L\to\infty$时的极限. 因此(15)式看起来非常像傅里叶反演公式. 实际上，我们应该证明，当$L>2|t|$时，(15)式的两端相等.

为此，通过

$$\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}G_L(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\left[\int_{-L/2}^{L/2}F(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega\tau}d\omega=:\lim_{r\to\infty}I_r \tag{16}$$

定义I_r. 在本题条件下，交换I_r中积分的次序是合理的，对此我们不作证明. 从而

$$\begin{aligned}I_r&=\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\left[\int_{-L/2}^{L/2}F(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}F(\tau)\left[\int_{-r}^{r}e^{-i\omega(t-\tau)}d\omega\right]d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{F(\tau)}{i(t-\tau)}(e^{ir(t-\tau)}-e^{-ir(t-\tau)})d\tau.\end{aligned}$$

471

将上式改写为

$$\begin{aligned}I_r=&\frac{1}{2\pi i}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{F(\tau)}{t-\tau}(e^{ir(t-\tau)}-1)d\tau\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{F(\tau)}{t-\tau}(1-e^{-ir(t-\tau)})d\tau,\end{aligned} \tag{17}$$

由于 $\tau=t$ 是上式中两被积函数的可去奇点，所以两被积函数在 $|\mathrm{Im}\tau|<\delta$ 内解析，从而积分与路径无关. 我们选择图 8-8 中的周线 Γ^- 计算(17)式的第一个积分，选择周线 Γ^+ 计算第二个积分：

$$I_r=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^-}\frac{F(\tau)}{t-\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(t-\tau)}-1)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^+}\frac{F(\tau)}{t-\tau}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r(t-\tau)})\mathrm{d}\tau.$$

若将它写为

$$I_r=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^-}\frac{F(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^+}\frac{F(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^-}\frac{F(\tau)}{t-\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma^+}\frac{F(\tau)}{t-\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau,\tag{18}$$

则前两个积分结合可给出 $F(\tau)/2\pi\mathrm{i}(\tau-t)$ 沿正向简单闭周线 $(\Gamma^-,\ -\Gamma^+)$ 的积分，由柯西积分公式，它恰等于 $F(t)$. 若能证明 $r\to\infty$ 时后两个积分趋于 0，则(15)式得证. 因为对于下半平面内的 τ 有 $\exp[\mathrm{i}r(t-\tau)]\to 0$，对于上半平面内的 τ 有 $\exp[-\mathrm{i}r(t-\tau)]\to 0$，显然这是可能的.

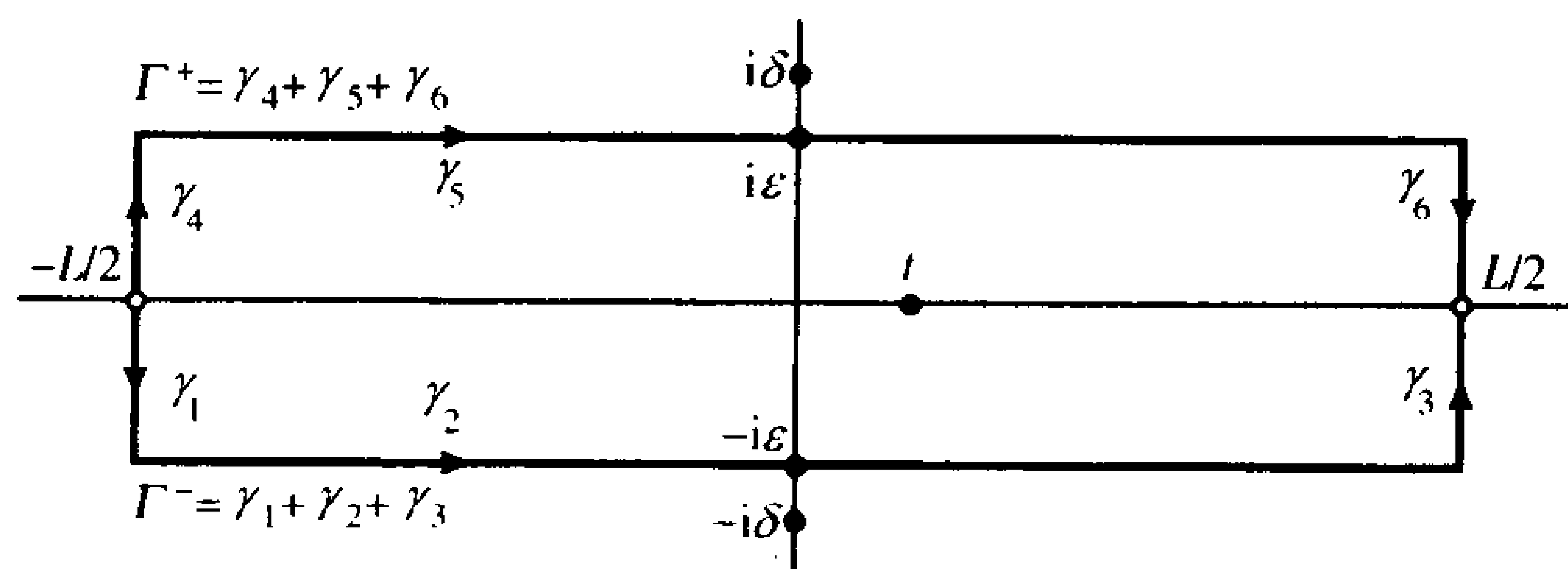


图 8-8 例 5 的周线

为了详细说明，先考虑沿 γ_1：$\tau=-L/2-\mathrm{i}y$，$0\leqslant y\leqslant\varepsilon$(参见图 8-8)的积分，则有

472

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_1}\frac{F(\tau)}{t-\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{M}{L/2-|t|}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}rt}\mathrm{e}^{\mathrm{i}rL/2}\mathrm{e}^{-ry}|\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{M}{L-2|t|}\int_0^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-ry}\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\frac{M}{L-2|t|}\frac{1-\mathrm{e}^{-r\varepsilon}}{r},$$

其中 M 是 $|F|$ 的界. 显然 $r\to\infty$ 时，上式趋于 0. 对于沿 γ_2：$\tau=x-\mathrm{i}\varepsilon$，$-L/2\leqslant x\leqslant L/2$(仍参见图 8-8)的积分，

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_2}\frac{F(\tau)}{t-\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{M}{\varepsilon}|e^{\mathrm{i}r(t-x+\mathrm{i}\varepsilon)}|\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\frac{M\mathrm{e}^{-r\varepsilon}}{\varepsilon}L,$$

当 $r\to\infty$ 时，它也趋于 0. 沿 γ_3，γ_4 和 γ_6 的积分与沿 γ_1 的积分的计算类似，沿 γ_5 的积分的处理方法与 γ_2 相同. 当 $r\to\infty$ 时，它们都趋于 0. 这样就完成了(15)式的证明. ■

练习 8.2

1. 求下列函数的傅里叶变换与反演公式.

(a) $F(t)=\mathrm{e}^{-|t|}$.

(b) $F(t)=e^{-t^2}$. [提示：完全平方并利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.]

(c) $F(t)=te^{-t^2}$. [提示：分部积分并应用(b).]

(d) $F(t)=\frac{\sin t}{t}$. [提示：利用(10)式.]

(e) $F(t)=\frac{\sin \pi t}{1-t^2}$. [提示：利用例3.]

2. 应用留数理论求(14)式的积分.

3. 求下列函数的傅里叶变换并验证反演公式(由留数理论或其他方法).

(a) $F(t)=\frac{1}{t^4+1}$.　　(b) $F(t)=\frac{t}{t^4+1}$.

(c) $F(t)=e^{-t^2}$. [提示：参见习题1中(b).]

4. 证明：若 $F(t)$ 是实函数，则它的傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数.

5. 证明：若 $G(\omega)$ 是 $F(t)$ 的傅立叶变换，则对任意常数 Ω，$G(\omega-\Omega)$ 是 $F(t)e^{i\Omega t}$ 的傅里叶变换.

6. 求下列微分方程的解的傅里叶积分表达式.

473

(a) $\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{df}{dt}+f=e^{-t^2}$

(b) $\frac{d^2f}{dt^2}+4\frac{df}{dt}+f=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}, & t\geqslant 0\end{cases}$

(c) $\frac{d^2f}{dt^2}+2\frac{df}{dt}+3f=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & \text{在其他点处}\end{cases}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $G(\omega)$，证明函数

$$T(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega x}e^{-\omega^2 t}d\omega$$

是偏微分方程

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

的解. 其中 $t>0$，$-\infty<x<\infty$，初始条件为

$$T(x,0)=f(x).$$

[这些方程描述了以起始温度 $T=f(x)$ 加热一条无限长杆时的热流. 见练习8.1中习题10.] 假定傅里叶表达式合理，且在积分号下可微.

将变换 $G(\omega)$ 代入 $T(x,t)$，交换积分次序，根据提示并结合习题1中的(b)，得到公式

$$T(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4t}d\xi.$$

8. 已知函数 $f(x)$ 的傅里叶变换是 $G(\omega)$，证明函数

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega x}\cos\omega t\,d\omega$$

是偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

的解. 初始条件为

$$u(x,0)=f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$$

其中 $t>0$, $-\infty<x<\infty$. [初始形状函数为 $u=f(x)$ 的无限长振动弦，在 $t=0$ 时刻释放后的运动由这些方程来控制. 见练习 8.1 习题 11.] 假设傅里叶表达式合理且积分号下可微.

474

若初始条件为

$$u(x,0)=0,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=f(x),$$

则应如何修改上述 $u(x,t)$ 的表达式?

结合以上结果，求在初始条件的一般集合

$$u(x,0)=f_1(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)$$

下的偏微分方程的解 $u(x,t)$.

9. 梅林变换[○]是傅里叶变换经过变量代换得到的. 设 $f(r)$ 的定义域为 $0<r<\infty$. 令 $x=-\mathrm{Log}r$ (因而 $r=\mathrm{e}^{-x}$), $F(x):=f(\mathrm{e}^{-x})$, 则 x 的取值范围为 $(-\infty,\infty)$.

(a) 写出 $F(x)$ 的傅里叶变换，并将它们重新写为关于 r 和 f 的式子，则有

$$f(r)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{Log}r}\mathrm{d}\omega,\quad g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}f(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{Log}r}r^{-1}\mathrm{d}r.$$

(b) f 的梅林变换可形式地定义为

$$M[s;f]:=\int_0^{\infty}f(r)r^{s-1}\mathrm{d}r.$$

证明它的反演变换为

$$f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}M[\mathrm{i}\omega;f]r^{-\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}\omega.$$

10. 调和函数 ϕ 的二元拉普拉斯方程在极坐标 $\phi=\phi(r,\theta)$ 下的表达式为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0.$$

(a) 假设微分与积分的次序可自由交换，应用梅林变换证明

$$\phi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M[\mathrm{i}\omega;f]}{\sinh\omega\theta_0}r^{-\mathrm{i}\omega}\sinh\omega\theta\mathrm{d}\omega$$

是拉普拉斯方程在角域 $0<\theta<\theta_0$ 内的解，并且边界值为 $\phi(r,0)=0$, $\phi(r,\theta_0)=f(r)$.

475

(b) 建立拉普拉斯方程在角域 $0<\theta<\theta_0$ 内的解，取边界值 $\phi(r,0)=f(r)$, $\phi(r,\theta_0)=0$.

(c) 建立拉普拉斯方程在角域 $0<\theta<\theta_0$ 内的解，取边界值 $\phi(r,0)=f_1(r)$, $\phi(r,\theta_0)=f_2(r)$.

(d) 建立拉普拉斯方程在角域 $0<\theta<\theta_0$ 内的解，使之满足边界条件 $\partial\phi(r,0)/\partial\theta=0$, $\phi(r,\theta_0)=f(r)$.

8.3 拉普拉斯变换

在前两节中，我们通过频率分析的方法解决了一些线性系统问题. 这种方法可以描述为：如果线性系统输入一个正弦函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，那么我们希望它存在一个与 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 有相同频率的正弦曲线解.

线性系统的解可能不是唯一的，例如，求一个函数 $f(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}.\tag{1}$$

○ 梅林(Hjalmar Mellin, 1854—1933)是芬兰国家科学院的创始人之一.

这个方程有一个形如Ae^{i2t}的解，其中$A=1/(4i-3)$. 但如果$g(t)$是所谓的相伴齐次方程

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2}+2\frac{dg(t)}{dt}+g(t)=0$$

的一个解，则函数g加上方程(1)的解f即可得到方程(1)的另一个解. 例如，函数

$$\frac{1}{4i-3}e^{i2t}+7e^{-t} \tag{2}$$

也是方程(1)的解，因为$7e^{-t}$是一个"齐次解". 读者通过直接计算，可以验证(2)确实是方程(1)的解.

对于大多数物理系统，这些齐次解只是自然界中的瞬变现象；也就是说，它们会随着时间的增长而逐渐消失[例如(2)中的e^{-t}]. 这说明，大多数物理系统如果不受外力作用的话，最终会由于阻力、阻尼或辐射损耗等耗散现象而停止运动. 这种系统称为*渐近稳定系统*. 在这种情况下，前两节中讨论的这类问题都有唯一解，这是因为对于周期函数和整个实轴上可积的函数来说，输入是从"$t=-\infty$"开始驱动系统的，从而在任何(有限)时间内瞬变现象肯定逐渐消失.

这时需要寻找数学工具更灵活地处理瞬变现象. 即我们必须考虑两种情况，一种是输入在$t=0$开始，但永远不能驱动系统；另一种是在$t=0$时，系统以某些"初始状态"开始，而这些初始状态可能与系统的稳定解不一致. 下面我们将看到，*拉普拉斯变换*可以处理这两种现象，并且也适用于无耗散系统. 476

我们从输入函数开始研究. 设$F(t)$定义在$t\geq 0$上. 为讨论方便，我们将这个区域扩充到整个实轴，这样，在$t<0$时，令$F(t)=0$(这种函数通常称为"因果函数")，并考虑F的傅里叶变换：

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt.$$

在上述情况下，有

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{3}$$

如果F在∞附近的性质充分好(这里不必准确地指出其具体性质)，我们可以证明(3)式定义了一个下半平面$\text{Im}\,\omega<0$上关于ω的解析函数. 实际上，它的导数为

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega}=\frac{-i}{2\pi}\int_{0}^{\infty}tF(t)e^{-i\omega t}dt;$$

因为

$$|e^{-i\omega t}|=e^{(\text{Im}\omega)t}$$

在下半平面有界，所以，上边取下半平面是合适的. 如果令ω是纯虚数，譬如$\omega=-is$，其中s是非负实数，构造函数

$$g(s)\coloneqq 2\pi G(-is), \tag{4}$$

函数

$$\boxed{g(s) = \int_0^{\infty} F(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t} \tag{5}$$

称为 $F(t)$ 的拉普拉斯变换.

通常以记号

$$g(s) = \mathcal{L}\{F\}(s)$$

表示 $g(s)$ 与 $F(t)$ 间的上述关系. 拉普拉斯变换表如下:

拉普拉斯变换表

(i) $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ $[\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(a)]$

(ii) $\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{0t}\} = \dfrac{1}{s}$ $[\mathrm{Re}\,(s) > 0]$

(iii) $\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \mathrm{Re}\,\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > 0$]

(iv) $\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \mathrm{Im}\,\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > 0$]

(v) $\mathcal{L}\{\cosh\omega t\} = \mathcal{L}\{\cos\mathrm{i}\omega t\} = \dfrac{s}{s^2-\omega^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > |\omega|$]

(vi) $\mathcal{L}\{\sinh\omega t\} = \mathcal{L}\{-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}\omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > |\omega|$]

(vii) $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos\omega t\} = \mathrm{Re}\,\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\omega)t}\} = \dfrac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$ [ω, λ 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > -\lambda$]

(viii) $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega t\} = \mathrm{Im}\,\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\omega)t}\} = \dfrac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$ [ω, λ 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > -\lambda$]

(ix) $\mathcal{L}\{t^n\mathrm{e}^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ $[\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(a)]$

(x) $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $[\mathrm{Re}\,(s) > 0]$

(xi) $\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} = \mathrm{Re}\,\mathcal{L}\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > 0$]

(xii) $\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} = \mathrm{Im}\,\mathcal{L}\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\} = \dfrac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$ [ω 是实数, $\mathrm{Re}\,(s) > 0$]

(xiii) $\mathcal{L}\{F(t)\mathrm{e}^{-at}\}(s) = \mathcal{L}\{F\}(s+a)$

(xiv) $\mathcal{L}\{aF(t) + bH(t)\} = a\,\mathcal{L}\{F(t)\} + b\,\mathcal{L}\{H(t)\}$

例如, 考虑 $F(t) = \mathrm{e}^{-t}$, 它的拉普拉斯变换为

$$g(s) = \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-t}\}(s) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\left.\frac{\mathrm{e}^{-(s+1)t}}{s+1}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}.$$

注意, 如果 s 充分大, 即使 $t\to\infty$ 时 F 不趋于 0, (5)式中的积分也可能收敛. 事实上, 对于函数 $F(t) = \mathrm{e}^{7t}$, 它可能刻画一个无消散“失控”物理系统, 我们有

$$\int_0^b e^{7t}e^{-st}dt = \frac{e^{(7-s)b}-1}{7-s},$$

如果 $s>7$，当 $b\to\infty$ 时上式趋于 $(s-7)^{-1}$. 实际上，只要存在两个正数 M 和 α 满足

$$|F(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \text{对任意的 } t \geqslant 0,$$

便可证明(5)式的积分对任意满足 $\mathrm{Re}(s)>\alpha$ 的复数 s 都收敛. 因而，我们说(5)式对那些使积分收敛的任意(复数)s 定义了拉普拉斯变换 $\mathcal{L}\{F\}(s)$. 拉普拉斯变换允许频率变量 ω 为复数，因而在本质上它比傅里叶变换包含了更多的函数.

对前面的计算进行简单推广可知，对于 $\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(a)$，函数 e^{at} 的拉普拉斯变换是 $1/(s-a)$. 通过选取不同的常数 a，我们便可得到拉普拉斯变换表中的前 8 个公式. (ix)由分部积分可推出，(x)式、(xi)式及(xii)式可直接由(ix)式推出.

(xiii) 式的推导过程如下：

$$\mathcal{L}\{F(t)e^{-at}\}(s) = \int_0^\infty F(t)e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty F(t)e^{-(s+a)t}dt = \mathcal{L}\{F\}(s+a).$$

(xiv) 式说明拉普拉斯变换是线性变换.

由导函数 $F'(t)$ 的拉普拉斯变换，我们可以看到拉普拉斯变换是如何把系统的初始状态考虑进去的；我们有

$$\mathcal{L}\{F'\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt.$$

若 F' 的性质充分好从而允许分部积分，则上式变为

$$\mathcal{L}\{F'\}(s) = -\int_0^\infty (-s)e^{-st}F(t)dt + e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty,$$

假设当 $t\to\infty$ 时 $e^{-st}F(t)\to 0$，可得到

$$\mathcal{L}\{F'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{F\}(s) - F(0). \tag{6}$$

重复以上过程，则

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F''\}(s) &= s\,\mathcal{L}\{F'\}(s) - F'(0)\\ &= s^2\,\mathcal{L}\{F\}(s) - sF(0) - F'(0),\end{aligned} \tag{7}$$

一般地，有

$$\mathcal{L}\{F^{(k)}\}(s) = s^k\,\mathcal{L}\{F\}(s) - s^{k-1}F(0) - s^{k-2}F'(0) - \cdots - F^{(k-1)}(0). \tag{8}$$

477 ～ 479

我们将使上述等式成立的充分条件列在下面的定理中.

定理 5 设函数 $F(t)$ 及它的前 $n-1$ 阶导数在 $t\geqslant 0$ 上连续，$F^{(n)}(t)$ 在任意有限区间 $[0, b]$ 上分段光滑，如果存在正常数 M，α，使得对 $k=0, 1, \cdots, n-1$ 满足

$$|F^{(k)}(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \qquad (t\geqslant 0),$$

则当 $\mathrm{Re}(s)>a$ 时，F，F'，F''，$\cdots$，$F^{(n)}$ 的拉普拉斯变换存在，且对 $k=1, 2, \cdots, n$，(8)式成立.

这个定理的证明留给读者(见习题 2).

为了说明如何应用拉普拉斯变换去解所谓的初值问题，下面看一个例子.

例 1 求满足方程

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}+2\frac{d f(t)}{dt}+f(t)=\sin t \tag{9}$$

的函数 $f(t)$，其中 $t\geqslant 0$，且在 $t=0$ 处有性质

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=0. \tag{10}$$

解 先对(9)式作拉普拉斯变换. 由线性性质(xiv)，我们有

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}+2\mathcal{L}\{f'(t)\}+\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin t\}.$$

由(8)式及初始条件(10)，得

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\mathcal{L}\{f(t)\}-1, \tag{11}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}=s^2\mathcal{L}\{f(t)\}-s\cdot 1-0. \tag{12}$$

此时方程化为

$$(s^2+2s+1)\mathcal{L}\{f(t)\}-s-2=\mathcal{L}\{\sin t\},$$

或由表中第(iv)式，有

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{s+2}{s^2+2s+1}+\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}.$$

将上式右端的第一项写为

480

$$\frac{s+2}{s^2+2s+1}=\frac{s+1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2},$$

根据第(i)式和第(ix)式可知上式为函数

$$e^{-t}+te^{-t}$$

的拉普拉斯变换. 为分析第二项，利用部分分式展开式将其表示为

$$\frac{1}{(s^2+2s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1},$$

它是

$$\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t$$

的拉普拉斯变换[参见第(i)、(ix)及(iii)式].

因此，原方程的解为

$$\begin{aligned}f(t)&=e^{-t}+te^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t\\&=\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}te^{-t}-\frac{1}{2}\cos t.\end{aligned}$$

■

由此例看出，求出解的拉普拉斯变换是比较容易的；为了求出解，必须进行变换的逆运算. 像上例那样，往往利用拉普拉斯变换表就可以做到这一点. 然而，由于拉普拉斯变换源于傅里叶变换，而傅里叶变换有一个反演公式，因此猜想拉普拉斯逆变换也可能存在一个反演公式. 为此，由定理 4，连续可微可积函数 F 的傅里叶反演公式为

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

拉普拉斯变换$\mathcal{L}\{F\}$由(4)式用傅里叶变换来表示，或等价地，

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{L}\{F\}(\mathrm{i}\omega).$$

从而，立即得到

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}\{F\}(\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

这个公式常写为(用 $-\mathrm{i}s$ 代替 ω)：

$$F(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathcal{L}\{F\}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\tag{13}$$

其中积分沿着虚轴从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 进行. 481

我们希望能将(13)式推广到不可积函数，这种函数的拉普拉斯变换只对充分大的 Re (s) 有定义. 这是很容易做到的，只需取充分大的正数 a，使 $F(t)\mathrm{e}^{-at}$可积. 因此，对于函数 $F(t)\mathrm{e}^{-at}$，反演公式(13)可写为

$$F(t)\mathrm{e}^{-at}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathcal{L}\{F(t)\mathrm{e}^{-at}\}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.\tag{14}$$

将拉普拉斯变换表中的(xiii)式代入(14)式，两边同乘以 e^{at}，得

$$F(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\mathcal{L}\{F\}(s+a)\mathrm{e}^{(s+a)t}\mathrm{d}s.\tag{15}$$

我们称

$$F(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\mathcal{L}\{F\}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

为所谓的布罗姆维奇积分[⊖].

由以上的分析可得到下面的一般化结论.

定理 6 设 $F(t)$在任意有限区间$[0, b]$上分段光滑，$t\geqslant0$ 时$|F(t)|$有上界 $M\mathrm{e}^{\alpha t}$. 则 Re $(s)>\alpha$ 时$\mathcal{L}\{F\}(s)$存在，且对所有的 $t>0$ 和任意的 $a>\alpha$ 有

$$\frac{F(t+)+F(t-)}{2}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{p.\,v.}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\mathcal{L}\{F\}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s.$$

例 2 求拉普拉斯变换为$1/(s^4-1)$的分段光滑函数.

解 本题可由部分分式和拉普拉斯变换表求解，这里我们应用反演公式来解答. 首先注意到当 Re $(s)>1$ 时，函数$1/(s^4-1)$解析. 为得到反演变换，不妨取 $a=2$，计算积分

$$I:=\mathrm{p.\,v.}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{s^4-1}\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s\qquad(t\geqslant0),$$

可应用留数理论来完成. 设 I 是周线积分

$$I_\rho:=\int_{\gamma_\rho}\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^4-1}\mathrm{d}z$$

482

当 $\rho\to\infty$ 时的极限，其中 γ_ρ 为 $2-\mathrm{i}\rho$ 到 $2+\mathrm{i}\rho$ 的垂直线段. 对 $t\geqslant0$，我们用半圆 C_ρ: $z=2+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

⊖ 布罗姆维奇(Thomas John l'Anson Bromwich，1875—1929).

$(\pi/2\leqslant\theta\leqslant3\pi/2)$作闭周线；参见图 8-9a. 这个沿 C_ρ 积分的上界为

$$\max_{\pi/2\leqslant\theta\leqslant3\pi/2}\frac{|\mathrm{e}^{(2+\rho\cos\theta)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho t\sin\theta}|}{(\rho-2)^4-1}\pi\rho=\frac{\mathrm{e}^{2t}\pi\rho}{(\rho-2)^4-1},$$

且当 $\rho\to\infty$ 时它趋于 0.

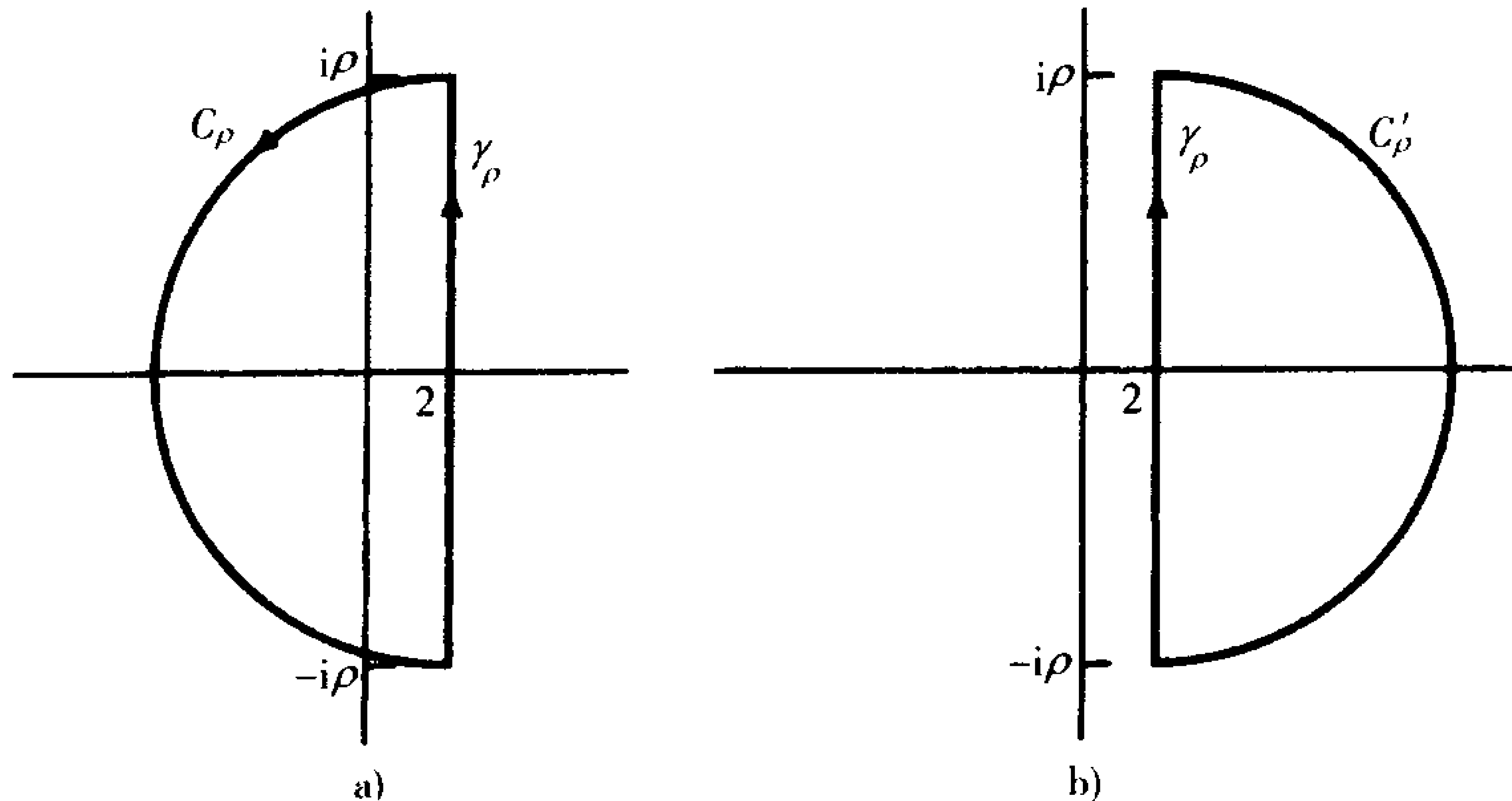


图 8-9 例 2 的周线

现在被积函数有四个单极点 ±1 和 ±i，它们都落在图 8-9a 中半圆周线的内部；由于

$$\frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^4-1}=\frac{\mathrm{e}^{zt}}{(z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}.$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\rho\to\infty}I_\rho=2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}(1)+\mathrm{Res}(-1)+\mathrm{Res}(\mathrm{i})+\mathrm{Res}(-\mathrm{i})]\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{t}}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}+\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(-2)(-1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}\right.\\&\quad\left.+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)(2\mathrm{i})}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{(-\mathrm{i}-1)(-\mathrm{i}+1)(-2\mathrm{i})}\right]\\&=\pi\mathrm{i}\sinh t-\pi\mathrm{i}\sin t.\end{aligned}$$

所以$1/(s^4-1)$的反演变换为

$$F(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}I=\frac{\sinh t-\sin t}{2},\qquad t\geqslant0.$$

当 $t<0$ 时，闭周线如图 8-9b 所示；沿 C'_ρ的积分中 θ 的变化范围是 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，当 $t<0$ 时积分趋于 0. 因为周线内部没有奇点，因此当 $t<0$ 时，$F(t)=0$. ■

483

练习 8.3

1. 求下列函数的拉普拉斯变换.

(a) $F(t)=3\cos2t-8\mathrm{e}^{-2t}$ (b) $F(t)=2-\mathrm{e}^{4t}\sin\pi t$ (c) $F(t)=\begin{cases}1, & t<1\\0, & t\geqslant1\end{cases}$

(d) $F(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & t>2\end{cases}$ (e) $F(t)=\sin^2 t$ (f) $F(t)=1/\sqrt{t}$

[提示：在(f)中，令$\chi=\sqrt{st}$，利用等式$\int_0^\infty e^{-\chi^2}d\chi=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.]

2. 证明定理5.

3. 求下列函数的反演变换.

(a) $\frac{1}{s^2+4}$ (b) $\frac{4}{(s-1)^2}$ (c) $\frac{s+1}{s^2+4s+4}$ (d) $\frac{1}{s^3+3s^2+2s}$ (e) $\frac{s+3}{s^2+4s+7}$

4. 在一个物理系统中，由时延所产生的影响的数学描述是将函数$f(t)$由延迟函数

$$f_\tau(t):=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\tau,\\ f(t-\tau), & \tau\leqslant t<\infty\end{cases}$$

来代替. 证明$\mathcal{L}\{f_\tau(t)\}=e^{-\tau s}\mathcal{L}\{f(t)\}$. [比较习题1中的(c)与(d)]

5. 利用拉普拉斯变换求解下列初值问题.

(a) $\frac{df}{dt}-f=e^{3t}$, $f(0)=3$

(b) $\frac{d^2f}{dt^2}-5\frac{df}{dt}+6f=0$, $f(0)=1$, $f'(0)=-1$

(c) $\frac{d^2f}{dt^2}-\frac{df}{dt}-2f=e^{-t}\sin 2t$, $f(0)=0$, $f'(0)=2$

(d) $\frac{d^2f}{dt^2}-3\frac{df}{dt}+2f=\left\{\begin{matrix}0, & 0\leqslant t<3\\ 1, & 3\leqslant t\leqslant 6\\ 0, & t>6\end{matrix}\right\}$, $f(0)=0$, $f'(0)=0$

[提示：参见习题4.]

6. 验证下列函数的反演公式.

(a) $F(t)=e^{-t}$ (b) $F(t)\equiv 1$

484

7. 控制理论中，微分方程

$$a_n\frac{d^nf}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{df}{dt}+a_0f=u$$

反映了(已知)输入函数$u(t)$与(未知)输出函数$f(t)$之间的关系.

(a) 证明：输入输出函数$u(t)$，$f(t)$的拉普拉斯变换$U(s)$和$F(s)$之间的关系为

$$F(s)=\frac{U(s)}{a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0}+\frac{P(s)}{a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0},$$

其中$P(s)$是关于s的多项式，其系数依赖于a_i、$f(t)$的初值和它的导数. 上式中乘以$U(s)$的那部分称为这个系统的拉普拉斯域转换函数.

(b) 证明：如果转换函数的所有极点都是单极点，且含在左半平面内，则$t\to\infty$时，在$u(t)\equiv 0$的条件下，方程的每个解都趋于0.（换句话说，此系统是稳定的.）

8. 求习题5中各微分方程的转换函数(习题7)并判断它们的稳定性.

9. 考虑图8-10所示的质量弹簧系统. 设每条弹簧的自然(未伸长)长度都是L，当弹簧被压缩或拉长时，它所产生的力与其变形长度成正比(胡克定律)；比例常数记为K. 如果设x,

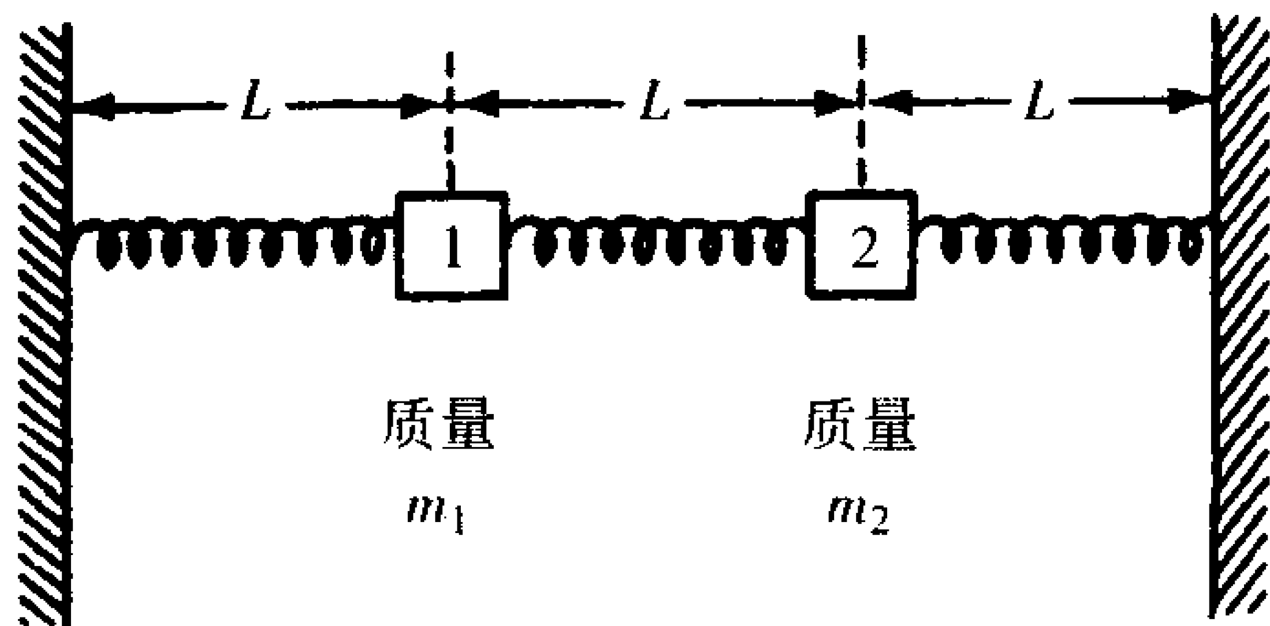


图8-10 平衡状态下的质量—弹簧系统

y 为质量分别为 m_1，m_2 的物体离它们各自平衡点的位移，这时的状态如图 8-11 所示(x，y 均是正数).

(a) 对两个物体分别应用牛顿定律(力 = 质量 × 加速度)，得到运动方程

$$m_1\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx-K(x-y),$$

485

$$m_2\frac{d^2y}{dt^2}=-Ky+K(x-y).$$

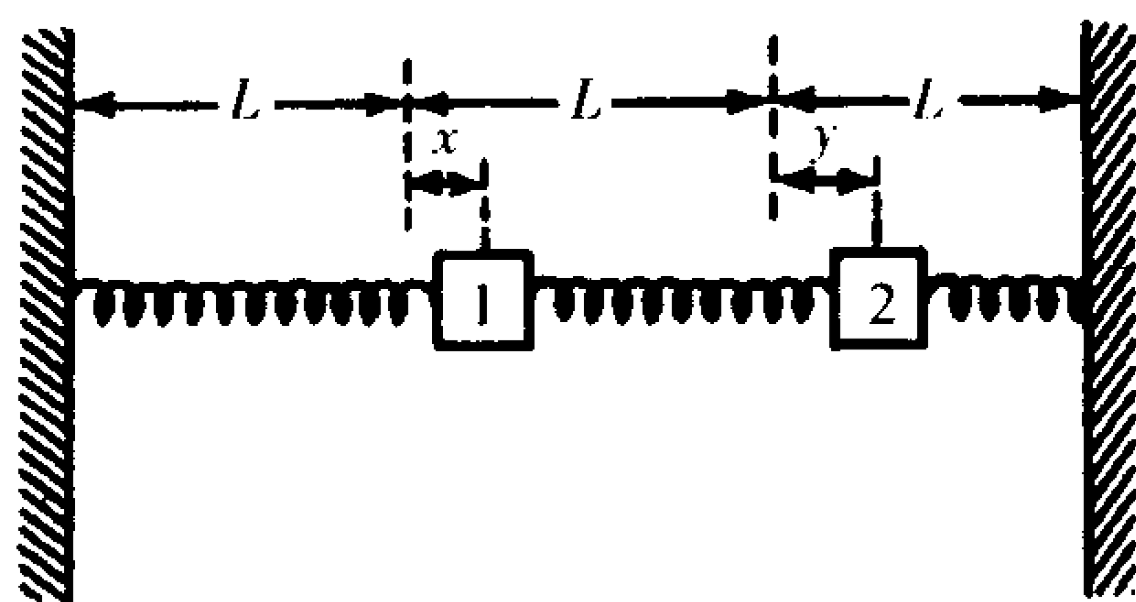


图 8-11 伸缩状态下的质量−弹簧系统

(b) 令 $K=1$，$m_1=m_2=1$，如果物体由静止(速度为 0)开始释放，由拉普拉斯变换求具有下列初始位移的方程的解 $x(t)$，$y(t)$：

i. $x(0)=1$，$y(0)=-1$.

ii. $x(0)=1$，$y(0)=1$.

iii. $x(0)=1$，$y(0)=0$.

(c) 在(b)中的哪一种初始条件是周期系统响应 [即满足 $x(t+T)=x(t)$ 及 $y(t+T)=y(t)$]？你能观察到这些响应吗？(它们称为系统的正规模型.)

8.4 z 变换

正如我们前几节所看到的，将变换应用到各种函数常常可带来一些计算上的方便——例如，以乘法代替微分. 对于周期函数或有限区间上的连续函数，我们可应用傅里叶级数；对于区间是半无限的情况，我们可应用拉普拉斯变换；对于区间是整个实轴的情况，我们可应用傅里叶变换.

实践中常会碰到一些“函数”，它的数据结构是离散的. 例如，我们在实验室中测量一个连续函数 $f(t)$，对它在一个离散点集 $\{t_j\}$ 上进行采样. 使这种离散数据流的数学处理更加容易的变换工具是人们熟知的 z 变换.

设 $a(n)$ 为一个离散数列，假定 n 取 $-\infty$ 到 ∞ 之间的整数，$a(n)$ 可以取复数. 例如，考虑

$$\begin{array}{c} a(0) \\ \downarrow \\ \cdots,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \end{array} \tag{1}$$

486

($f(x)=2^{-|x|}$ 在整数 $x=n$ 处的采样值)

$$\begin{array}{c} a(0) \\ \downarrow \\ \cdots,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots \end{array} \tag{2}$$

($\cos \pi x$ 的采样值)

$$\begin{array}{c} a(0) \\ \downarrow \\ \cdots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ \cdots \end{array} \tag{3}$$

(π 的十进制表示的数字)

$$\begin{array}{ccc} a(1990) & & a(2000) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdots,0,0,0,2,20K, & 30M,20M,2M,1K, & 1,0,0,0,0,\cdots \end{array} \tag{4}$$

（结婚宴会上"Macarena"糖果的需求数量）

序列 $a(n)$ 的 z 变换定义为级数

$$A(z):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(n)z^{-n}$$

$$=\cdots+a(-2)z^{2}+a(-1)z+a(0)+a(1)z^{-1}+a(2)z^{-2}+\cdots \tag{5}$$

在其全部收敛点的和. 注意：z 的指数为负的 n.

对于(1)中的序列 $a(n)=2^{-|n|}$，z 变换可改写为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^{-|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}2^{n}z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}. \tag{6}$$

这两个"和"都是几何级数. 第一个在 $|z|<2$ 时收敛于 $1/(1-z/2)$，而第二个在 $|z|>\frac{1}{2}$ 时收敛于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}=\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}}=\frac{1}{2z-1}.$$

因此，在公共环域 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 内，序列 $2^{-|n|}$ 的 z 变换是解析函数

$$A(z)=\frac{1}{1-z/2}+\frac{1}{2z-1}=\frac{-3z}{2(z-2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}. \tag{7}$$

487

显然，这一 z 变换是 $A(z)$ 在这个圆环内的洛朗级数.

振荡序列(2)的 z 变换具有形式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}z^{-n}$；当 $n\geqslant 0$ 时，这个和在 $|z|>1$ 时收敛，当 $n<0$ 时，这个和在 $|z|<1$ 时收敛. 这两个区域不相交，所以 z 变换在任意点处都发散.

由于"π"序列(3)中指标为负数的项都是0，因此级数的相应部分对所有复数 z 收敛. 又级数的正指标项部分有上界 $9\,|z|^{-n}$，由 M 判别法(5.4 节定理 13)，这个子级数在 $|z|>1$ 时收敛，从而 $|z|>1$ 既是(3)中这两个子级数的公共收敛域，也是 z 变换的定义域.

序列(4)仅有有限个非零项，所以它的 z 变换只是关于 $\frac{1}{z}$ 的多项式，在任意 $z\neq 0$ 的点处都收敛.

由上面的例子可以看出一个序列的 z 变换的一般性质；它是由以这个序列的逆序序列作为系数(因为 $a(n)$ 乘以 z^{-n})的洛朗级数定义的解析函数. 由 5.4 节中的收敛理论可推出，级数的正指标部分在

$$|z|>\limsup\sqrt[n]{|a(n)|}$$

时收敛，级数的负指标部分在

$$|z| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a(-n)|}}$$

时收敛. 因此，如果集合

$$\limsup \sqrt[n]{|a(n)|} < |z| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a(-n)|}} \tag{8}$$

非空，则 z 变换定义在这个圆环内是合理的. 在圆环内这个变换解析，且洛朗级数具有逐项微分、逐项积分和级数相乘等常见性质.

如果 $n<0$ 时 $a(n)=0$[如(3)中]，则称此序列是因果的. 由(8)式知，一个因果序列的 z 变换在圆外收敛(即圆环的外半径无穷大).

一个给定的解析函数可能不只是一个序列的 z 变换，这是因为洛朗级数表示式不是唯一的(它依赖于收敛域). 5.5 节中例 2 的计算表明，函数 $1/[(z-1)(z-2)]$ 是下列每一序列的 z 变换：

$$a(n) = \begin{cases} 1-2^{n-1}, & n \leqslant 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \quad 对\ |z| < 1;$$

$$a(n) = \begin{cases} -2^{n-1}, & n \leqslant 0 \\ -1, & n > 0 \end{cases} \quad 对\ 1 < |z| < 2;$$

488

$$a(n) = \begin{cases} 0, & n < 1 \\ 2^{n-1}-1, & n \geqslant 1 \end{cases} \quad 对\ |z| > 2.$$

第三个序列是因果的；一般地，在圆的外部收敛的任何洛朗级数都是一个因果序列的 z 变换.

当一个序列的 z 变换以闭形式写出时，它给出了一个非常紧凑的表达式. 而且，正如我们将要看到的那样，它使得求解有关序列的递推关系或“微分方程”更加方便. 已知 z 变换求它的序列的方法，正好是 5.5 节中介绍的构造洛朗级数的方法；我们也可以利用麦克劳林级数，如几何级数，部分分式等. 鉴于此，下面的第 5 章定理 14 的另一种叙述可以看作是 z 变换的反演公式.

定理 7 设 $A(z)$ 是序列 $\{a(n): -\infty < n < +\infty\}$ 在圆环 $a<|z|<b$ 内的 z 变换，则

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} A(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

其中 Γ 是圆环内包含原点的任意正向闭周线.

z 变换应用的关键是下述性质.

定理 8 设 $A(z)$ 是序列 $\{a(n): -\infty < n < +\infty\}$ 在圆环 $a<|z|<b$ 内的 z 变换，则平移序列 $\{b(n)=a(n+1): -\infty<n<+\infty\}$ 相应的 z 变换是 $zA(z)$. 一般来讲，对于任意的整数 N(正的或负的)，序列 $\{c(n)=a(n+N): -\infty<n<+\infty\}$ 的 z 变换是 $z^N A(z)$.

证明是显然的：$\{b(n)\}$ 的 z 变换是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n+1)z^{-n} = z\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n+1)z^{-(n+1)} = zA(z),$$

一般结论也很容易得到.

这个性质常用于将延迟序列 $c(n)=a(n-1)$ 的 z 变换表示为 $z^{-1}A(z)$. 下面几个例子是 z 变换在求解微分方程中的应用.

例 1 设 $a(n)$ 表示 n 月末储蓄账户中的存款余额. 从一月份起每月存款 t 美元, 每月利息为上月本金的 $r\%$. 设某个储户在一月份前的本金为 P 美元, 且之后从未取款, 求 $a(n)$ 的表达式.

489

解 这个储户每月的余额如下:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ a(-2) &= 0 \\ a(-1) &= 0 \\ a(0) &= P \\ a(1) &= a(0)+ra(0)+t \\ a(2) &= a(1)+ra(1)+t \\ &\vdots \end{aligned}$$

由此, 我们可推导出相邻月份余额的差分方程:

$$a(n)=a(n-1)+ra(n-1)+D(n), \tag{9}$$

其中

$$D(n):=\begin{cases}0, & n<0\\ P, & n=0\\ t, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

显然, 当 $n<0$ 时, $a(n)=0$, 所以 $a(n)$ 是因果的. 因此我们假设 z 充分大时, $a(n)$ 有一个 z 变换 $A(z)$. 对(9)式两端同时取它们的 z 变换, 应用定理 8 以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}=z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=z^{-1}\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z-1}, \text{对} |z|>1$$

得到

$$A(z)=[1+r]z^{-1}A(z)+P+\frac{t}{z-1},$$

或

$$A(z)=\frac{Pz^2+(t-P)z}{(z-1)(z-1-r)}=z\frac{Pz+(t-P)}{(z-1)(z-1-r)} \quad (|z| \text{ 充分大}).$$

由部分分式分解, 得

$$A(z)=z\left(\frac{p+t/r}{z-1-r}-\frac{t/r}{z-1}\right),$$

对充分大的 $|z|$(事实上, 对 $|z|>1+r$), 它的洛朗级数展开式为

$$\begin{aligned} A(z) &= \left(P+\frac{t}{r}\right)\frac{1}{1-(1+r)/z}-\frac{t}{r}\frac{1}{1-1/z} \\ &= \left(P+\frac{t}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(1+r)^n z^{-n}-\frac{t}{r}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}. \end{aligned}$$

490

因此，它的相应的序列为

$$a(n)=\begin{cases}\left(P+\frac{t}{r}\right)(1+r)^n-\frac{t}{r}, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0.\end{cases}$$

■

考虑常系数线性微分方程

$$y(n)=\beta(1)y(n-1)+\beta(2)y(n-2)+\beta(3)y(n-3)\\ +b(0)x(n)+b(1)x(n-1)+b(2)x(n-2).$$

在统计学中称这种方程为输入 $x(n)$ 与输出 $y(n)$ 间的阶为(3, 2)的自回归滑动平均关系(ARMA). 更一般地，"ARMA(p, q)"方程由

$$y(n)=\sum_{j=1}^{p}\beta(j)y(n-j)+\sum_{k=0}^{q}b(k)x(n-k) \tag{10}$$

刻画，它常常用来描述由"白噪声"$x(n)$引起的随机序列模型 $y(n)$. ((10)式中的第一个和是自回归，第二个和是滑动平均.)

例 2 对于模型 ARMA(1, 1)，利用输入的 z 变换和常数 $\beta(0)$, $b(0)$, $b(1)$ 表示输出的 z 变换.

解 作方程

$$y(n)=\beta(1)y(n-1)+b(0)x(n)+b(1)x(n-1) \tag{11}$$

的 z 变换，得到

$$Y(z)=\beta(1)z^{-1}Y(z)+b(0)X(z)+b(1)z^{-1}X(z)$$

或

$$Y(z)=\frac{b(0)+b(1)z^{-1}}{1-\beta(1)z^{-1}}X(z)=\frac{b(0)z+b(1)}{z-\beta(1)}X(z). \tag{12}$$

■

我们已经讨论过工程师如何常常通过一个系统的频响刻画系统的特性. 对于由类似于差分方程(10)模拟的离散系统，这意味着以复正弦曲线 $e^{i\omega t}$ 的采样作为输入

$$x(n)=\{e^{i\omega t}\}_{t=n}=e^{i\omega n}, \tag{13}$$

对于输出的解有同样的形式

[491]

$$y(n)=H(\omega)x(n)=H(\omega)e^{i\omega n}, \tag{14}$$

并且注意到，频域传递函数 $H(\omega)$ 依赖于区间$[-\pi, \pi]$上的频率 ω[○]. 我们称 $H(\omega)$ 过滤了输入.

例 3 求模型 ARMA(1, 1)中使得频域传递函数 $H(\omega)$ 的模对任意频率 ω 都相等的充分必要条件，系数为 $\beta(1)$, $b(0)$, $b(1)$. 这样的传递函数 $H(\omega)$ 称为全通滤子.

解 严格地说，对 $x(n)$ 取 z 变换是不恰当的，因为级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega n}z^{-n}$ 处处发散. 所以我们可直接将(13)式和(14)式代入(11)式，

○ 因为 $e^{i(\omega+2\pi)n}\equiv e^{i\omega n}$，所以只需考虑$(-\pi, \pi]$上的频率.

$$H(\omega)e^{i\omega n}=\beta(1)H(\omega)e^{i\omega(n-1)}+b(0)e^{i\omega n}+b(1)e^{i\omega(n-1)},$$

解之，得

$$H(\omega)=\frac{b(0)+b(1)e^{-i\omega}}{1-\beta(1)e^{-i\omega}}=\frac{b(0)e^{i\omega}+b(1)}{e^{i\omega}-\beta(1)}. \tag{15}$$

用 $z=e^{i\omega}$ 代入，即可得到与(12)式中的系数相同的式子. 换句话说，$H(\omega)$ 就是单位圆周上关于 z 的默比乌斯变换

$$\tilde{H}(z)=\frac{b(0)z+b(1)}{z-\beta(1)}\equiv\frac{z+b(1)/b(0)}{z/b(0)-\beta(1)/b(0)}. \tag{16}$$

于是，全通的条件 $|H(\omega)|=1$ 即为默比乌斯变换将单位圆周映为单位圆周的条件. 由默比乌斯变换的性质，$\tilde{H}(z)$ 也将单位圆的内部映为自身或它的外部.

在 7.4 节例 3 及练习 7.4 习题 16 中，我们证明了所有将单位圆周映为自身的默比乌斯变换具有下列形式：

$$\tilde{H}(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}.$$

与(16)式相比较，得到

$$\beta(1)=b(0)=\frac{1}{\bar{\alpha}},\quad b(1)=-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}},\ |\alpha|\neq 1.$$ ■

求解带初始条件的差分方程利用单边 z 变换 $A^+(z)$ 最为简便，它略去了级数(5)中的负指标项：

$$A^+(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)z^{-n}. \tag{17}$$ 492

显然，如果 $a(n)$ 是因果的，则 $A^+(z)=A(z)$，并且 $A^+(z)$ 的收敛域是一个圆的外部($|z|>\limsup\sqrt[n]{|a(n)|}$). 我们利用导数的拉普拉斯变换公式[8.3 节(8)式] 修改定理 8，可得到与之类似的单边 z 变换 $A^+(z)$ 的平移性质.

定理 9 设 $A^+(z)$ 是序列 $\{a(n):-\infty<n<+\infty\}$ 在区域 $a<|z|$ 内的单边 z 变换，则平移序列 $\{b(n)=a(n+1):-\infty<n<+\infty\}$ 相应的单边 z 变换是 $z[A^+(z)-a(0)]$. 一般来讲，对于任意正数 N，序列 $\{c(n)=a(n+N):-\infty<n<+\infty\}$ 的单边 z 变换是

$$z^N[A^+(z)-a(0)-a(1)z^{-1}-a(2)z^{-2}-\cdots-a(N-1)z^{-(N-1)}].$$

这个定理的证明也很简单. $b(n)$ 的单边 z 变换是

$$\sum_{n=0}^{\infty}b(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a(n+1)z^{-n}=z\sum_{n=0}^{\infty}a(n+1)z^{-(n+1)}$$
$$=z\sum_{m=0}^{\infty}a(m)z^{-m}-za(0)=z[A^+(z)-a(0)].$$

一般情况的证明留给读者完成.

例 4 对于 $n\geqslant 0$ 且 $a(0)=1$，$a(1)=-1$，设序列 $a(n)$ 满足差分方程

$$a(n+2)-3a(n+1)+2a(n)=0, \tag{18}$$

求 $a(n)(n\geqslant 0)$ 的表达式.

解 由于对所有的 $n\geqslant 0$，(18)式成立，我们可利用单边 z 变换求 $a(n)$. 由定理9得

$$z^2[A^+(z)-1-(-1)z^{-1}]-3z[A^+(z)-1]+2A^+(z)=0$$

或

$$A^+(z)=\frac{z^2-4z}{z^2-3z+2}=z\frac{z-4}{(z-1)(z-2)}=z\left(\frac{3}{z-1}+\frac{-2}{z-2}\right)$$

493

$$=3\frac{1}{1-1/z}-2\frac{1}{1-2/z}=3\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^{-n}.$$

于是

$$a(n)=3-2^{n+1},\qquad n\geqslant 0.$$

■

关于 z 变换的其他性质及其工程应用可参考本章后面的有关文献.

练习 8.4

1. 证明 z 变换是线性变换；也就是说，若分别以 $A(z)$ 和 $B(z)$ 表示序列 $\{a(n)\}$ 和 $\{b(n)\}$ 的 z 变换，则在它们的公共收敛域内，$\{\alpha a(n)+\beta b(n)\}$ 的 z 变换为 $\alpha A(z)+\beta B(z)$.
2. 设 $A(z)$ 为序列 $\{a(n)\}$ 的 z 变换，证明"线性加权"序列 $\{na(n)\}$ 的 z 变换为 $-zA'(z)$. 进一步证明其收敛圆环不变. [提示：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.]
3. 设 $A(z)$ 为序列 $\{a(n)\}$ 的 z 变换，证明"指数加权"序列 $\{\alpha^n a(n)\}$ 的 z 变换为 $A(z/\alpha)$. 新的收敛圆环与原来的收敛圆环之间有何关系?
4. 验证下列各因果 z 变换($n\geqslant 0$)：

   (a) $a(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n>0\end{cases}$　　$A(z)=1$

   (b) $a(n)=1$　　$A(z)=\dfrac{z}{z-1}$

   (c) $a(n)=n$　　$A(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$

   (d) $a(n)=\alpha^n$　　$A(z)=\dfrac{z}{z-\alpha}$

   (e) $a(n)=\sin n\omega$　　$A(z)=\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$

   (f) $a(n)=\cos n\omega$　　$A(z)=\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$
5. 求下列函数在指定圆环内的反演 z 变换：

   (a) $A(z)=\dfrac{1}{1+1/(3z)}$,　　$|z|<\dfrac{1}{3}$

   (b) $A(z)=\dfrac{1}{1+1/(3z)}$,　　$|z|>\dfrac{1}{3}$

   (c) $A(z)=\dfrac{z^4}{z+2}$,　　$|z|<2$

494

   (d) $A(z)=\dfrac{z^4}{z+2}$,　　$|z|>2$

(e) $A(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}$,　　$\dfrac{1}{2}<|z|<3$

(f) $A(z)=\dfrac{1-1/(2z)}{1+3/(4z)+1/(8z^2)}$,　　$|z|>\dfrac{1}{2}$

(g) $A(z)=\dfrac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-1)^2}$　　$|z|>1$

(h) $A(z)=\dfrac{1-\alpha/z}{\alpha-1/z}$,　　$|z|>\dfrac{1}{|\alpha|}$

6. 设 $A(z)$ 为因果序列 $\{a(n)\}$ 的 z 变换，证明 $a(0)=\lim\limits_{z\to\infty}A(z)$.

7. 利用单边 z 变换求解下列差分方程.

(a) $a(n+1)=(0.5)a(n)$,　　$a(0)=2$

(b) $a(n+1)+2a(n)=1$,　　$a(0)=1$

(c) $a(n+2)-5a(n+1)+6a(n)=1$,　　$a(0)=2$, $a(1)=3$

8. 求后向移动序列 $a(n-N)\,(N>0)$ 的单边 z 变换.

8.5 柯西积分与希尔伯特变换

形如

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

的积分称作*柯西积分*. 对于柯西积分的研究不但有趣而且很有价值. 在这一节中，我们将在理论及应用方面对柯西积分作一些探讨.

设 Γ 是一条简单光滑闭曲线，如图 8-12 所示，f 在曲线 Γ 内及 Γ 上解析，则由柯西积分公式和柯西定理，

$$\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}2\pi i f(z), & 若 z 在 \Gamma 的内部,\\ 0, & 若 z 在 \Gamma 的外部.\end{cases} \tag{1}$$

495

这时就产生一个问题：当点 z 穿过 Γ 时，积分值会发生什么变化？为研究这一问题，可考虑如图 8-13 所示的凹周线 Γ'_ε. 设点 z_0 为原周线 Γ 上一点，由于它落在 Γ'_ε 的内部，由柯西公式，有

$$\oint_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta=2\pi i f(z_0). \tag{2}$$

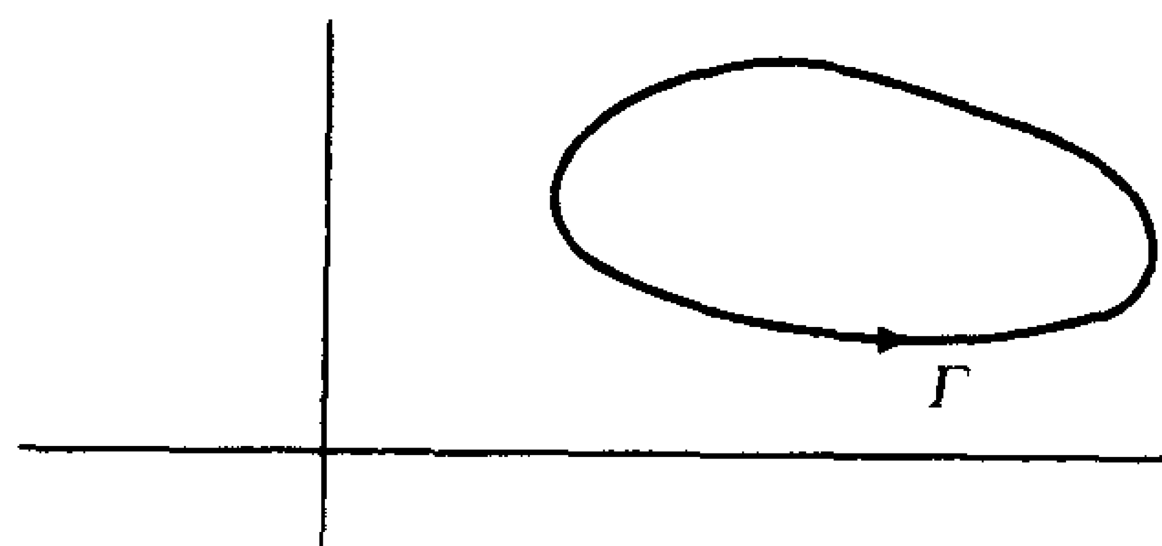


图 8-12　用于柯西积分的周线

这里我们假设半圆周凹线 S'_ε 的半径 ε 充分小，使 Γ'_ε 仍保持在 f 的解析区域内. 现在令 ε 趋于 0，则沿半圆周 S'_ε 的积分对沿整个 Γ'_ε 的积分的贡献趋于 $\pi i f(z_0)$（6.5 节引理 4）. 这正好是(2)式积分值的一半；因此，剩下的那部分 $\pi i f(z_0)$ 肯定是来自余下的周线的积分值，这相当于在 z_0 附近把 Γ"对称"地剪断，用一种推广的主值概念(见 6.5 节)的方法，求出沿 Γ 的积分主值. 总之，在图 8-13 的基础上，我们有

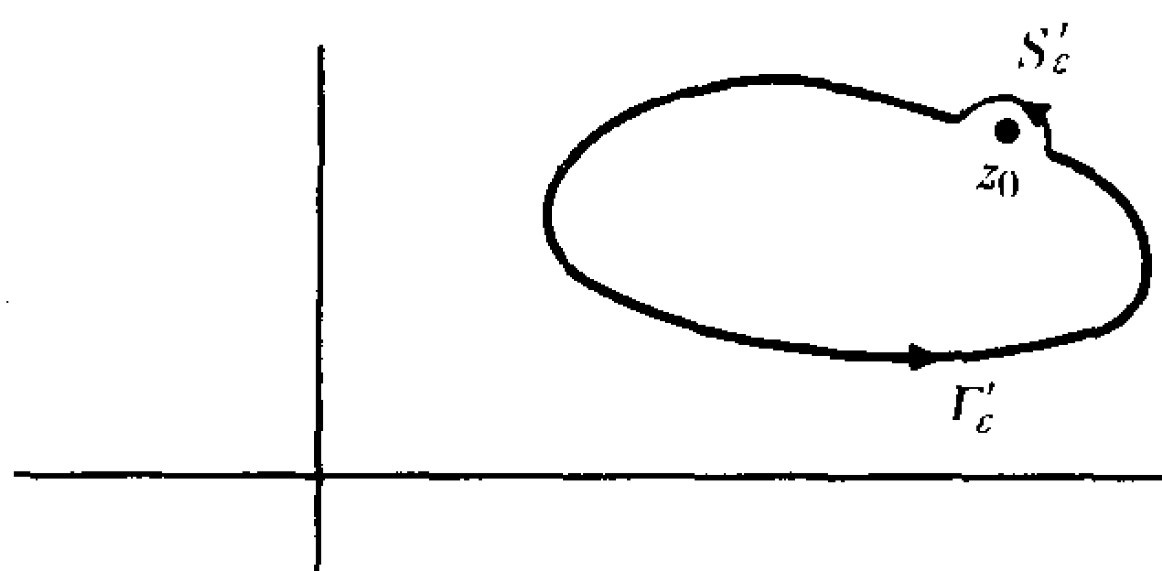


图 8-13　凹周线

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\oint_{\Gamma_\varepsilon'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta & = \mathrm{p.\,v.}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta + & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta, \\
\| & & \| \\
2\pi\mathrm{i}\, f(z_0) & & \pi\mathrm{i}\, f(z_0) \\
(\text{柯西积分公式}) & & (\text{引理 4})
\end{array}
\tag{3}
$$

从而得到

$$
\mathrm{p.\,v.}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta = \pi\mathrm{i}\, f(z_0). \tag{4}
$$

当然，图 8-13 回避了拓扑上的困难；具体例子见本节习题 3. 关于(4)式的严格叙述和推导，请读者参见有关文献.

例 1 验证(4)式，这里 Γ 是以 $z=1$ 为圆心的正向单位圆周，$f(z)\equiv 1$，$z_0=0$.

解 显然，当 $|z-1|<1$ 时，$\int_\Gamma 1/(\zeta - z)\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$；当 $|z-1|>1$ 时，$\int_\Gamma 1/(\zeta - z)\mathrm{d}\zeta = 0$. 对于 $z=z_0=0$，由图 8-14 取 $|z_1| = |z_2|$，得到

496

$$
\mathrm{p.\,v.}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - 0}\mathrm{d}\zeta = \lim_{z_1,z_2\to 0}[\mathrm{Log}z_1 - \mathrm{Log}z_2].
$$

因此

$$
\mathrm{p.\,v.}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - 0}\mathrm{d}\zeta = \lim_{z_1,z_2\to 0}[\mathrm{i}\ \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{i}\ \mathrm{Arg}z_2] = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} = \pi\mathrm{i}.
$$

■

如果我们在 Γ 的内部作一条如图 8-15 所示的凹线，结果又会怎样呢？这时沿半圆周 S_ε''(顺时针方向)的积分为负的 $\pi\mathrm{i}\, f(z_0)$(6.5 节引理 4)，且积分(3)的分解式有下面的形式.

$$
\begin{array}{cccc}
\displaystyle\oint_{\Gamma_\varepsilon''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta & = \mathrm{p.\,v.}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta & + & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon''} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta. \\
\| & \| & & \| \\
0 & \pi\mathrm{i}\, f(z_0) & & -\pi\mathrm{i}\, f(z_0) \\
(\text{柯西定理}) & [(4)\text{式}] & & (\text{引理 4})
\end{array}
\tag{5}
$$

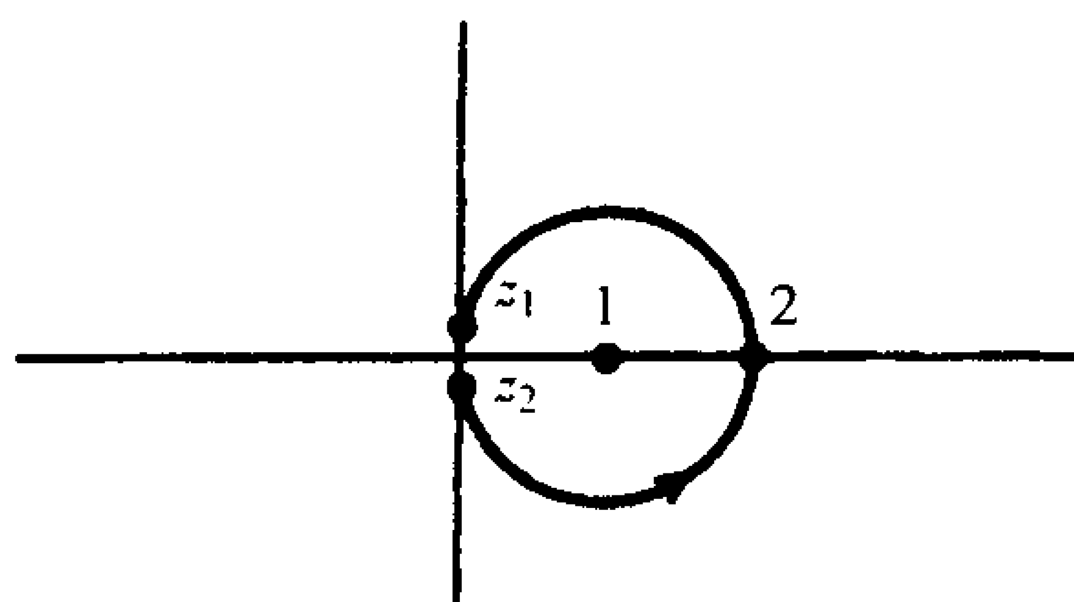


图 8-14 例 1 的周线

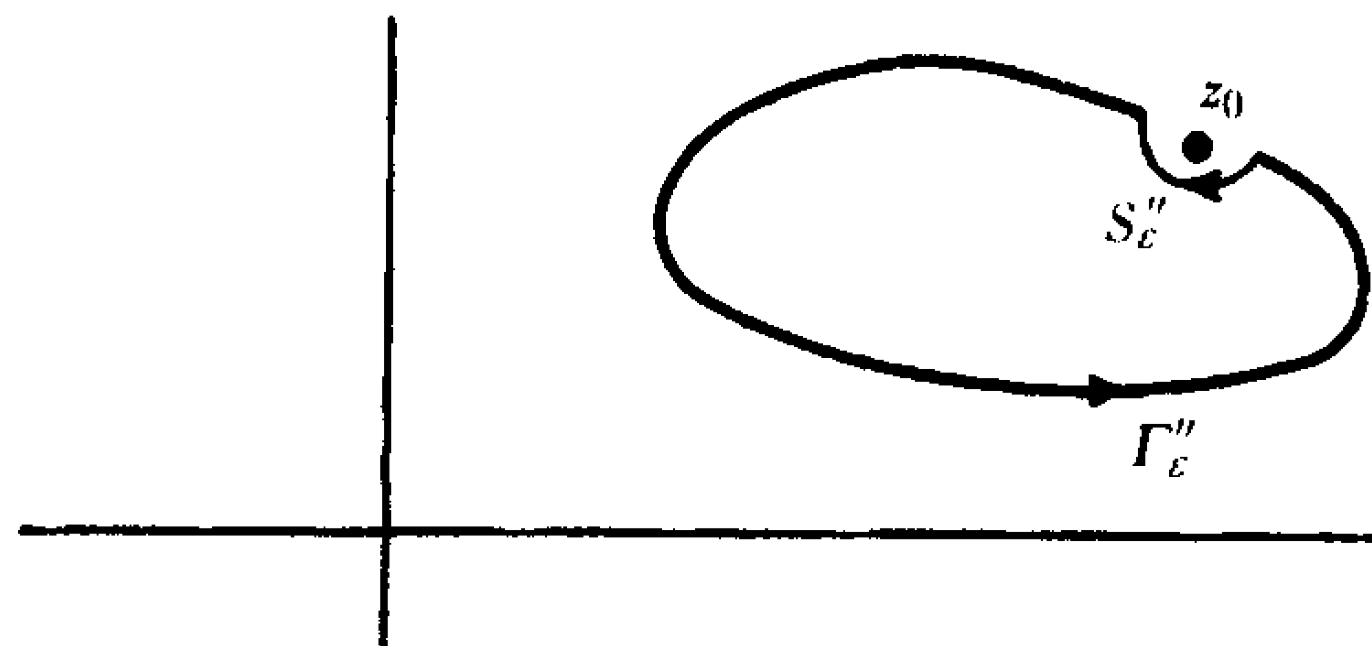


图 8-15 内凹周线

由以上讨论，我们可以形象地解释当点 z 穿过周线 Γ 时柯西积分(1)的变化. 在图 8-16 中，点列 $\{z_n^+ : n=1, 2, 3, \cdots\}$ 从 Γ 的内部趋于 z_0，这时柯西积分等于 $2\pi\mathrm{i}\, f(z_n^+)$. 而且，如果周线形变为图 8-13 所示的凹周线，这些积分值不会改变(应用形变不变性定理，4.4.1 节).

它们趋于极限值 $2\pi i f(z_0)$，由(3)式和(4)式，这个极限值的一半来自于积分主值，而另一半来自于外凹线 S'_ε.

现在让点列 $\{z_n^-\}$ 由 Γ 的外部趋于 z_0(图 8-17)，利用内凹线 S''_ε 可知，沿 Γ 的积分主值与沿半圆周 S''_ε 的积分对柯西积分的极限(0)的贡献分别是 $\pi i f(z_0)$ 和 $-\pi i f(z_0)$. 因此当 z 穿过周线 Γ 时，我们可将柯西积分的跳跃归于内外凹周线的替换. S'_ε"打开大门"使 z 通过，然后，S''_ε 在它的后面"关闭大门". 内外柯西积分极限不同是因为沿两个半圆周的积分正好符号相反：

497

$$\lim_{z_n^+\to z_0}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n^+}d\zeta - \lim_{z_n^-\to z_0}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n^-}d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S'_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S''_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$$
$$= \pi i f(z_0) - [-\pi i f(z_0)]$$
$$= 2\pi i f(z_0). \tag{6}$$

类似地计算内外柯西积分极限值的平均数得到积分主值

$$\lim_{z_n^+\to z_0}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n^+}d\zeta + \lim_{z_n^-\to z_0}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_n^-}d\zeta$$
$$= 2\left(\text{p. v.}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S'_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S''_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta$$
$$= 2\left(\text{p. v.}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}d\zeta\right). \tag{7}$$

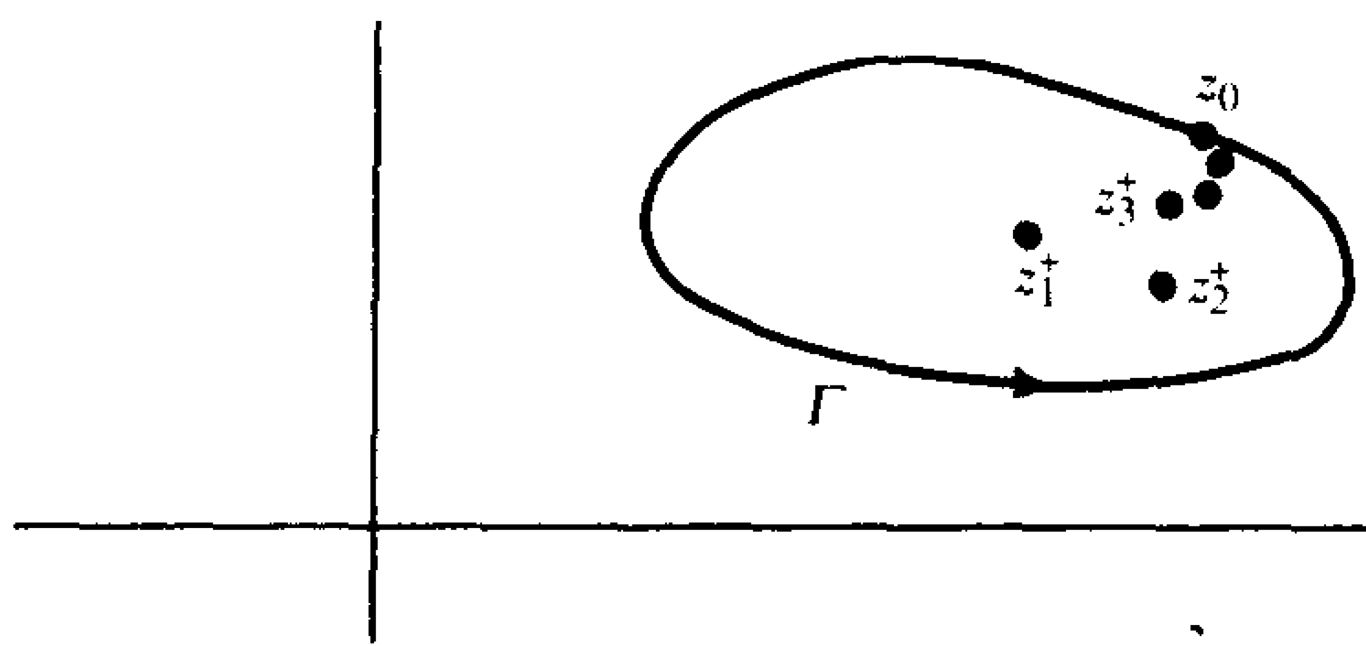


图 8-16 点列由 Γ 的内部趋于 z_0

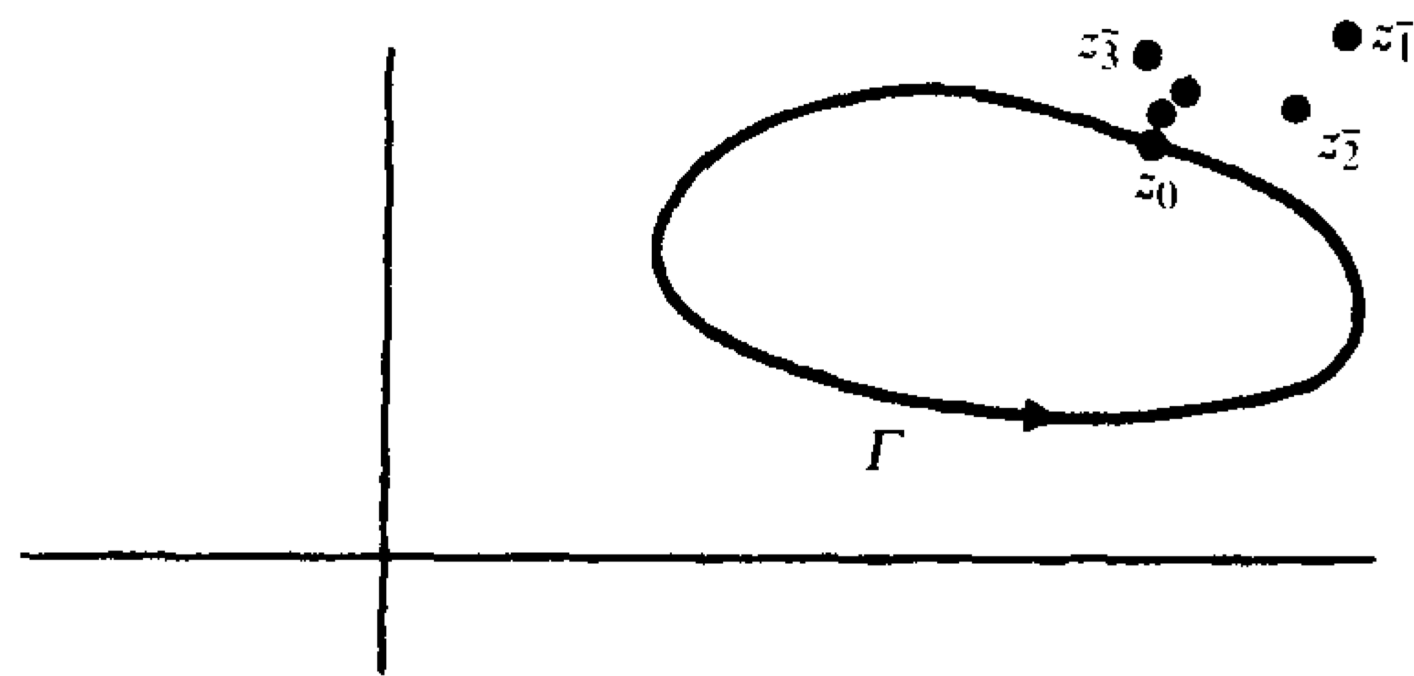


图 8-17 点列由 Γ 的外部趋于 z_0

如果周线 Γ 不是闭的，我们没有一般性的定理求积分值 $\int_\Gamma f(\zeta)/(\zeta - z)d\zeta$. 但是，由图 8-13 到图 8-17 的讨论可知，若序列 $\{z_n^+\}$ 从 Γ 的左方(由 Γ 的方向决定)趋于 z_0，$\{z_n^-\}$ 从 Γ 的右方趋于 z_0，(6)和(7)两式仍能成立. 索霍茨基-普勒梅利(Sokhotskyi-Plemelj)公式(证明可参见本章后面的参考文献)将这些结论推广到了更一般的(不一定是解析的)函数和周线上；他们证明了：当 z 由 Γ 的左右两方趋于(Γ 上的点)z_0 时，柯西积分 $\int_\Gamma f(\zeta)/(\zeta - z)d\zeta$ 的极限值之差总是 $2\pi i f(z_0)$，而两极限的平均值等于积分主值.

当 Γ"围住"半平面时，如图 8-18 所示，会得到一个特别有用的等式. 如果 $f(z)$ 在上半平面内解析，在无穷远点趋于 0 的速度足够快，以致使沿半圆周 S_R 的积分当 $R\to\infty$ 时趋于 0，则(4)式有下面的形式：

498

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi=\pi\mathrm{i}\,f(x). \tag{8}$$

这时，如果$|f(z)|\leqslant K/|z|$(由通常的估计)，或对正数 m，$|f(z)|\leqslant K\,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}|$(由若尔当引理)时，沿 S_R 的积分为 0.

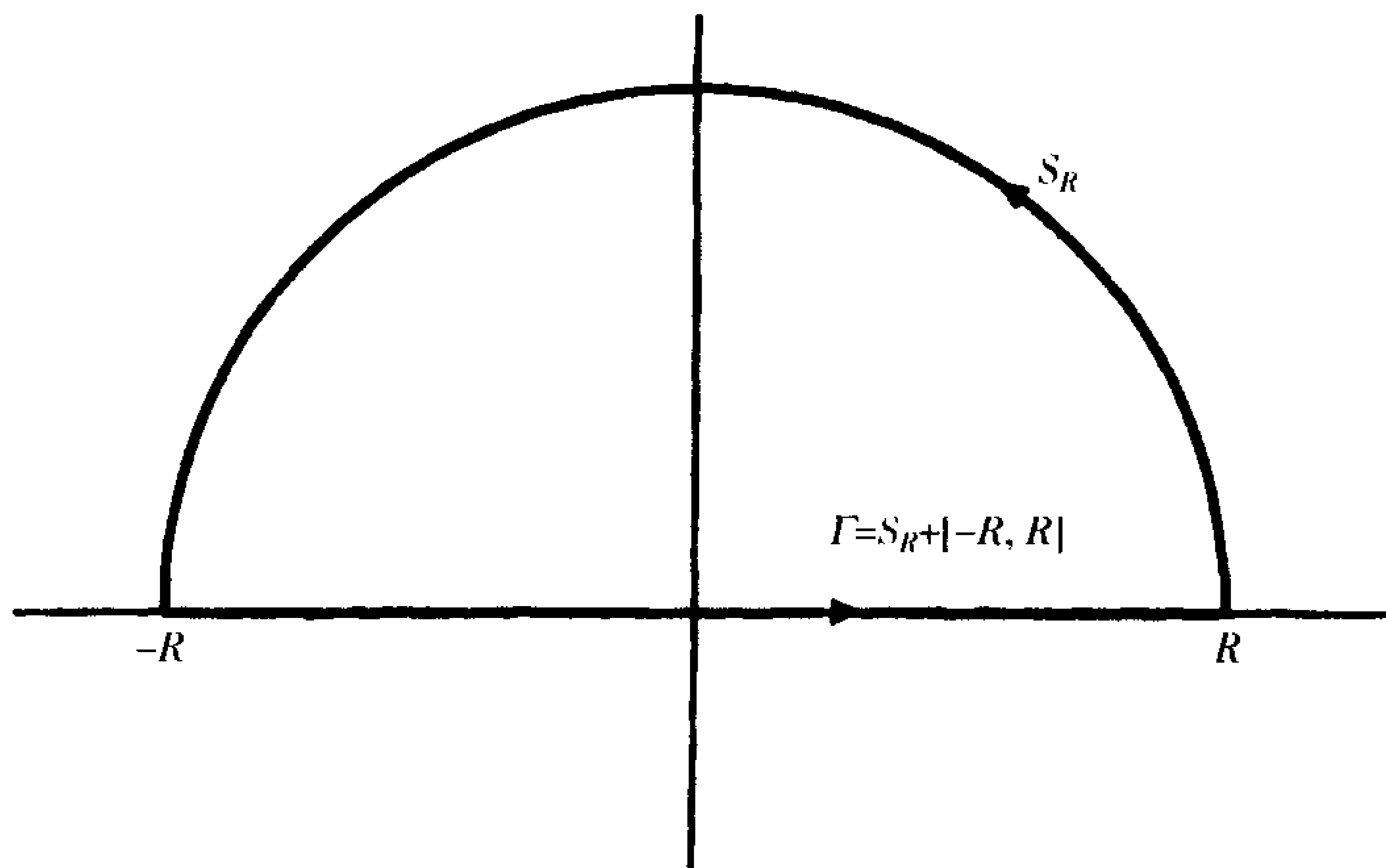


图 8-18 当 $R\to\infty$ 时，上半平面上的周线

由表达式 $f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 并将(8)式分成实部和虚部，我们有

$$v(x,0)=-\frac{1}{\pi}\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi,\quad u(x,0)=\frac{1}{\pi}\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi,0)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi. \tag{9}$$

上面的第一个公式引出了如下定义.

定义 2 任意实值函数 $\phi(x)(-\infty<x<\infty)$ 的希尔伯特变换(Hilbert transform)定义为

$$\psi(x):=-\frac{1}{\pi}\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi \tag{10}$$

(如果积分存在).

以上推导说明，只要一对函数 $\phi(x)$，$\psi(x)$的组合 $\phi(x)+\mathrm{i}\psi(x)$可以拓展为上半平面内的解析函数，且此解析函数在无穷远处以合适的速度趋于 0，则 ψ 是 ϕ 的希尔伯特变换[○]. 因为 $z=x$ 时，$\cos x+\mathrm{i}\sin x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，又由若尔当引理，在上半圆周 S_R 上有关 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$的积分极限为 0，所以 $\cos x$ 的希尔伯特变换是 $\sin x$. 注意到 $\sin x$ 的希尔伯特变换是负的 $\cos x$(因为对于 $z=x$，$\sin x-\mathrm{i}\cos x=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$)，这正好与(9)式中出现的符号相符合，(9)中的第二个式子被看作是希尔伯特反演变换公式：

$$\phi(x):=\frac{1}{\pi}\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\xi)}{\xi-x}\mathrm{d}\xi. \tag{11}$$

显然，对于在上半平面内满足一定性质的解析函数，在 x 轴上将它们的实部与虚部分别写出，就可得到希尔伯特变换的一个集合. 用这种方法，我们得到了相应的变换表(参见习题 1).

499

○ 希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)提出了“23 个 Paris 问题”，现在其中的很多问题仍是挑战性的，引导着数学的研究方向.

希尔伯特变换表

函数 $\phi(x)$	希尔伯特变换 $\psi(x)$	函数 $\phi(x)$	希尔伯特变换 $\psi(x)$
$\cos\omega x \quad (\omega>0)$	$\sin\omega x$	$\sin\omega x \quad (\omega<0)$	$\cos\omega x$
$\cos\omega x \quad (\omega<0)$	$-\sin\omega x$	$\dfrac{a}{a^2+x^2} \quad (a>0)$	$\dfrac{x}{a^2+x^2}$
$\sin\omega x \quad (\omega>0)$	$-\cos\omega x$	$\dfrac{\sin ax}{x} \quad (a>0)$	$\dfrac{1-\cos ax}{x}$

例 2 对于表中的第一行验证公式(10).

解 将柯西积分分为两部分:

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\xi}{\xi-x}\mathrm{d}\xi=\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}}{2(\xi-x)}\mathrm{d}\xi+\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}}{2(\xi-x)}\mathrm{d}\xi.$$

为了计算第一个积分，我们选取上半 ξ 平面内的一个半圆周和一条凹线组成一条闭周线，如图 8-19a所示. 由若尔当引理(6.4 节的引理 3)和柯西定理，得到

500

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\xi}}{2(\xi-x)}\mathrm{d}\xi=\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}(\xi=x)=\frac{\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{2}.$$

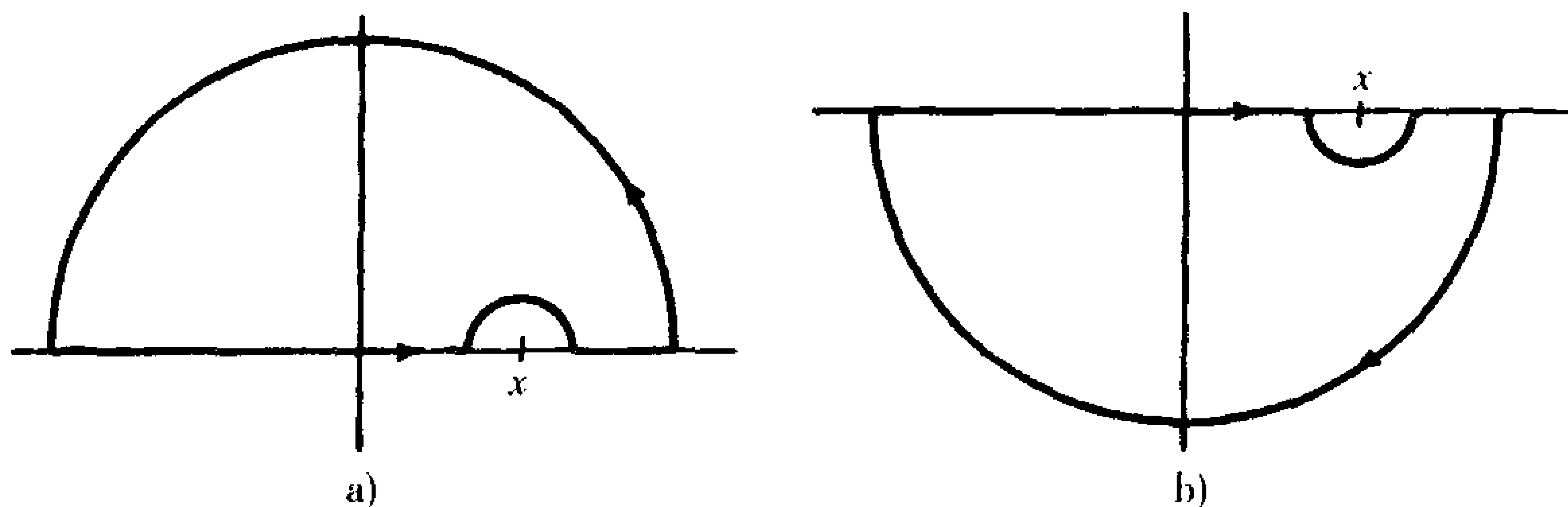


图 8-19 例 2 的周线

对于第二个积分，如图 8-19b 所示作闭周线，则有

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}}{2(\xi-x)}\mathrm{d}\xi=-\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}(\xi=x)=-\frac{\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}.$$

两个等式相加等于

$$\text{p. v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega\xi}{\xi-x}\mathrm{d}\xi=\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}=-\pi\sin\omega x.$$

上式两边除以 $-\pi$，即知 $\cos\omega x(\omega>0)$的希尔伯特变换是 $\sin\omega t$. ■

读者或许已经注意到，计算希尔伯特变换的方法是：从函数 $\phi(x)$开始，利用半平面内的泊松公式(练习 4.7 中的习题 14)将它拓展为上半平面内一个适当的调和函数；然后，由 4.7 节的定理 25 可确定它的共轭调和函数 $v(x, y)$，它在 x 轴上的限制就是 $\phi(x)$的希尔伯特变换 $\psi(x)$. 这样，我们就得到了公式(10). 这种方法又可将变换推广到更宽的函数类上. 关于这些推广可在有关参考书中找到.

希尔伯特变换的许多应用通常与傅里叶变换结合起来考虑. 傅里叶变换及反演公式记为

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x, \tag{12}$$

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \tag{13}$$

既然希尔伯特变换是一种线性运算，它对余弦函数和正弦函数的作用我们已经知道，因此如果将(13)式看作是正弦曲线的一个叠加(8.2 节提出的)，则可把(13)式可改写为

501

$$\begin{aligned}\phi(x) = &\int_{-\infty}^{0} \phi(\omega)[\cos\omega x + \mathrm{i}\,\sin\omega x]\mathrm{d}\omega \\ &+ \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)[\cos\omega x + \mathrm{i}\,\sin\omega x]\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{14}$$

取它的希尔伯特变换得

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \int_{-\infty}^{0} \Phi(\omega)[-\sin\omega x + \mathrm{i}\,\cos\omega x]\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)[\sin\omega x - \mathrm{i}\,\cos\omega x]\mathrm{d}\omega \\ &= i\int_{-\infty}^{0} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega + (-\mathrm{i})\int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{0} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega x+\pi/2)}\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega x-\pi/2)}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{15}$$

将(15)式与(14)式进行比较，我们可以发现，希尔伯特变换实际上是将 $\Phi(\omega)$的正频率的部分乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}$，将负频率的部分乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$；即正频率“相位延迟”了 $\pi/2$ 弧度，负频率相位提前了相同的弧度. 所以希尔伯特变换实际上是一个 90 度的相移运算.

这就给我们提供了一个实现希尔伯特变换的有效的数值算法. 首先，利用快速傅里叶算法逼近 $\Phi(\omega)$. 然后，交换 $\Phi(\omega)$的实部和虚部，并且对实部中 $\omega<0$ 的部分和虚部中 $\omega>0$ 的部分改变符号；最后再次利用 FFT，求傅里叶变换的递变换. 这种处理方式在信号处理中有着广泛的应用.

下面用一个例子说明希尔伯特变换在无线电通信中的应用.

例 3 人的耳朵可以听到的声波的最高频率有一个限度，设为 Ω_0；超过这个频率的声音耳朵就听不到了(频率 Ω_0 大约为 25 000 弧度/秒，或 4KZ). 因此在实际中，当我们对一个声音信号 $\phi(t)$进行傅里叶变换的时候，只需考虑频率 ω 在$[-\Omega_0, \Omega_0]$内的部分：

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \approx \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} \Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

实际上，这时 $\Phi(\omega)$的实部和虚部可形象地表示出来，如图 8-20 所示. (对于实函数 $\phi(t)$，Φ 具有对称性，见练习 8.2 中的习题 4.)

502

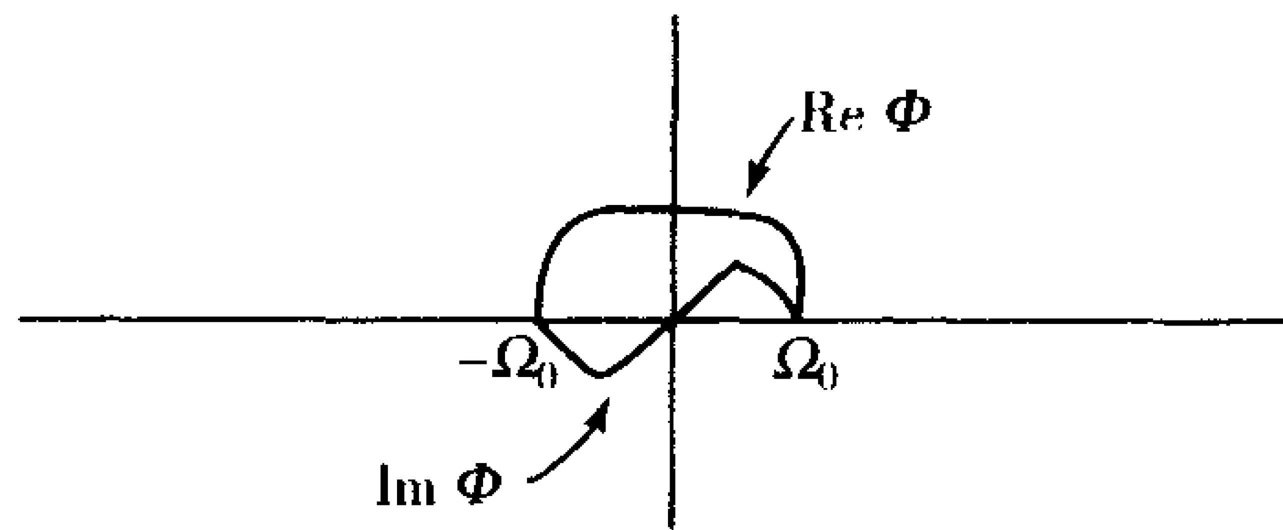


图 8-20 原始信号(傅里叶变换)

在无线电广播中，要发射这样的低频信号是很困难的，所以人们往往要利用调幅的方法，将信号乘以一个频率为 Ω_1(通常都是兆量级)的高频载波信号 $\cos\Omega_1 t = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_1 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_1 t}]/2$；根据练习 8.2 的习题 5，把这个变换平移为左右两个部分，如图 8-21 所示，这样得到的高频信号 $\phi(t)\cos\Omega_1 t$ 就很容易发射和接收了.

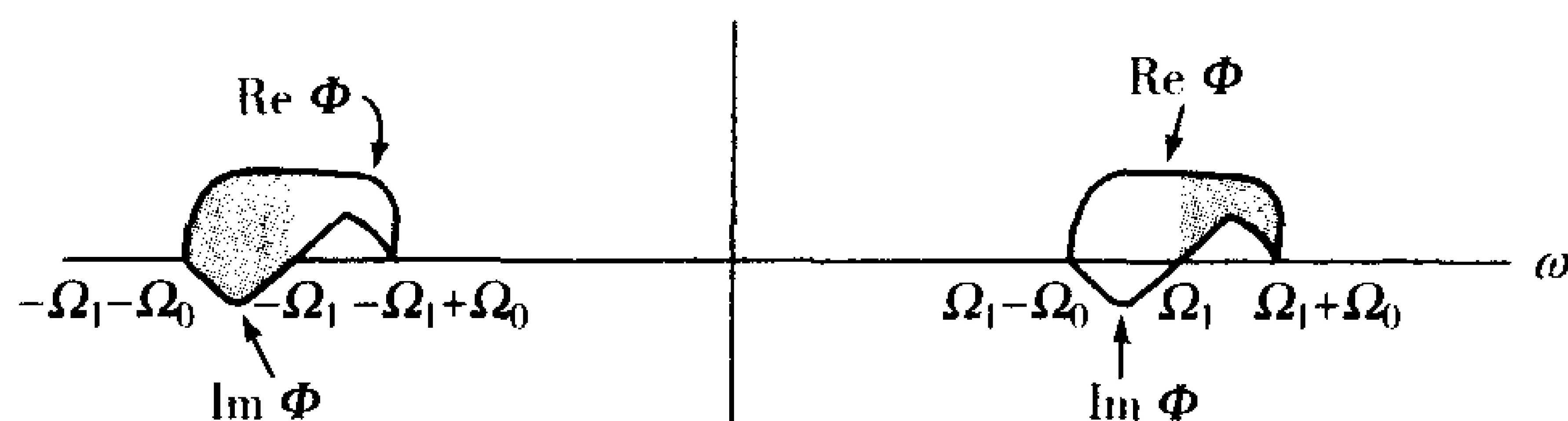


图 8-21 低单边带

由于 Φ 的对称性，我们可以把图 8-21 中的 $\Phi(\omega\pm\Omega_1)$ 的阴影部分去掉(过滤掉)，以节省能量而不丢失信息. 然后通过信号接收器将接收到的"低单边带"信号(LSS)乘以 $\cos\Omega_1 t$ 来检测出原始信号，得到的变换如图 8-22 所示. 将滤出的高频信号的幅度扩大 4 倍，即得到了原始信号(扩大幅度是为了补充滤波损失). 这个过程称为同步检测.

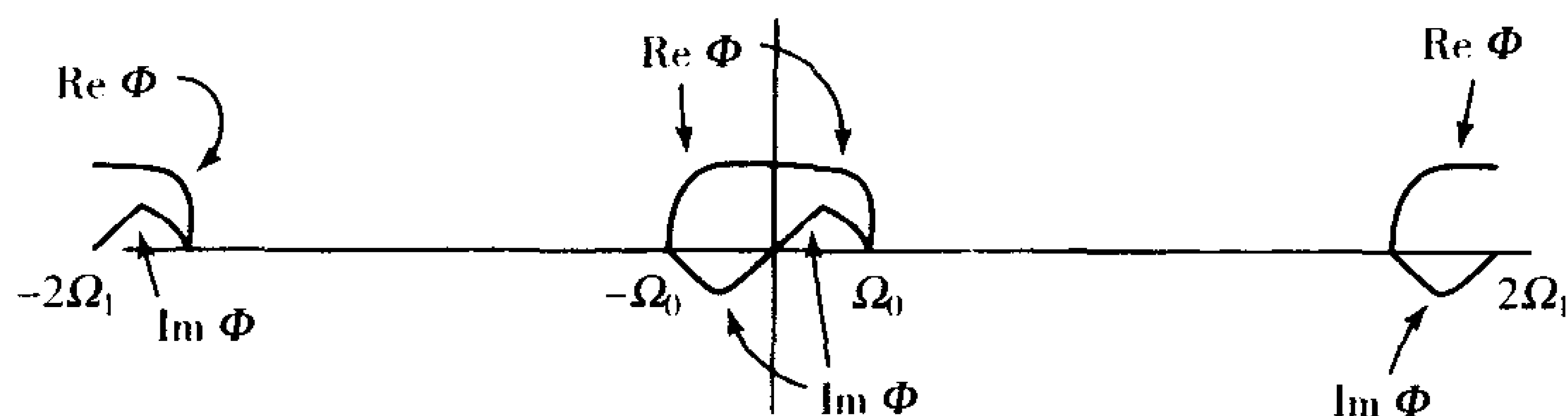


图 8-22 原始信号的恢复

在检测中需要将 LSS 乘以 $\cos\Omega_1 t$，而不是乘以不同步的

$$\cos(\Omega_1 t-\beta)=\cos\Omega_1 t\cos\beta+\sin\Omega_1 t\sin\beta,$$

这一点非常重要. 实际上，不同步检测可能得到原始信号和一个变形信号的叠加，这是因为乘以了 $\sin\Omega_1 t$.

证明变形信号是原始信号的希尔伯特变换(的 1/4 倍).

证 显然，$\sin\Omega_1 t=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_1 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_1 t}]/2\mathrm{i}$，所以原始信号与这个正弦信号的乘积不仅移动了变换，而且混合了原始信号的实部和虚部. 略微思考便知，最后导致的变换如图 8-23 所示. 将去掉高频部分信号，与图 8-20 比较可以看到，$\Phi(\omega)$ 的正频率部分乘以了 $-\mathrm{i}$，负频率部分乘以了 i. 采用正弦而不是余弦的"同步检测"，就得到了信号的希尔伯特变换 $\psi(t)$.

503

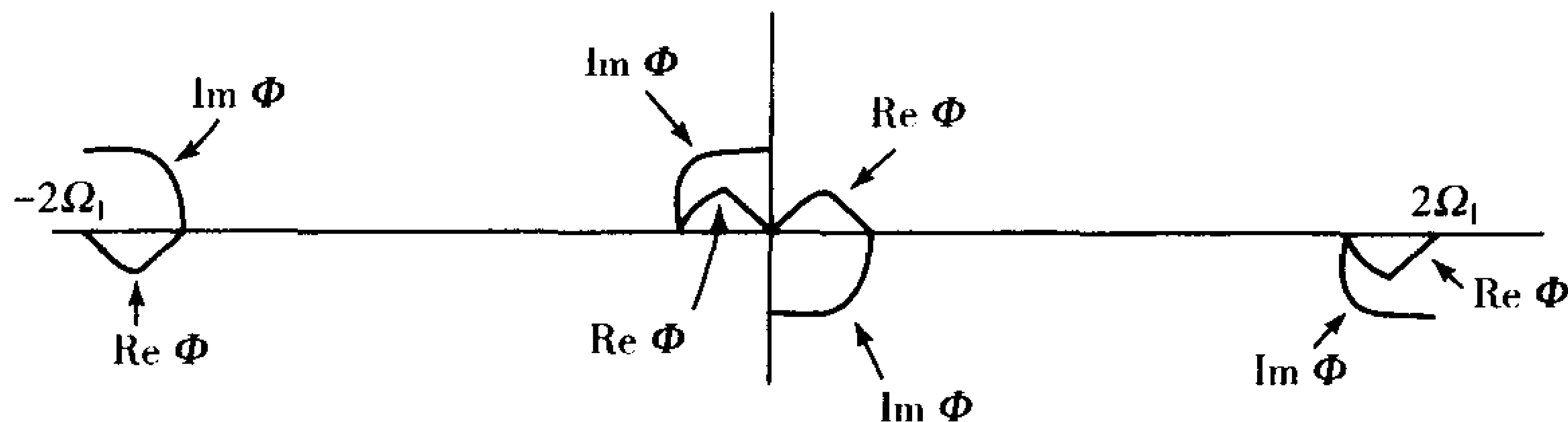


图 8-23 希尔伯特变换的恢复 ■

在通信应用中，若 ϕ 为原始信号，ψ 为它的希尔伯特变换，则把组合 $\phi(t)+\mathrm{i}\psi(t)$ 称为 $\phi(t)$ 的"分析信号"(它导致了许多致力于工业应用的数学家的不可名状的头疼).

希尔伯特变换在其他领域也非常有用. 在 3.6 节中，我们讨论了 RLC(电阻-电感-电容)电路，当输入一个正弦的外部电压时，电路最终会达到一个稳定的状态，此时内部电压和电流的正弦振动频率与驱动电压的频率相同. 特别地，对图 3-20 中的电路我们证明了，由电压 $V_s(t) = e^{i\omega t}$产生的(复)电流 I_s 为

$$I_s = \frac{e^{i\omega t}}{R_{eff}},$$

其中

$$R_{eff} = \frac{R/i\omega C}{R + 1/i\omega C} + i\omega L. \tag{16}$$

这种"同步性"是大多数封闭(自治)物理系统的典型特点，这种系统中输入 $e^{i\omega t}$的稳态响应 $y(t)$ 具有 $k(\omega)e^{i\omega t}$的形式；其中频域传递函数 $k(\omega)$(在 $1/R_{eff}$的情况)往往依赖于应用的频率.

对这种物理系统驱动-响应关系的一种描述是微分方程理论(参见文献). 采用的是参数变分的传统方法，我们可以将系统的响应 $y(t)$表示为输入 $u(t)$的函数值的加权和. 这个等式为

504

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)u(\tau)d\tau. \tag{17}$$

其中 $G(t-\tau)$称为系统的格林函数，它度量了 τ 时刻 u 的值对于 t 时刻输出的影响程度. G 也称为脉冲响应.

将这两个观察综合起来. 若输入 $u(t)$为正弦曲线 $e^{i\omega t}$，则输出的传递函数描述与格林函数描述必须一致. 因此

$$k(\omega)e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)e^{i\omega\tau}d\tau,$$

或

$$k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} G(T)e^{-i\omega T}dT, \tag{18}$$

其中 $T = t - \tau$. 等式(18)除了一个 2π 因子外，具有傅里叶变换的形式. 从而我们可对其进行转化，用传递函数来表示格林函数：

$$G(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(\omega)e^{i\omega T}d\omega. \tag{19}$$

如果系统是一个实际的物理模型(例如 RLC 电路)，它必须遵循因果法则：在给定时刻 t，响应 y 的值不能依赖于输入 u 在后继时刻 τ 的值. 因此由(17)式可以看到，对于因果系统，格林函数 $G(t-\tau)$当 $\tau > t$ 时等于零，由方程(19)得到等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\omega)e^{i\omega T}d\omega = 0, \text{对于所有的 } T < 0. \tag{20}$$

作为因果法则的一个判断标准，条件(20)是很有趣的. 因为 $T<0$ 时，指数因子作为复变量 ω 的一个函数在下半平面内衰减. 这样，如果 $k(\omega)$解析开拓到下半平面后是解析且有界的(上界为常数/$|\omega|$)，则若尔当引理(6.4 节)将保证(20)式成立. 实际上，$k(\omega)$往往是有理函数(例如在 RLC 电路中)，并且要服从关于物理系统性质的一些假设，对于因果法则，可以证明条件(20) 既是必要的，又是充分的.

例 4 对于图 3-20 所示的电路的传递函数验证因果条件(20).

证 由方程(16)及一些代数运算，我们得到

$$k(\omega) = \frac{1}{R_{\mathrm{eff}}} = \frac{\mathrm{i}\omega CR + 1}{-\omega^2 CRL + \mathrm{i}\omega L + R},$$

其极点为

$$\omega_{\pm} = \frac{\mathrm{i} \pm \sqrt{-1 + 4CR^2/L}}{2CR}. \tag{21}$$

若 $4CR^2/L > 1$，则 $\sqrt{-1+4CR^2/L}$ 为实数且 $k(\omega)$ 的两个极点都落在上半平面内. 否则，我们有 $0 < 4CR^2/L < 1$，于是 $\sqrt{-1+4CR^2/L}$ 为 0 到 i 间的虚数，因而极点仍然落在上半平面内. 因此 $k(\omega)$ 在下半平面内是解析的；又因为它的衰减速率与 $|\omega|^{-1}$ 相同，所以系统是因果的. ■ [505]

那么希尔伯特变换在这里是如何应用的呢？系统的因果传递函数 $k(\omega)$ 具有等式(8)成立所必需的全部性质：它在无穷远处趋于 0，且衰减速率与 $|\omega|^{-1}$ 相同，并且在半平面内解析，不过不是希尔伯特变换所要求的上半平面. 但是，如果用下半平面内的周线代替图 8-18 的周线，并对(8)式的推导作些修改，则 $k(\omega)$ 的实部虚部就通过希尔伯特方程联系了起来，符号的变化是因为周线是顺时针方向. 这样，我们得到了 Kramers-Kronig 关系：

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}k(\omega) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}k(\eta)}{\eta-\omega}\mathrm{d}\eta, \\ \mathrm{Re}k(\omega) &= -\frac{1}{\pi}\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}k(\eta)}{\eta-\omega}\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{22}$$

第一个等式在电路理论、原子及电磁散射应用中非常有用，因为传递函数的实部往往可以由功率损耗测量的方法有效而准确地确定. 同时由(22)式可以计算出用实验方法难以测量的虚部的值. 在光学应用中，介电常数就是传递函数 k，方程(22)即为人们熟知的色散关系.

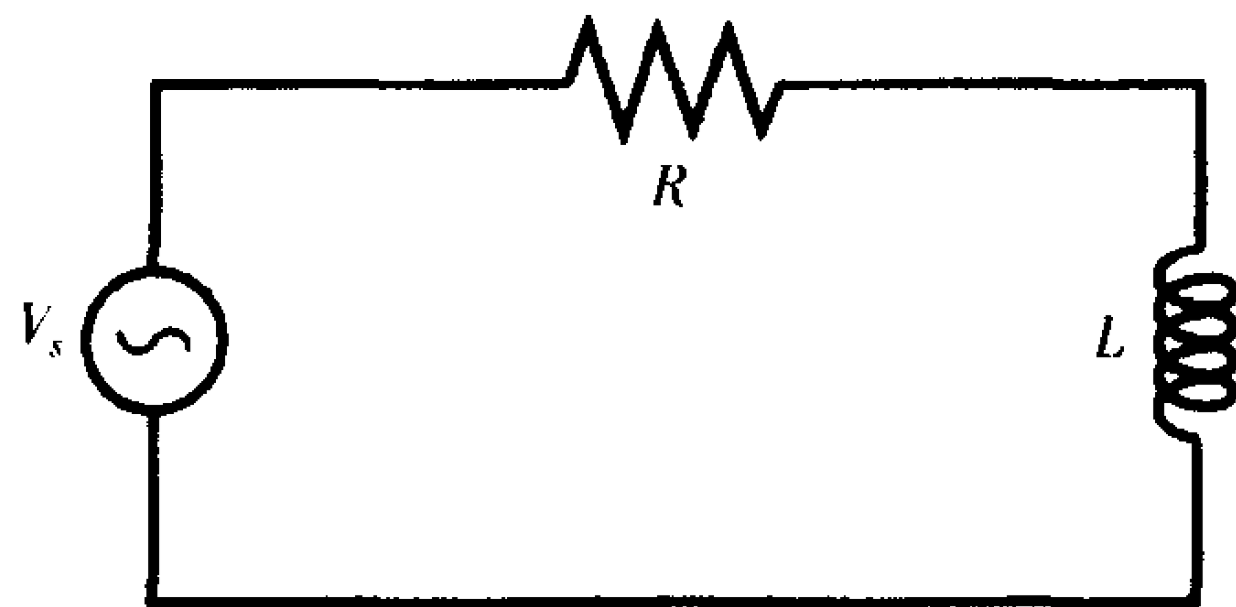


图 8-24 例 5 的电路图

例 5 对图 8-24 中电路的传递函数验证(22)式.

证 应用 3.6 节的方法可知有效阻抗为 $R_{\mathrm{eff}} = R + \mathrm{i}\omega L$. 因此，

$$I_s = \frac{V_s}{R_{\mathrm{eff}}} = \frac{V_s}{R + \mathrm{i}\omega L}$$

且 $k(\omega) = 1/[R + \mathrm{i}\omega L]$. 这个函数在下半平面内解析且以 $|\omega|^{-1}$ 的衰减速率趋于 0. 我们有

$$\mathrm{Re}k(\omega) = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \qquad \mathrm{Im}k(\omega) = \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

[506]

由图 8-25 中的周线，得

$$\begin{aligned} \mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}k(\eta)}{\eta-\omega}\mathrm{d}\eta &= \mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R}{R^2+\eta^2L^2}\frac{1}{\eta-\omega}\mathrm{d}\eta \\ &= -2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}(-\mathrm{i}R/L) - \pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}(\omega). \end{aligned}$$

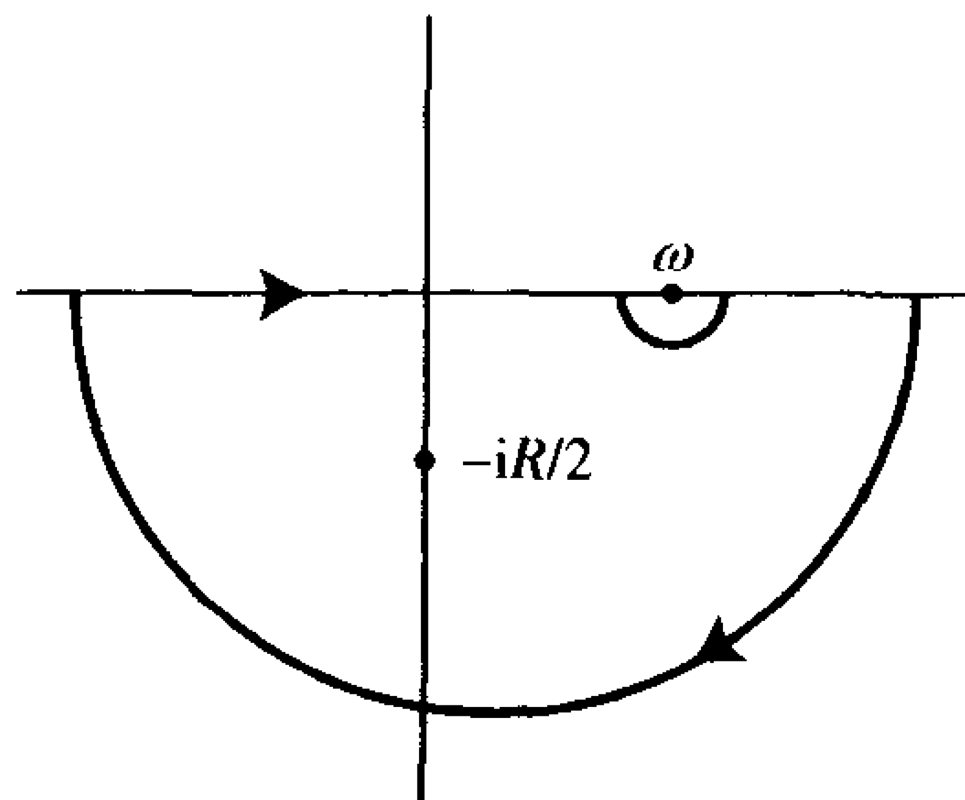


图 8-25 例 5 的周线

通过一些代数计算得到

$$\frac{-\pi\omega L}{R^2+\omega^2L^2}=\pi\,\mathrm{Im}k(\omega),$$

这与(22)式的第一个式子相符. 第二个式子的验证留作练习. ■

练习 8.5

1. 验证希尔伯特变换表中的每个变换. [提示：对最后两个变换，考虑解析函数 $i/(z+ai)$ 及 $(e^{iaz}-1)/iz$.]
2. 应用希尔伯特表中的一个变换验证(10)式.
3. 设周线如图 8-26 所示，证明：半圆周 S'_ε 对(3)式中积分的贡献为 $3\pi i f(z_0)/2$，S''_ε 对(5)式中积分的贡献为 $-\pi i f(z_0)/2$. (注意到索霍茨基-普勒梅利预测仍成立.)

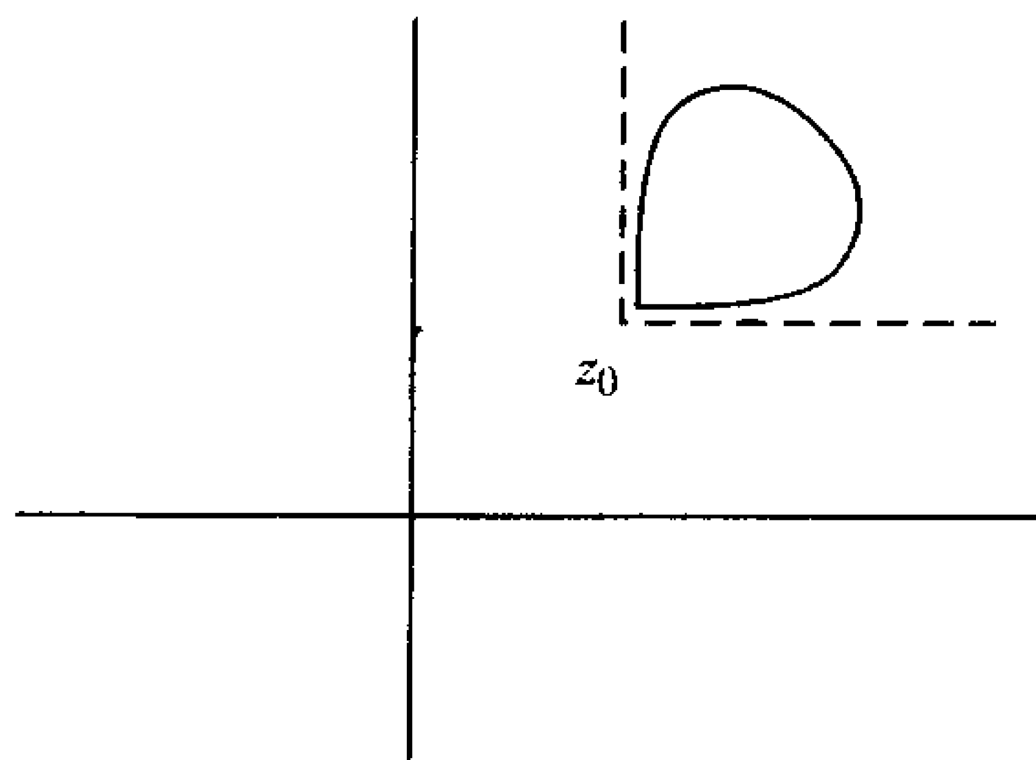


图 8-26　习题 3 的周线

4. 利用欧拉公式及希尔伯特变换表直接证明：如果 $|\omega|<\Omega_1$，则 $\cos\omega x\cos\Omega_1 x$ 的希尔伯特变换是 $\cos\omega x\sin\Omega_1 x$.
5. 设 $f(z)$ 在包含单位圆盘 $|z|\leq 1$ 的区域内解析，证明：对于任意常数 ω，$g(x)=f(e^{i\omega x})+f(e^{-i\omega x})$ 的希尔伯特变换是 $-i[f(e^{i\omega x})-f(e^{-i\omega x})]$. [提示：利用麦克劳林级数.]

507

6. 对于图 8-24 中的电路，证明色散关系(22)中第二个等式.
7. 证明下列积分当 z 穿过周线上任意一点 z_0 时，积分值的跳跃值为 $2\pi i f(z_0)$，与索霍茨基-普勒梅利公式一致.

   (a) $\oint_{|\zeta|=1}\frac{1/\zeta}{\zeta-z}d\zeta$　　(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi-z}d\xi$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\xi}{\xi-z}d\xi$　[提示:参考练习 6.4 习题 10.]

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi/(\xi^2+1)}{\xi-z}d\xi$　[提示:参考练习 4.7 习题 18.]

8. 理论物理学家经常用到以下等式

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{x-x_0-i\varepsilon}=\text{p. v. }\frac{1}{x-x_0}+i\pi\delta(x-x_0),\tag{23}$$

其中 $\delta(x-x_0)$ 是狄拉克 δ 函数，它是一个"理想化的函数"，对任意连续函数 $f(x)$，具有如下性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0).$$

将(23)式两边同时乘以 $f(x)$，并在 $(-\infty,\infty)$ 上进行积分，交换极限与积分顺序，可得到

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0-i\varepsilon}dx=\text{p. v. }\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx+i\pi f(x_0).\tag{24}$$

严格地说，(23)式是(24)式的一种粗略的缩写.

(a) 假设 $f(z)$ 在 $\mathrm{Im}z\geq 0$ 时解析，在无穷远处趋于 0 的速度充分快，使得它沿上半平面上的半圆周 C_ρ^+ 上的积分趋于 0，试推导(24)式. [提示：根据图 8-27 进行分析.]

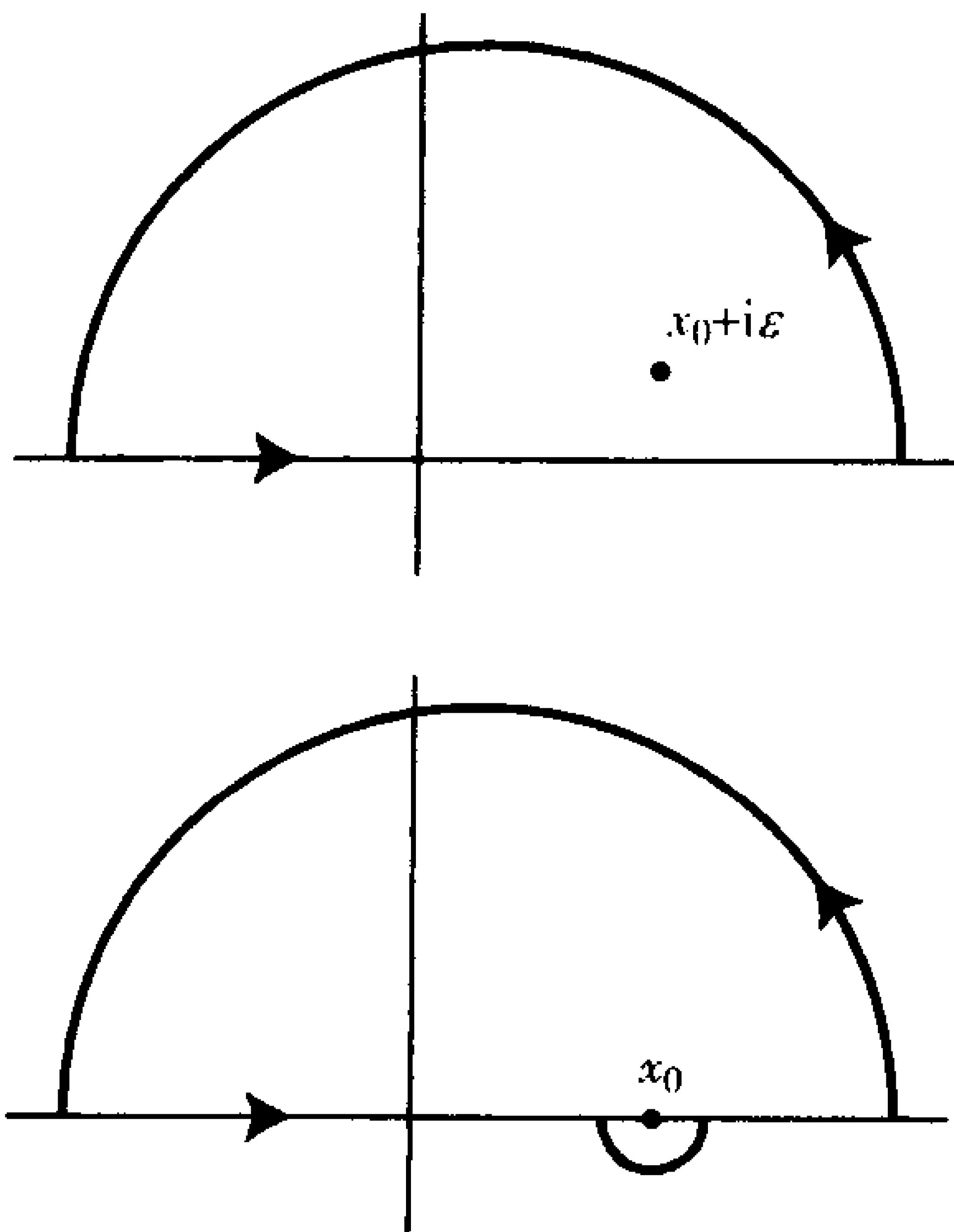


图 8-27　习题 8 的周线

508

(b) 求极限 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{x-x_0+i\varepsilon}$. [利用(23)式的想法.]

小结

正弦分析在应用数学中的主要价值在于，当一个线性系统被函数 $Ae^{i\omega t}$ 驱动时，在适当的条件下，系统的响应有同样的形式. 为利用这一点，我们需将给定的实变量函数表示为正弦曲线的叠加.

当 F 是以 L 为周期的周期函数并满足一定的连续条件时，傅里叶级数给出了一个合适的分解：

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in2\pi t/L},$$

其中系数为

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} F(t)e^{-in2\pi t/L}dt.$$

快速傅里叶变换是估计这些系数的有效算法.

如果 F 不是周期函数，但 $|F|$ 可积(仍满足一些连续条件)，则 F 有如下分解式

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

其中 G 是 F 的傅里叶变换，定义为

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t}dt.$$

509

以上两个表达式在很多情形下都可以“直接”微分(即积分号下逐项微分)，又由于微分运算不过是乘以 $i\omega$，因此应用傅里叶分析求解微分方程可将问题大大简化.

在处理初始条件与瞬变问题时，应用 F 的拉普拉斯变换比较方便：

$$\mathcal{L}\{F\}(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st}dt.$$

拉普拉斯变换可看作一个函数的傅里叶变换在 $t=0$“开始”[即 $t<0$ 时，$F(t)=0$]，并以 s 代替 $i\omega$. 初始条件的作用体现在导数公式 $F^{(n)}(t)$ 上：

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}\}(s) = s^n\mathcal{L}\{F\}(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0).$$

因此拉普拉斯变换是解决初值问题的一种适当工具.

拉普拉斯变换另一个优点是它能处理一些不可积函数. 应用 $\mathcal{L}\{F\}(s)$ 的反演公式可求出 $F(t)$，但利用拉普拉斯变换表往往更为方便.

当数据集是离散的情形时，z 变换则取代了傅里叶变换和拉普拉斯变换的作用. z 变换与洛朗级数理论有关，由此可得到它的许多性质.

当柯西积分的奇点穿过周线时，它的性质是不连续的，这种跳跃如索霍茨基-普勒梅利公式所示. 当周线为实轴时，由柯西积分即得到希尔伯特变换公式，它与被积函数的实部与虚部有关. 希尔伯特变换在因果自动系统分析(例如调制机制和电力网络)中有很多应用. 它也是色散关系与 Kramers-Kroenig 关系的理论基础.

参考文献

第 3 章末的标题“正弦曲线分析”后所列的一些参考文献对本章的进一步学习也有一定帮助. 以下所列参考文献中对本章中的一些内容有严格的证明.

傅里叶级数

[1] Bachman, G., and Narici, L. *Functional Analysis*, 2nd ed., Dover Pubns., New York, 2000.

[2] Edwards, R. E. *Fourier Series*, 2nd ed., Vols. I and II. Springer-Verlag, New York, 1979.

[3] Friedman, A. *Advanced Calculus*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1971.

510

傅里叶变换与拉普拉斯变换

[4] Churchill, R. V. *Operational Mathematics*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

[5] Kammler, D.A., *A First Course in Fourier Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2000.

[6] Snider, A.D., *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1999.

z 变换

[7] Oppenheim, A. V., and Schafer, R. W. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1975.

[8] Papoulis, A. *Signal Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.

柯西积分与希尔伯特变换

[9] Bendat, J. S. *The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements*. Bruel and Kjaer, Naerum, Denmark.

[10] Carlson, A.B., Crilly, P.B., and Rutledge, J.C., *Communication Systems*, 4th ed., McGraw-Hill, 2001.

[11] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

[12] Levinson, N., "Simplified Treatment of Integrals of Cauchy Type, the Hilbert Problem, and Singular Integral Equations," *SIAM Review*, 7, October 1965.

511

[13] Panofsky, W. K. H., and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Boston, Mass., 1962.

附录 A　共形映射的数值结构

Trefethen 和 Driscoll

在第 7 章中，我们介绍了共形映射和它的一些应用．对于任意多边形区域的情况，我们还给出了这些映射的一个公式：施瓦茨–克里斯托费尔变换．从表面上看，用这个公式构造到给定多边形区域的共形映射似乎是一件很简单的事情，但实际上并非如此，第 7 章也说明了这一点．事实上，19 世纪 60 年代施瓦茨和克里斯托费尔就发现了这个公式，在此后的近一个世纪，对于多边形区域中除去最简单的情况外，要构造出共形映射实际上是不可能的．然而，计算机时代的到来改变了这一情况．

本附录的目的是给出一些构造施瓦茨–克里斯托费尔变换的数学技巧．为此，我们会粗略地谈到所涉及的数值分析问题．这是一个活跃的研究领域，学有余力的学生可在这方面进行一些研究．我们希望大家能够认识到共形映射或者说复分析在解决科学问题上的重要性．最后，我们将说明如何运用施瓦茨–克里斯托费尔思想构造到任意区域上的共形映射．

A.1　施瓦茨–克里斯托费尔变换中的参数问题

在 7.5 节的施瓦茨–克里斯托费尔问题中，我们的目的是求出一个解析函数 f，它把 z 平面的上半平面映到 w 平面上顶点依次为 w_1，…，w_n 的多边形 P 的内部．由 7.5 节中的定理 7 和(8)式可知，通过选择适当的复数 A 和 B 及实数 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$，这样的映射就可由下面的公式表示：

$$f(z)=Ag(z)+B=A\int_0^z(\zeta-x_1)^{\theta_1/\pi}(\zeta-x_2)^{\theta_2/\pi}\cdots(\zeta-x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi}\mathrm{d}\zeta+B, \tag{1}$$

这里 θ_i 是该多边形在顶点 w_i 处的右旋转角，如图 7-36 所示．实轴上的点 x_i 通过 f 被映成了顶点 w_i．

正如 7.5 节中所述，有两个原因表明运用(1)式计算出 f 并不容易．首先是数值积分的问题．即便是图 7-39 所示的简单的三角形区域，(1)式的积分也没有固定的表达式．对于更加复杂的多边形，施瓦茨–克里斯托费尔的积分计算更是多种多样，以至于并不能找到一个确切的公式．因此，需寻找有效的数值逼近．在 A.3 节中我们会讨论这个问题，在此之前假定(1)式中所有的积分都能容易地算出来．

其次，更麻烦的问题是由多边形 P 的顶点数 n 多于 4 个时造成的．正如前面所说，原像点 x_i 中只有三个是自由选择的，剩余的点由 P 的几何形状决定．若 P 是对称的，例如图 7-45 中的矩形，那么未知的 x_i 不用参数也能很快确定出来，但对于一般的多边形就没那么容易了．那么如何运用(1)式来确定 x_i 呢？显然，它们必须先以某种形式被确定下来，这种确定原像点 x_i 的问题称为*施瓦茨–克里斯托费尔参数问题*．

不妨先固定下面的三个值：$x_1=-1$，$x_2=0$ 和 $x_n=\infty$（暗含着），那么还有剩余的 $n-3$ 个未知的值

$$x_3,x_4,\cdots,x_{n-1} \tag{2}$$

需要确定，它们满足条件：

$$0 < x_3 < x_4 < \cdots < x_{n-1} < \infty. \tag{3}$$

对任意一组满足上述条件的 x_i，可由(1)式得到一个函数 g，它把实轴映到一个多边形 P'，而且 P'每个顶角与 P 相同．我们的目的是找到一组 x_i，使得到 P'与 P 几何上相似．一旦做到了这一点，由 7.5 节可知，适当调整(1)式中的常数 A 和 B 就能使两个多边形全等．

例如，设图 7-36 中的右旋转角分别是

$$\theta_1 = -146°, \quad \theta_2 = -82°, \quad \theta_3 = 160°, \quad \theta_4 = -150°, \quad \theta_5 = -142°,$$

我们试着取值

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 2.$$

图 A-1a 给出了这时所得到的多边形 P'，通过计算、缩放和旋转使边$[w'_1, w'_2]$与$[w_1, w_2]$相同．这时，两者的角度虽然都一样，但是其他边的长度还相差很远．为了加大边长$[w'_2, w'_3]$，不妨尝试

514

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 4.$$

这时得到图 A-1b 所示的多边形虽然看起来好点，但$[w'_2, w'_3]$仍太短，且$[w'_3, w'_4]$快“消失”了．若尝试

$$x_3 = 10, \quad x_4 = 15,$$

就得到图 A-1c 所示的多边形，它看起来与 P 相近些了．但是，要找到一个 P'与 P 恰好相似，譬如，对一个六边形，经过上述的反复试验，显然需要花费更大的功夫．因此，若 n 是 10 或 20 而不是 5 时，这个过程会更长．

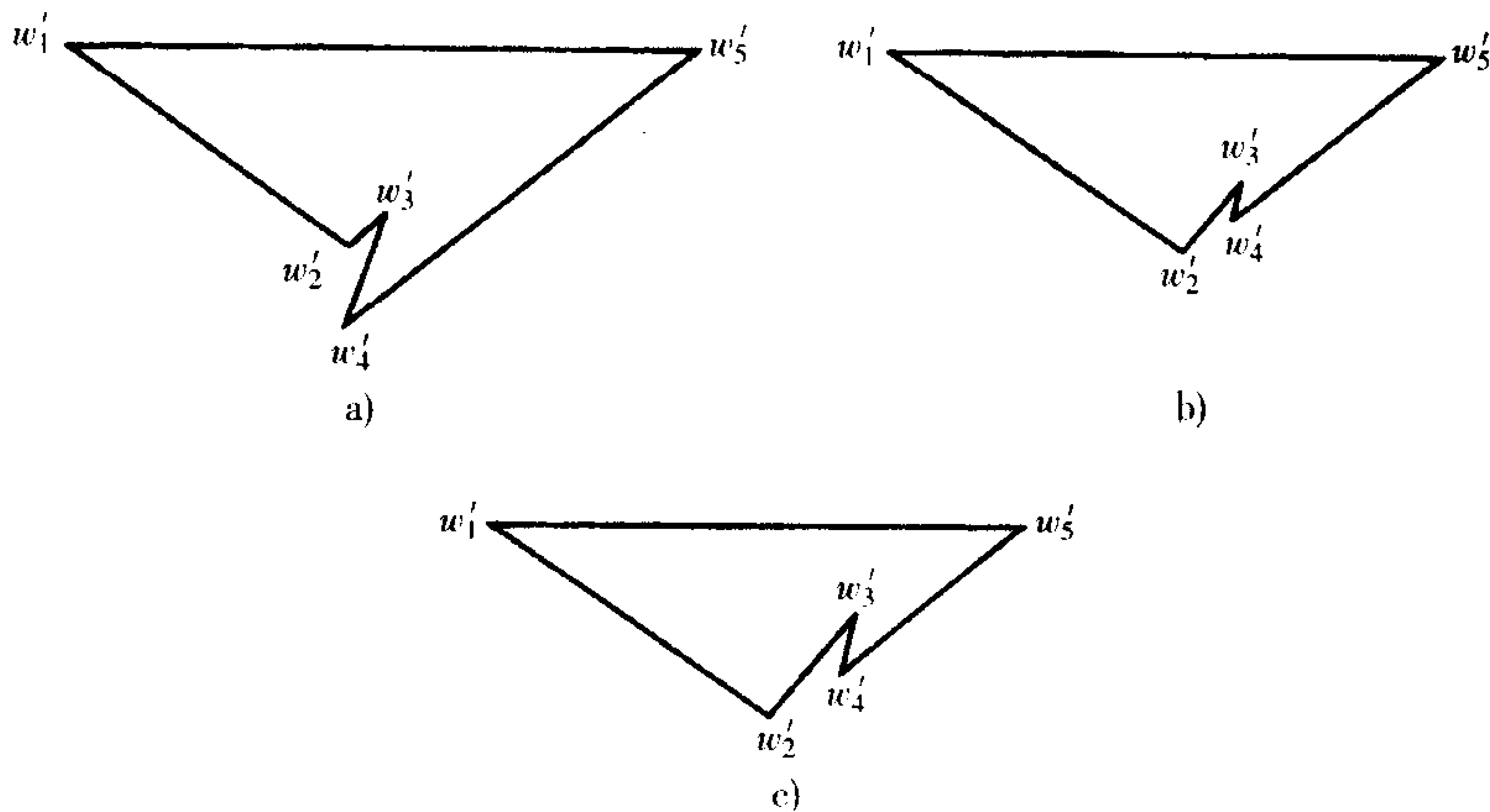


图 A-1 基于 $0 < x_3 < x_4 < \infty$ 的不同选择，由施瓦茨–克里斯托费尔变换逼近图 7-36 所示的多边形 P

为了加快进程，需要利用公式表示相似的代数条件．考虑以下 $n-3$ 个方程：

$$\frac{|g(x_i) - g(x_{i-1})|}{|g(x_2) - g(x_1)|} - \frac{|w_i - w_{i-1}|}{|w_2 - w_1|} = 0, \quad i = 3,4,\cdots,n-1. \tag{4}$$

注意到上式右边相除的每个绝对值是 P 的边长，左边相除的每个绝对值是由(1)式计算出的 P'的边长．因此，由这些方程可知 P'的边$[w'_1, w'_2]$，…，$[w'_{n-2}, w'_{n-1}]$的长度与 P 中相对应

的边的长度都只差一个相同的比例因子 $C=|g(x_2)-g(x_1)|/|w_2-w_1|$. 显然，这里没有涉及边$[w'_{n-1},w'_n]$与$[w'_n, w'_1]$，不过，由假设可知除这两条边外 P'的其他边长都是 P 中对应边长的 C 倍. 于是，由于(1)式各顶点的角度都已固定，并且任意两条非平行直线必有唯一交点，所以，P 与 P'中余下的两边的边长也满足(4)式. 因此，可以说(4)式给出了 P 与 P'相似的条件.

(2)式到(4)式构成了含有 $n-3$ 个未知数的 $n-3$ 个方程的非线性约束方程组，我们之所以把两个商都写到方程(4)的左端，是因为方程组可简写成下面的形式： 515

$$F_i(\boldsymbol{x})=0,\quad i=3,4,\cdots,n-1,$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 表示长度为 $n-3$ 的未知向量$(x_3, \cdots, x_{n-1})$，每个 F_i 都是 $\boldsymbol{x}$ 的实值函数. 如果进一步把 $\boldsymbol{F}$ 定义为向量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(F_3(\boldsymbol{x}), \cdots, F_{n-1}(\boldsymbol{x}))$，且 $\boldsymbol{0}$ 记为向量$(0, \cdots, 0)$，那么上式就可写成更加简单的形式：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}. \tag{5}$$

现在，我们已把施瓦茨-克里斯托费尔参数问题转化成了下面的代数问题：在(3)式的约束条件下，求出(5)式的根 $\boldsymbol{x}^*$. 可以证明这个问题有唯一解，且它恰是将上半 z 平面映到 P 的(1)式的原像点组成的向量.

当然，得到(5)式的过程中并没有简化数学关系，只是简化了记法. 例如，对于 $n=5$ 的多边形，在(5)式中当 $i=3$ 时，有

$$\frac{\left|\int_{x_2}^{x_3}(\zeta-x_1)^{-146°/\pi}(\zeta-x_2)^{-82°/\pi}(\zeta-x_3)^{+160°/\pi}(\zeta-x_4)^{-150°/\pi}\mathrm{d}\zeta\right|}{\left|\int_{x_1}^{x_2}(\zeta-x_1)^{-146°/\pi}(\zeta-x_2)^{-82°/\pi}(\zeta-x_3)^{+160°/\pi}(\zeta-x_4)^{-150°/\pi}\mathrm{d}\zeta\right|}$$
$$-\frac{|w_3-w_2|}{|w_2-w_1|}=0. \tag{6}$$

(由 1°等于 $\pi/180$ 弧度，因此 $146°/\pi=146/180$，等等.)不过，在数值计算问题中，用简明的记号表达一个问题非常有用，因为这样，该问题就具有选用已知的数值方法来求解的标准形式.

事实上，求形如(5)式的非线性方程组的解是数值分析的基本研究内容之一. 一般情况下，要找到一个精确根 $\boldsymbol{x}^*$是不可能的，因此通常采用迭代的方法逼近 $\boldsymbol{x}^*$. 首先，通过猜想选一个初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，进而由迭代得出一系列值 $\boldsymbol{x}^{(1)}$，$\boldsymbol{x}^{(2)}$，…，希望它们收敛于 $\boldsymbol{x}^*$. 这种方法使用的算法大部分是牛顿法的变形，读者可能比较熟悉利用牛顿法对一维的非线性方程进行的迭代. 有许多计算机程序都可完成这种迭代，在较大的计算机系统或在交互数值问题求解环境(如 MATLAB)中都能找到这样的软件库. 在可执行的环境下，这样的计算机程序能很快地给出结果. 通常，经过若干步迭代后，$\boldsymbol{x}^{(k)}$将非常接近 $\boldsymbol{x}^*$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})$是 10^{-16}量级或者更小. 换句话说，在具有 32 位字长的典型计算机上，$\boldsymbol{x}^*$以双倍的精度收敛于“机器准确值”.

若我们盲目地对方程组应用一个程序来求解施瓦茨-克里斯托费尔问题，那么往往得不到正确的解. 原因是我们忽略了(3)式的限制. 即使 $\boldsymbol{x}^{(0)}$满足这些限制条件，若干步迭代后 $\boldsymbol{x}^{(k)}$也很有可能不满足(3)式，除非我们尽量防止这种情况发生. 在这种情况下，由(1)式得到的多边形 P'的顶点将不再是原来的顺序. 例如，对于上面提到的五边形的例子，我们取 516

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 1.$$

如图 A-2 所示，它虽然是一个很漂亮的五边形，但仅从形状上就知道它与 P 不相似，为此就没有必要浪费时间调整它的边长去满足(4)式了．

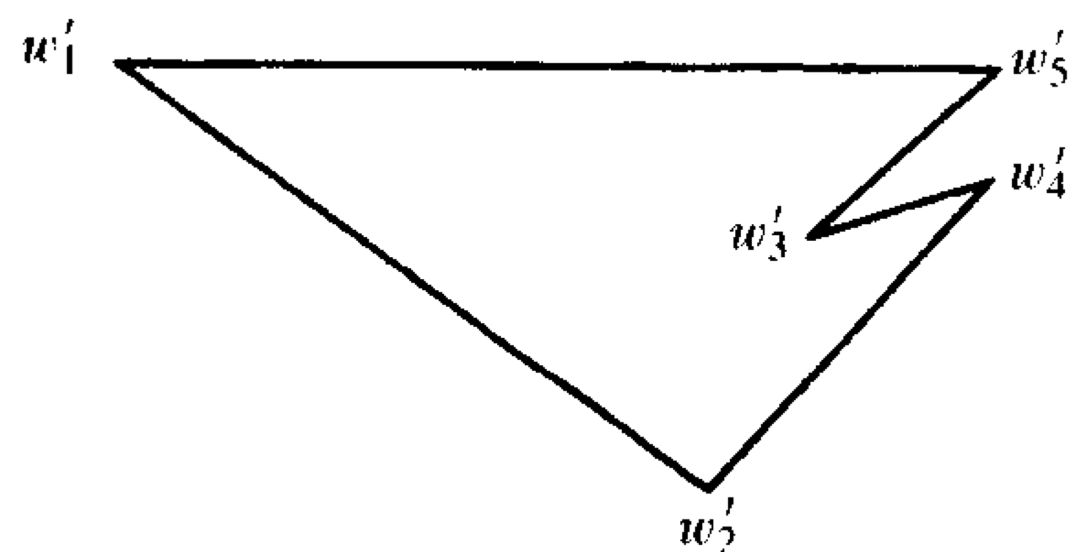


图 A-2　与原像点顺序不一致，即 $x_3 > x_4$ 时得到的 P 的逼近多边形

为了满足约束条件，一个简单且高效的办法是对变量进行变换．若 $\boldsymbol{x}$ 是由满足(3)式的正数组成的向量，像通常一样，取 $x_2=0$，那么公式

$$\hat{x}_i = \log(x_i - x_{i-1}) \in \mathbf{R}, \quad i = 3,4,\cdots,n-1 \quad (7)$$

定义了一个新的向量 $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_3, \cdots, \hat{x}_{n-1})$，且 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的分量都是实数且没有约束条件．反过来，任给一个向量 $\hat{\boldsymbol{x}}$，由(7)式

$$x_i = x_{i-1} + e^{\hat{x}_i}, \quad i = 3,4,\cdots,n-1, \tag{8}$$

这样定义了一个满足(3)式的向量 $\boldsymbol{x}$. 因此，要解决(2)，(3)和(5)式中的参数问题，只需把(5)式改写为一个新的没有约束条件的变量的非线性问题：

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}. \tag{9}$$

这时，参数问题变成了没有约束条件的由(7)式和(9)式组成的非线性方程组的问题．这样，我们就可以毫无顾虑地运用基于牛顿法的数值算法了．

A.2　例子

下面我们将通过一些新的例子来说明上述想法是如何在实际中运用的．首先解决图 7-36 所示的多边形的问题．我们先给出它的边长，不妨设

517

$$|w_2 - w_1| = 8, \quad |w_3 - w_2| = 3, \quad |w_4 - w_3| = 1;$$

如前所述，另外的两条边已(暗含着)确定了．设(7)式的初始值为 $\hat{x}_3^{(0)} = \hat{x}_4^{(0)} = 0$，即对应(8)式中 $x_3^{(0)} = 1$，$x_4^{(0)} = 2$，这时可以利用计算机程序进行数值迭代求解(9)式的参数问题．图 A-3a 给出了最初几步迭代中多边形 P' 的图形(对于近似牛顿法中所需的雅可比矩阵，略去了 $n-3$ 步无关紧要的最初估计)．图 A-3b 为经过 14 次迭代后，精确到 15 位数时的多边形．需要说明的是，多边形在迭代过程中的形状及迭代的次数与选用的程序有关．

在图 A-3a 中，每个多边形上面的直线表示实轴上的线段[－1，15]，小的垂直交叉线段表示每次迭代对应的点 $x_1, \cdots, x_{n-1}$. 开始时，这四个原像点被均匀隔开．在整个迭代过程中点 $x_1 = -1$，$x_2 = 0$ 始终不变，而 x_3 和 x_4 在变．从图中可看出，当快接近多边形 P 时，参数在快速收敛，可以证明收敛值是

518

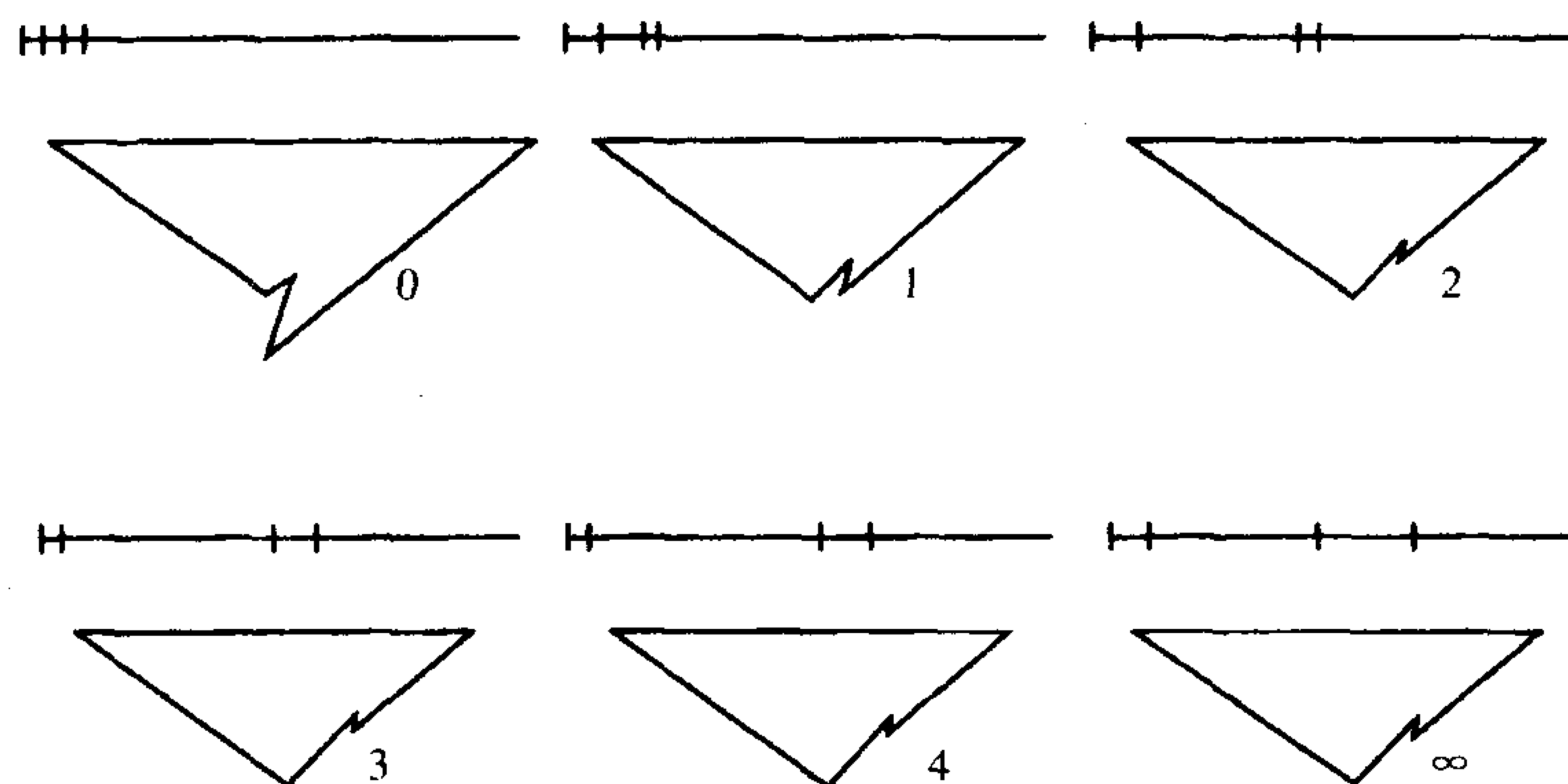
$$x_3 = 8.225\,44, \quad x_4 = 11.070\,29.$$

注意这些数与图 A-1c 所对应的推测数 $x_3 = 10$，$x_4 = 15$ 相差很大．

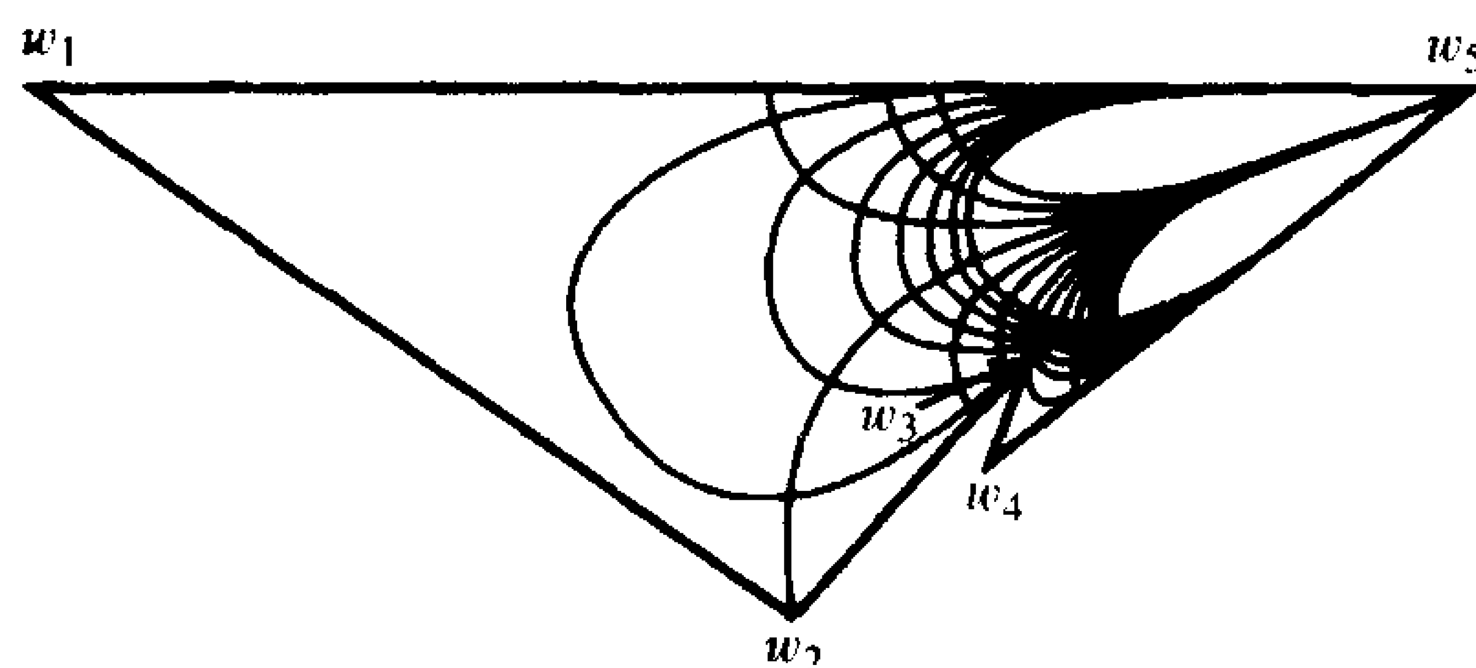
在图 A-3b 中，最终的多边形 P 的内部绘制了一些额外的曲线．这些曲线是 z 平面上下述水平线和垂直线

$$\mathrm{Im}z = 0.2,1,2,3,4,5,6, \quad \mathrm{Re}z = -6, -4, -2,0,\cdots,18$$

的像．



a) 运用牛顿法很快就收敛到了正确的P和正确的原像点



b) 多边形P成功地映射到上半平面，P内的曲线是上半平面内的垂线和水平线的共形像

图 A-3

这 20 条曲线的像曲线都在 $z=\infty$ 的像点 w_5 相交．另外，在多边形 P 的内部，相交的像曲线一定正交．事实上，它们构成了一个网格，每个网格单元都可看作是长宽比是 2 的变形矩形．这也证实了共形映射的性质：局部地改变尺度，但不改变角度．

图 A-4 与图 A-5 给出了另外两个多边形在类似迭代过程中的图形．同样我们取初始值为 $x_j^{(0)}=j-2$，$1\leqslant j\leqslant n-1$．在图 A-4 中，$P$ 是六边 L 形．由于该多边形关于过顶点 w_3 和 w_6 的直线对称，所以最后收敛的原像点也局部地关于 x_3（和 $x_6=\infty$）对称．图 A-5 中，P 是一个七边形，看上去像螃蟹的"钳"．由最初的几步迭代可知，多边形自身"折叠"了一下，这说明中间函数 g 不是一一的．

注意到在图 A-5a 中，尽管在迭代的前几步容易辨别 x_4，x_5 和 x_6，但是它们的最终值非常接近，其收敛值为

$$x_1=-1,\qquad x_2=0,\qquad x_3=2.48883,$$
$$x_4=3.89729,\quad x_5=3.91233,\quad x_6=3.96037.$$

例如 $|x_4-x_5|\approx 0.015$．原像点的这种不均衡分布并非特例，而是由共形映射的法则所决定的．事实上，原像点的不均衡性是非常明显的．产生这种现象的原因是"钳"的两个末端基本上没有相互影响．例如，若我们把"钳"看作一个热导体，很显然，改变一个末端边界上的温度对另一个末端几乎不会有任何影响．

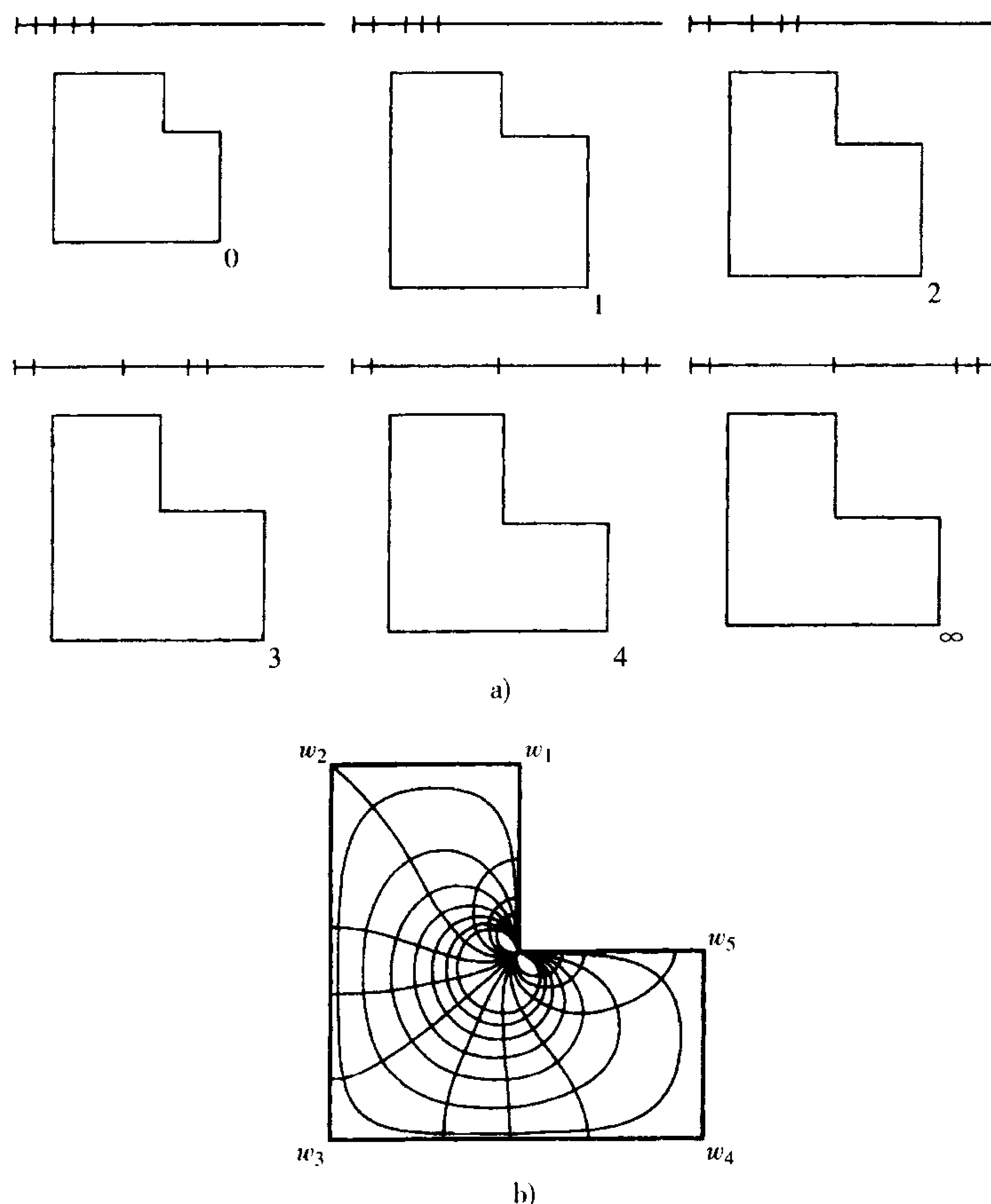


图 A-4　数值施瓦茨-克里斯托费尔映射的另一个例子

通过进一步观察发现，从观察数值共形映射的图形中得到的最有价值的东西或许就是图形中的“畸变”. 考虑图 A-3b、图 A-4b 和图 A-5b，在这三种情况下都出现的一类畸变现象在 w_n 附近. 曲线之所以在每个图中点 w_n 附近都聚成一团，是因为 w_n 在共形映射下对应的原像点是 ∞. 因此，出现这种现象也就不足为奇了. 另一类畸变现象出现在外顶点(或凸角)附近，多边形内部的曲线往往避开这些顶点. 这一点在图 A-5b 中尤其明显，其中下面的钳完全是“空的”. 突出的顶点是“死水”域，基本上不受多边形其他部分的影响；相反，内部的顶点(或凹陷的顶点)，例如图 A-3b 中的 w_3，曲线在这里很密集. 从物理意义上讲，在这种点处的流速、电场强度或温度梯度都趋近于无穷大.

519

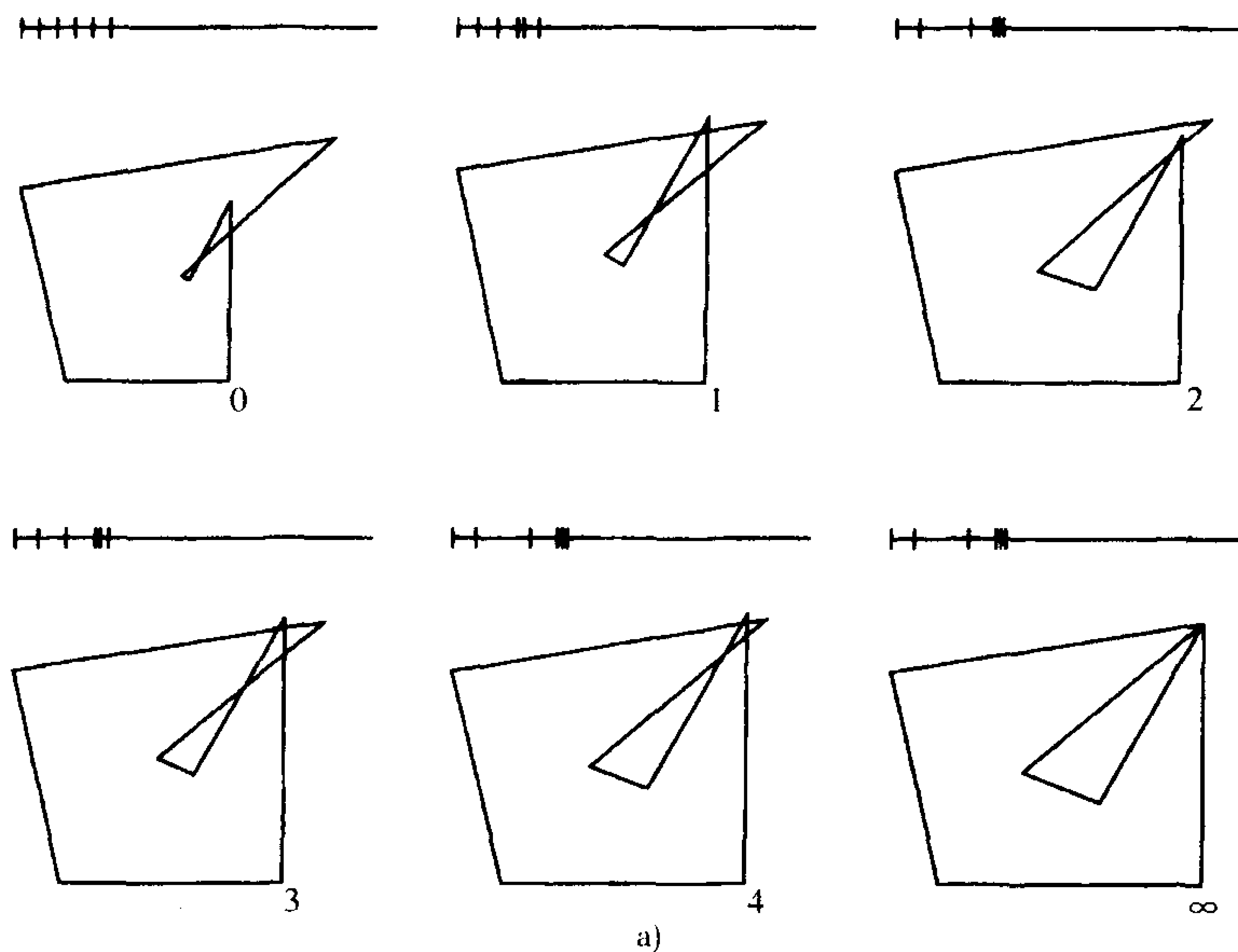
7.6 节中的例 4 和例 6 可解释这一点. 流线(或等温线或等位线)可理解为 z 即 $f^{-1}(w)$ 的虚部，像 7.5 节中的(3)式一样，如果

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1}(z - x_2)^{\alpha_2}\cdots(z - x_n)^{\alpha_n}, \tag{1}$$

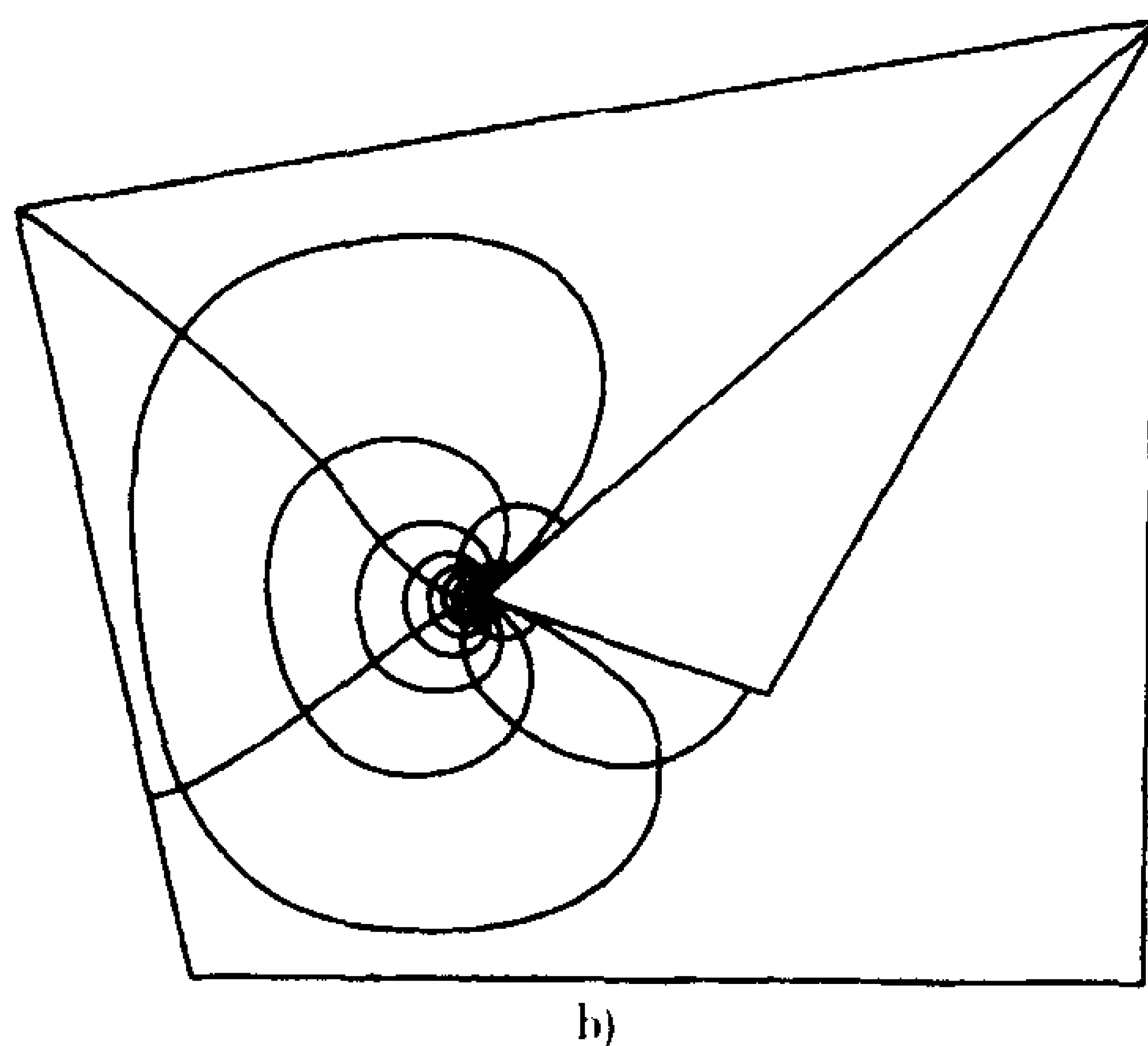
其中 $\alpha_j = \theta_j/\pi$，θ_j 为右向转角，那么

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = A^{-1}(z-x_1)^{-\theta_1/\pi}(z-x_2)^{-\theta_j/\pi}\cdots(z-x_n)^{-\theta_j/\pi},$$

所以在内顶点($\theta_j>0$)处，梯度变成无界的了．



a)



b)

图 A-5　第二个例子

对于多边形外部区域的水流而言，性质恰好相反．水流在小海湾或峡湾内部是静止的，而在海角或半岛的末端则迅速流过．实际上，流过一个简单多边形河床的流线如 7.6 节例 4 的图 7-51 所示．对于复杂的河床，就得借助于本附录中所提到的数值计算技巧了．水流流过一个理想的正方形障碍物时，图 A-6 给出了它的计算机绘图．这里顶点 x_n 在无穷远处，但这不是问题，因为 x_n 不在(1)式出现．应用施瓦茨-克里斯托费尔变换可以作出这个图形．

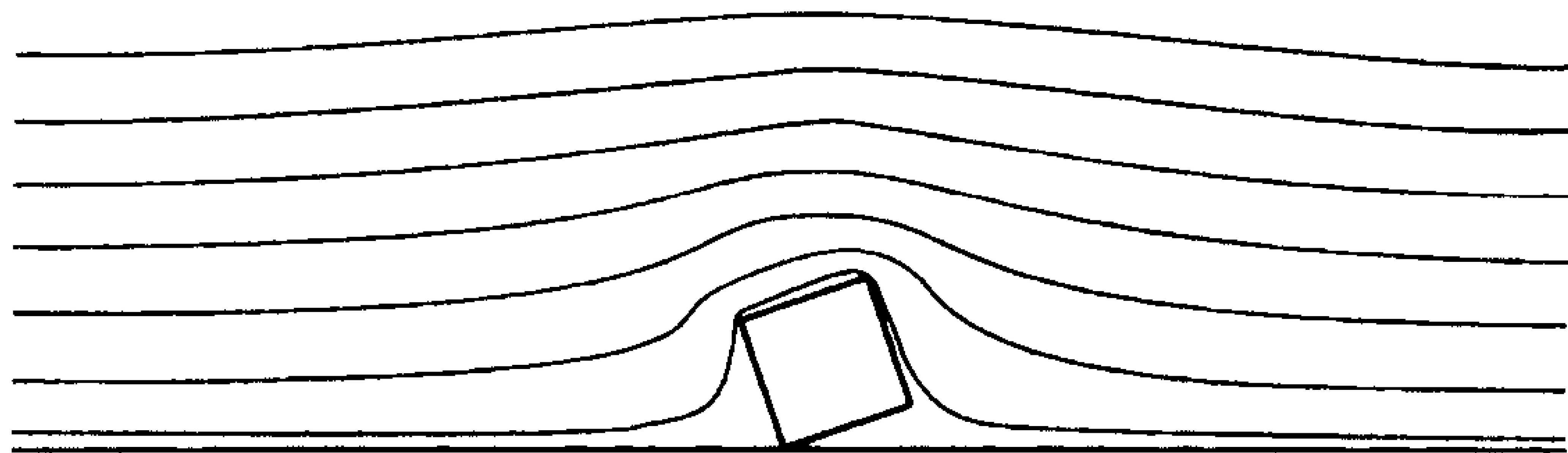


图 A-6 流过一个正方形障碍物(映到上半平面的由施瓦茨–克里斯托费尔映射得出的理想位势流的流线)

A.3 数值积分

520 ~ 522

得出这些成功的结果之后，我们现在必须回到附录开始所提的第一个问题，即这些施瓦茨–克里斯托费尔积分如何计算．注意到每次计算(4)式和(5)式中的向量值函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 时，计算机程序都要计算 $n-2$ 次如下形式的积分：

$$g(x_i)-g(x_{i-1})=\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\zeta-x_1)^{\theta_1/\pi}\cdots(\zeta-x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi}\mathrm{d}\zeta. \tag{1}$$

在求参数问题迭代解的过程中，由于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 将被计算很多次，所以数值积分要被计算成百上千次．此外，一旦解决了参数问题，那么就可以利用积分得出诸如图 A-3 到图 A-6 中的图形．显然，高效的计算出(1)式是非常必要的．

数值积分也称为*求积分*，是数值分析中另一个古老且容易理解的问题．假定我们要计算函数 $\phi(z)$ 从 a 到 b 的积分(这里无论 $\phi(z)$，a，b 是实的或虚的都没关系)．首先，最常用的方法是通过把区间 $[a, b]$ 分成子区间来计算黎曼和．设 N 是一个正整数，令

$$\Delta z=\frac{b-a}{N},\quad z_i=a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta z,\quad i=1,\cdots,N.$$

那么积分可近似为

$$\int_a^b\phi(z)\,\mathrm{d}z\approx\sum_{i=1}^{N}\phi(z_i)\Delta z. \tag{2}$$

这种求积分近似值的方法称为*中点法则*．不难证明，如果 ϕ 是光滑的，那么当 $N\to\infty$ 时，数值估计与积分准确值之间的差(即误差)至少以 N^{-2} 的比例下降．可写为

$$\int_a^b\phi(z)\,\mathrm{d}z-\sum_{i=1}^{N}\phi(z_i)\Delta z=O(N^{-2}).$$

因此，从理论上讲，中点法则是个非常有用的数值方法，不过它并不是最好的方法．如果利用这种方法得到八位有效数字，则需要 $N\approx10\,000$，可见这是很大的．

为了提高计算效率，我们可把(2)式写成

$$\int_a^b\phi(z)\,\mathrm{d}z\approx\sum_{i=1}^{N}\omega_i\phi(z_i), \tag{3}$$

其中 $\{\omega_i\}$ 是一组实*权*集，不必都相等；$\{z_i\}$ 是 $[a, b]$ 上的一组*点*或*节点*的集合，它们不必是等分 $[a, b]$ 的点．当然，这种方法的关键在于权和节点的选取．读者可能比较熟悉*辛普森法则*：

523

节点是等分选取的，权以 $1-4-2-4-2-\cdots-4-2-4-1$ 的形式选取，这样得到的误差估计为 $O(N^{-4})$，那么大约只需 100 个点(而不是 10 000)就可得到八位有效数字了．还有基于等分

点的更高阶的公式，称为牛顿–科茨(Newton-Cotes)公式．但这类通过选取权和节点来求积分的方法中最好的是**高斯积分法**．该方法的节点在“最优”情况下不是均匀分布的(它们依赖于所谓的 N 阶**勒让德**(Legendre)**多项式**的零点)，且权是无理数．对于任意固定的 K，在这种方法下产生的误差比$O(N^{-k})$下降还快．实际上，若 ϕ 在复平面上包含区间$[a, b]$的开区域上解析，那么对于某个 $0<\rho<1$，当 $N\to\infty$ 时，高斯积分将以几何速率 $O(\rho^N)$下降．

如果利用高斯积分法对施瓦茨–克里斯托费尔问题中的(1)式进行积分会有什么结果呢?事实上，什么也得不到．这是因为(1)式的被积函数在$[x_{i-1}, x_i]$上不解析，区间的两个端点都是它的奇点．例如，在(6)式左端的分子中，含奇点的项对应的指数是 $-82°/\pi$ 和 $+160°/\pi$．若利用高斯积分法和中点法则，对这个积分的收敛速度根本达不到要求，有时比 $O(N^{-1})$还要慢．对于辛普森法则来说，由于要求计算被积函数在区间端点的值，而被积函数可能在这些点是无界的，所以一般情况下，该方法就更不能用了．无疑，区间端点的奇异性是施瓦茨–克里斯托费尔积分的关键问题．

对于这个难点有很多解决方法，其中之一是应用称为**高斯–雅可比积分**的修正程序．高斯–雅可比积分公式的一般表达式也是(3)式，不过权和节点是在特定条件下选取的，它主要基于这样的假设：ϕ 的表达式中具有形如$(z-a)^\alpha$ 及$(z-b)^\beta$ 的项，其中 α，$\beta>-1$，它们分别以端点 a，b 为奇点．(这时，节点的选取依赖于所谓的**雅可比多项式**的零点．)实际上，若能把 ϕ 表示成一个乘积的形式

$$\phi(z) = (z-a)^\alpha(z-b)^\beta\psi(z),$$

其中 ψ 在包含$[a, b]$的开域内解析，那么高斯–雅可比公式产生的误差，就像高斯公式在 ϕ 解析的情况下一样，也以 N 的几何速率下降．后面的参考文献介绍了如何计算权和节点．显然，施瓦茨–克里斯托费尔积分可用高斯–雅可比积分法求解，其中奇点类型为 $\alpha=\theta_{i-1}/\pi$，$\beta=\theta_i/\pi$．

下面以 7.5 节中的例 1，即从上半平面到一个三角形的共形映射为例，具体说明高斯–雅可比积分法的作用．约去$(1+i)/\sqrt{2}$倍后，例 1 中的积分转化为

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-3/4}\,dx \approx 2.622\,058. \tag{4}$$

这里 $a=0$，$\alpha=0$，$b=1$，$\beta=-3/4$．例如对于 $N=4$，高斯–雅可比节点和权大约是 [524]

$$z_1 = 0.028\,67,\quad z_2 = 0.386\,09,\quad z_3 = 0.754\,28,\quad z_4 = 0.983\,66,$$

$$\omega_1 = 0.131\,09,\quad \omega_2 = 0.317\,59,\quad \omega_3 = 0.562\,20,\quad \omega_4 = 1.367\,54.$$

把上面的值代入(2)式，得到积分近似值为 2.622 057，它可精确到小数点后第五位！下面的数表说明，随着 N 的增大，积分近似值越来越接近积分收敛值．

N	积分近似值
1	2.57
2	2.6208
3	2.622 02
4	2.622 057

对于辛普森法则及其相关结论而言，即使我们对奇点进行特别处理，也得不到上面的结果.

对于更复杂的施瓦茨-克里斯托费尔映射，在应用高斯-雅可比积分法时，要想提高效率，必须克服存在的一些困难. 回想图 A-5 中"钳"的映射，最终的原像点分布很不均衡. 例如计算(1)式中从 x_3 到 x_4 的积分时，我们必须在迭代过程中反复计算才能确定对应边$[w'_3, w'_4]$的长度. 利用适当的高斯-雅可比公式，可以避免由于 x_4 的奇异性出现的任何病态结果. 然而 x_5 也是一个奇点，并且距离 x_4 仅有 0.015 个单位. 这样，N 至少为 $1/0.015 \approx 10^2$ 这一令人难以置信的数时，高斯-雅可比积分才能给出准确的结果. 在实际问题中，几乎所有的施瓦茨-克里斯托费尔映射问题都会出现"奇点拥挤"的问题.

所幸的是，一旦意识到这个问题，就可以采取办法避开它. 一种方法是用复合的高斯-雅可比积分法，在这个方法中，包含奇点的积分区间在端点附近可被自动细分成许多小的子区间，子区间的长度等于到最近奇点的距离. 这样一来，任意多边形上的共形映射都可以保持几何收敛性——误差为 $O(\rho^N)$.

A.4 光滑区域上的共形映射

(1)式中的施瓦茨-克里斯托费尔积分是由项$(\zeta - x_i)^{\theta_i/\pi}$的乘积组成的，每项都对应多边形 P 的一个顶点 w_i. 如果把上半平面不是映射到一个多边形，而是共形映射到一个边界是由光滑曲线 C 组成的更一般的区域 D，这时该如何处理呢？一个显而易见的方法是把 C 看成一个有无穷多个顶点 w_i 的多边形，每个顶点处的右旋转角 θ_i 都无穷小.

525

有了这个想法就使得问题容易了许多. 回顾把上半平面共形映射到多边形的(1)式

$$f'(z) = A(z - x_1)^{\theta_1/\pi}(z - x_2)^{\theta_2/\pi}\cdots(z - x_{n-1})^{\theta_{n-1}/\pi},$$

上式可改写为

$$f'(z) = A\exp\left[\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i\log(z - x_i)\right]. \tag{1}$$

这里，每项 $\log(z - x_i)$在 x_i 的某个邻域内都不是单值函数，不过，我们只需在上半平面计算 $f'(z)$. 因此，对于 $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ 和 $z \neq x_i$，$\log(z - x_i)$定义为一个单值函数，于是(1)式也是一个满足需要的合理定义的函数. 显然，只要用一个积分替换(1)式中的求和，就可以得到用于曲线边界的公式

$$f'(z) = A\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\log(z - x)\,\mathrm{d}x\right]. \tag{2}$$

在这个方程式中，$\theta(x)$可看作是单位长度的 C 沿着 x 轴旋转的角度函数，再对(2)式积分，我们就得到类似(1)式的光滑区域上的映射

$$f(z) = A\int_0^z \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)\log(\zeta - x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\zeta + B. \tag{3}$$

这是一个连续的施瓦茨-克里斯托费尔公式.

读者可能会有疑问，对于有限个顶点的多边形，如果应用通常的施瓦茨-克里斯托费尔积分得到了这样的表示式，如何求它的解呢？实际上，这是一个看起来很困难的连续参数问题. 以前，对于每个顶点 w_i，我们必须确定它的原像点 x_i. 现在，对于每个 x，我们需要确定它对

应的"角度量"$\theta(x)$.

不过,(3)式可以用数值分析中的方法来求解.它实际上是一个(不规则的)积分方程——积分式中含有未知函数 $\theta(x)$.有几种方法可数值求解积分方程.许多计算空气动力学家常用这类特殊的方程确定映到复杂区域上的映射(见参考文献[5]).另外,还有很多著名的积分方程也可以用来计算共形映射.虽然黎曼提出他的映射定理已经150多年了,但这些方程怎样才能有效地使用以及哪些方程在实际应用中最有价值,今天仍是一个非常活跃的研究领域.

A.5 共形映射软件

现在我们感到欣慰的是,即使没有数值分析专家,我们也可以计算共形映射了,因为有很多高质量的软件包可供选择.我们常用的用于 MATLAB 的施瓦茨-克里斯托费尔工具箱,可用于 MATLAB 的交互的图形环境而几乎不需要专业的计算机知识.(从下面的网址可以得到这类软件及本节提到的其他软件包).例如,像图 A-4 的"L"形多边形可通过输入下列命令画出来.

526

```
>> p=polygon([i  -1+i  -1-i  1-i  1  0]);
>> f=hplmap(p);
>> plot(f)
```

软件中有一个绘图界面,拥有功能强大的"多边形编辑"器,用它可以避免多个命令一起输入.除了标准的施瓦茨-克里斯托费尔变换外,SC 工具箱还可用来计算许多著名的变换.例如,从单位圆盘、无限带形区域或矩形映到多边形的映射;或者从单位圆盘映到多边形外部的映射.图 A-7 给出了一些这类变换和应用的例子.

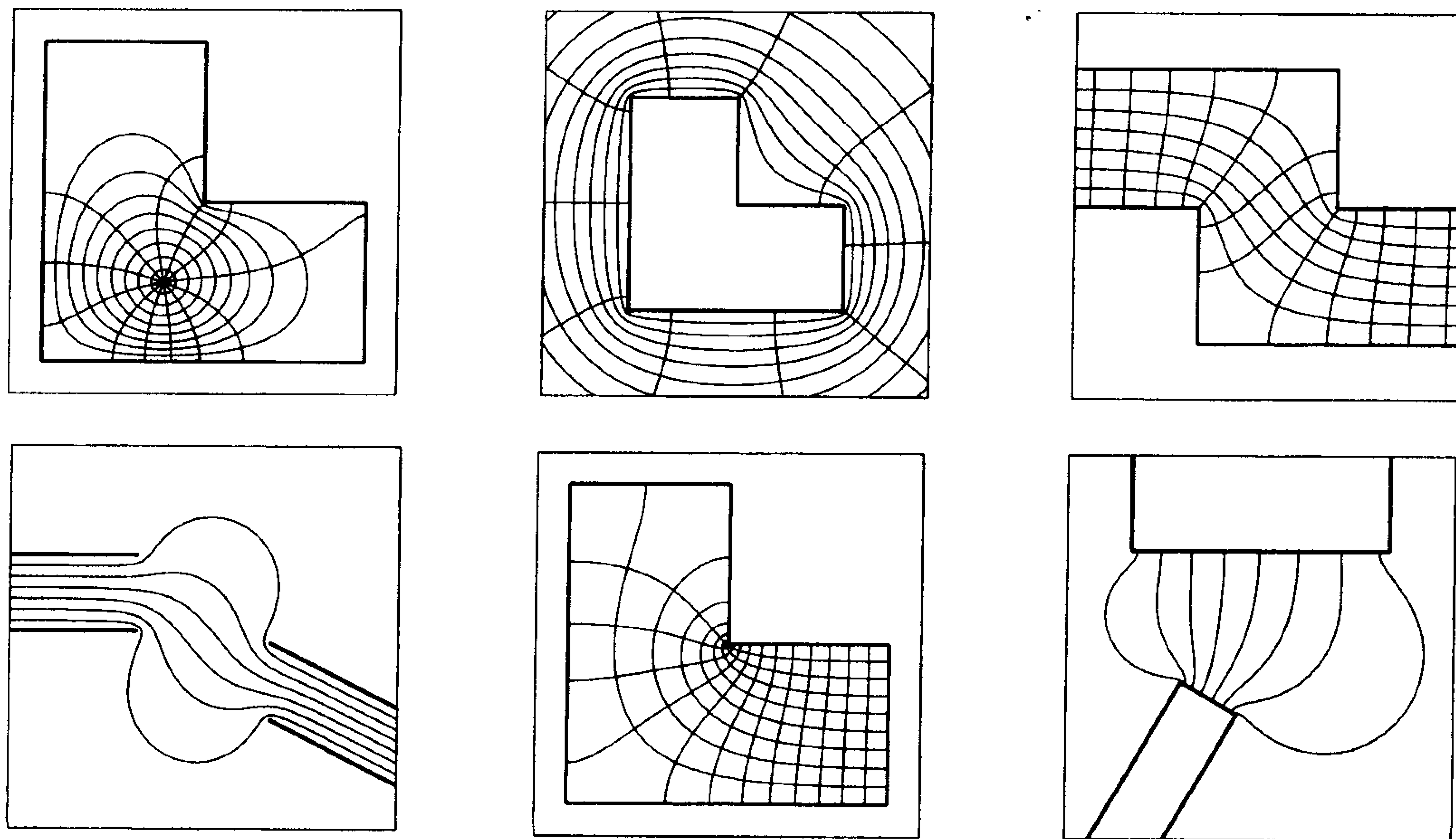


图 A-7 利用 MATLAB 的 SC 工具箱计算出的施瓦茨-克里斯托费尔变换的例子.图中的网络是正交圆和半径或者垂直线和水平线的像

另外，还有以 Fortran 语言或 C 语言为资源库的软件包．不过，这需要用户稍微编写些程序和进行编译．其中之一是 DSCPACK，它可用来计算施瓦茨-克里斯托费尔变换．它用于双连通的多边形区域，即有一个洞的多边形(见 4.4 节)．图 A-8 给出了利用 DSCPACK 中的数据计算的两个这类图形．注意黎曼映射定理并不能应用到这样的区域上．实际上，每个这类区域都可映射到带有一个洞的圆盘上，洞的大小由原来的图形唯一决定，并且计算洞的大小也是参数问题的一部分．

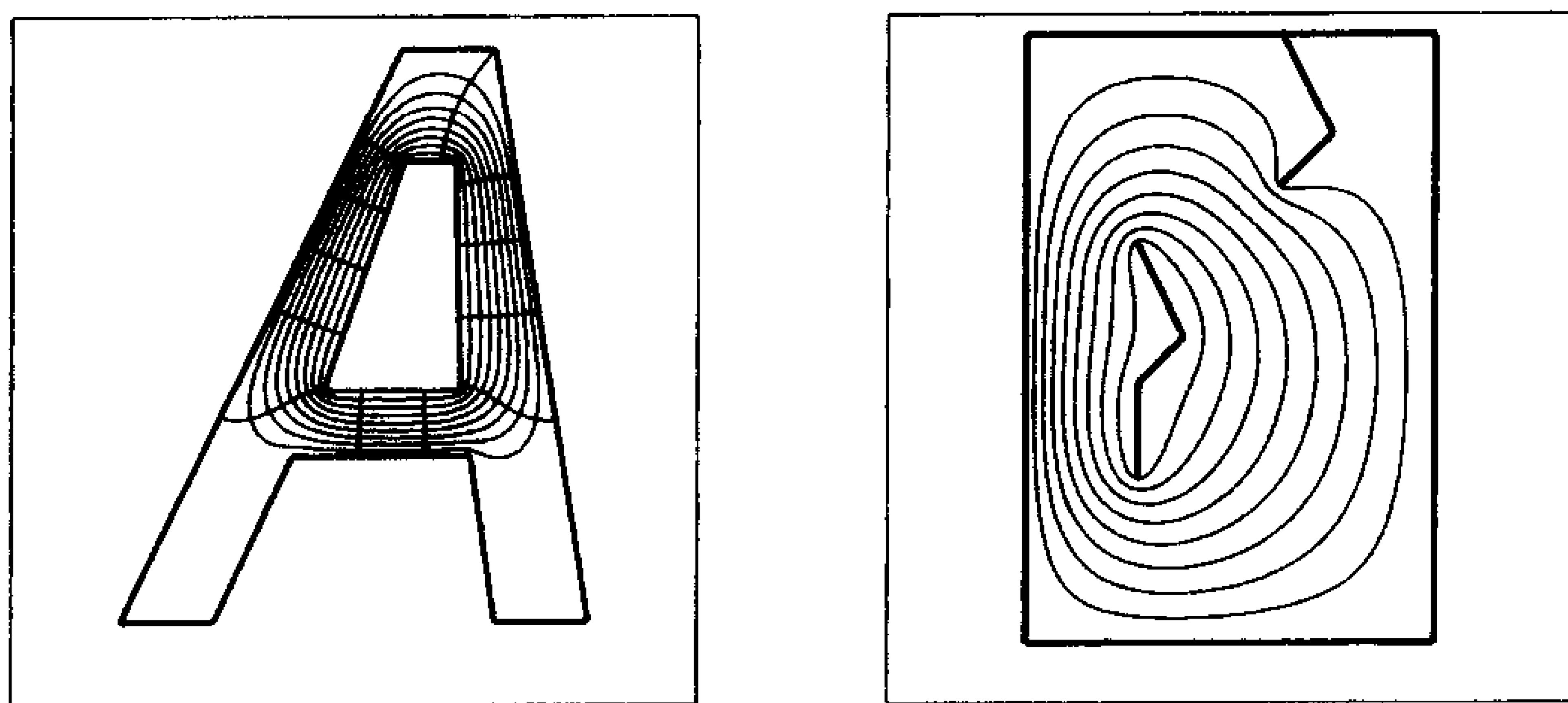


图 A-8　利用 DSCPACK 得到的映到双连通区域上的施瓦茨-克里斯托费尔映射

下面再简单谈谈 CONFPACK 软件包．它提供了一个可供选择的称为 Symm 方程的积分公式，并且可用来计算从单连通区域内部或外部到由一条或多条分段光滑曲线围成的边界的映射．应用 zipper 可以非常快地计算出单连通区域上的映射，而 CirclePack 则可以通过把若干个圆周映射到一个给定的区域来逼近共形映射．这些软件包可从下面的网址获得．

SC 工具箱：www.math.udel.edu/~driscoll/SC

DSCPACK CONFPACK：www.netlib.org/conformal

zipper：www.math.washington.edu/~marshall/zipper.html

CirclePack：www.math.utk.edu/~kens

参考文献

大多数数值分析方面的教科书都描述了我们所讨论的求积分法和非线性系统．其中包括：

数值分析

[1] Atkinson, K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.

[2] Gautschi, W., *Numerical Analysis: An Introduction*, Birkhauser, Boston, 1997.

使用 MATLAB 的许多这样的课本列在 MathWorks 公司的网站 www.mathworks.com 上．其中最好的是

[3] Mathews, J. H. and Fink, K. D. *Numerical Methods Using MATLAB*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 1999.

施瓦茨-克里斯托费尔算法的数值方法最初见于

[4] Trefethen, L. N. "Numerical Computation of the Schwarz-Christoffel Transformation," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 1, 1980, 82–102.

应用于空气动力学的参考文献为

[5] Davis, R. T. "Numerical Methods for Coordinate Generation Based on Schwarz-Christoffel Transformations," *4th AIAA Comp. Fluid Dynamics Conf. Proc.*, 1978.

在共形映射的数值方法方面最具综合性的参考文献是

527 ~ 529

[6] Driscoll, T. A. and Trefethen, L. N. *Schwarz–Christoffel Mapping.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[7] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. III. John Wiley & Sons, New York, 1986.

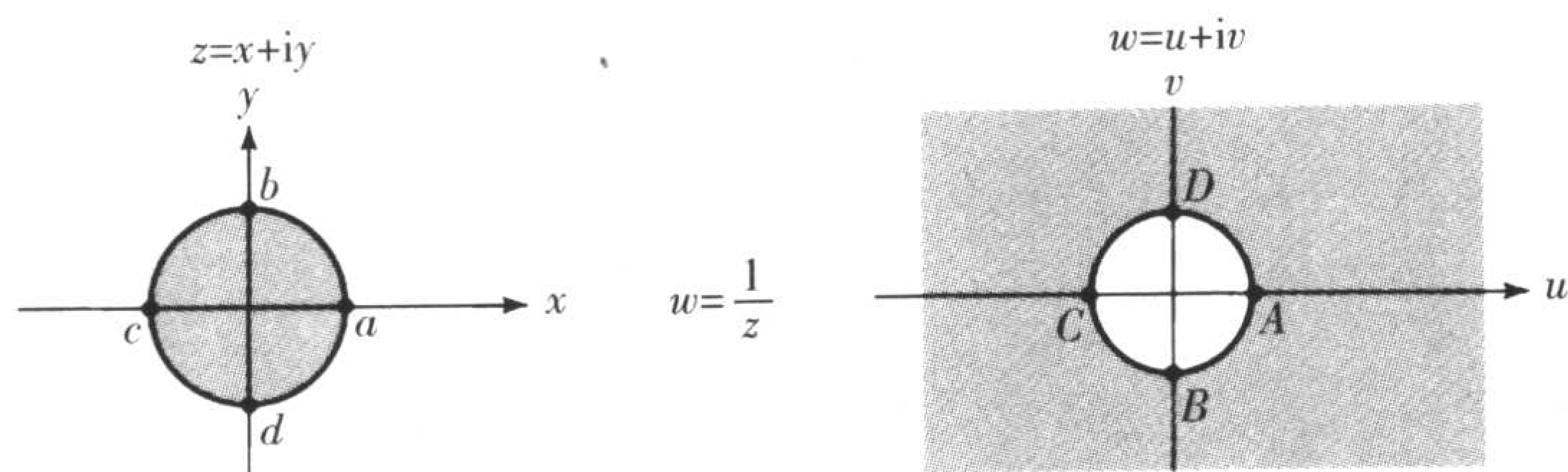
[8] Trefethen, L. N., ed. *Numerical Conformal Mapping.* North–Holland, Amsterdam, 1986.

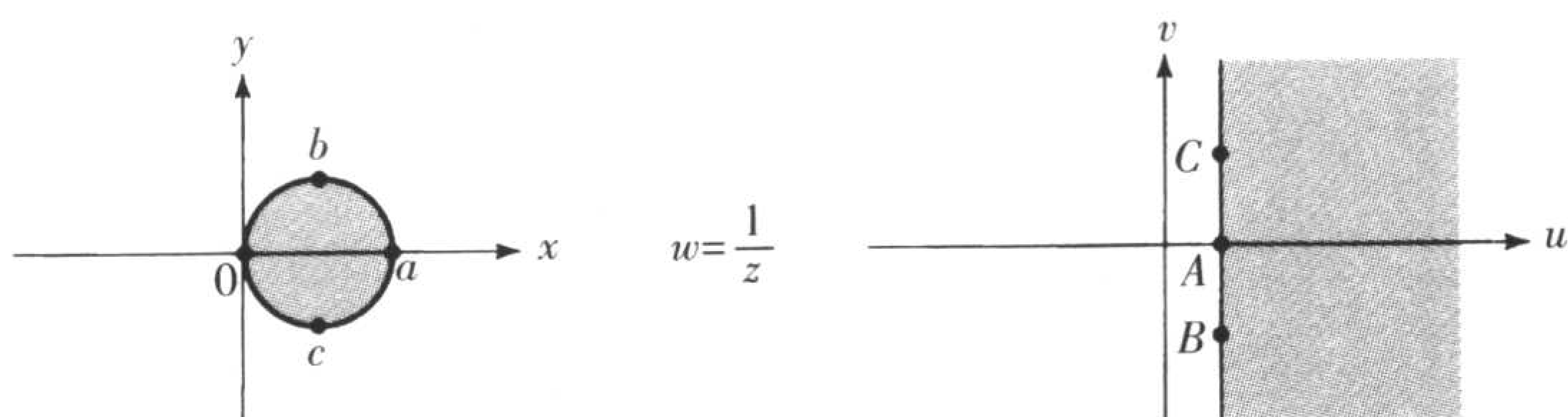
530

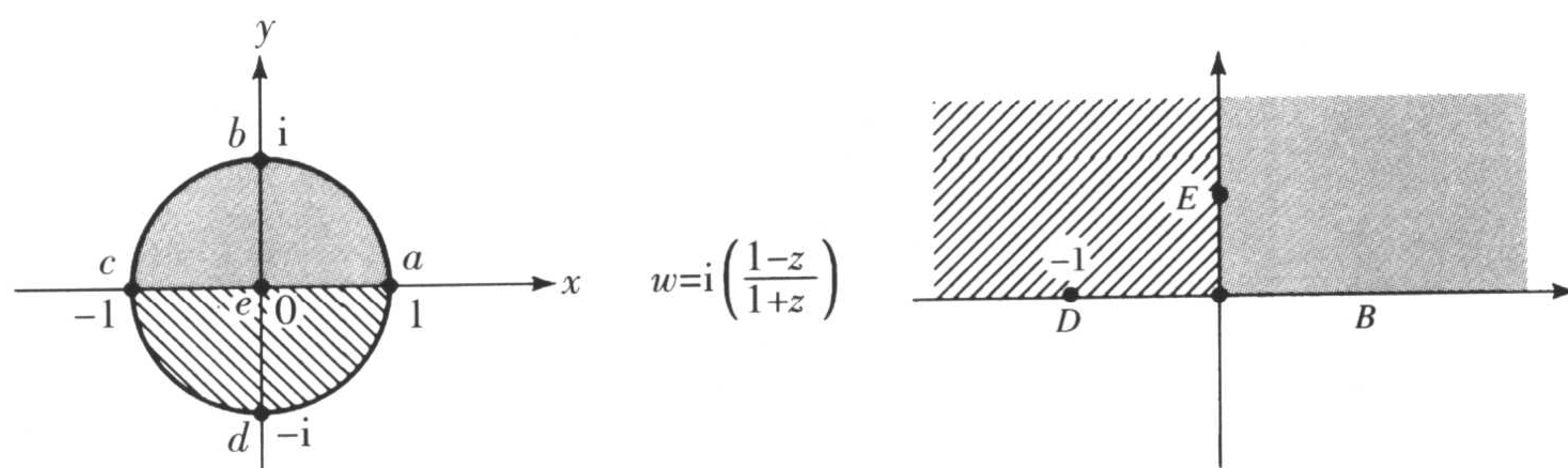
附录 B　共形映射表

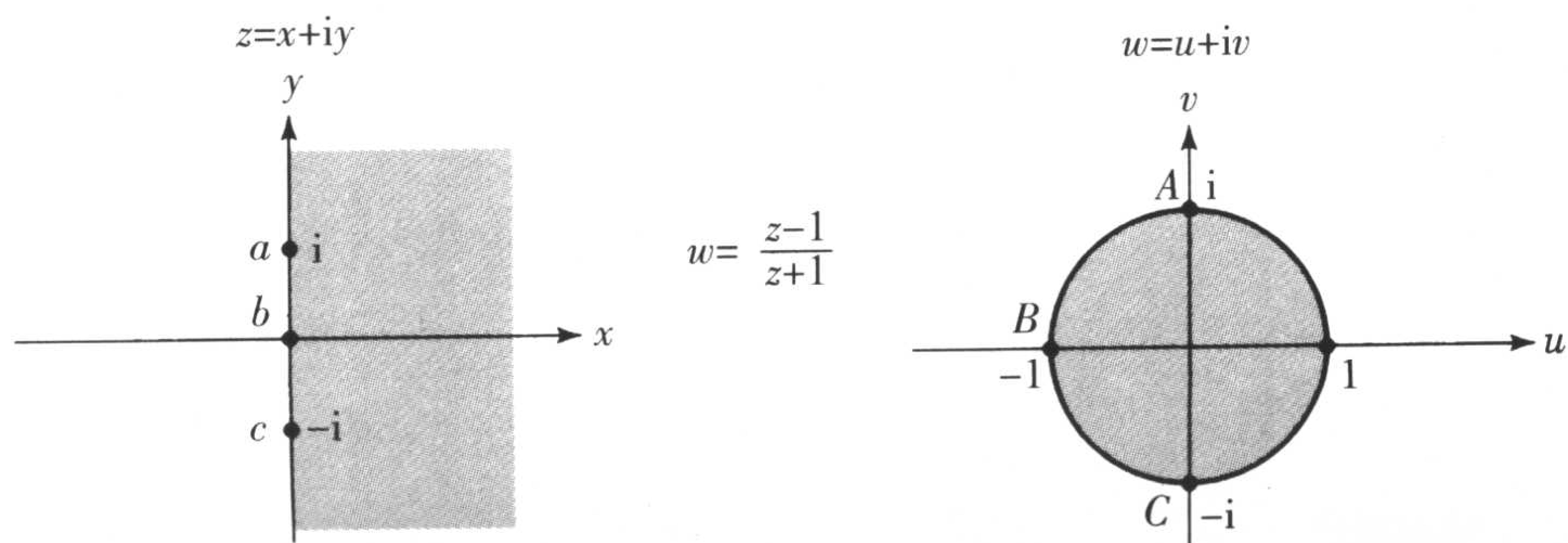
下面列出了常用的共形映射，注意，图中相同的字母表示对应点，如点 a 映到点 A 等．更多的共形映射可在第 7 章末的参考文献[5]中找到．

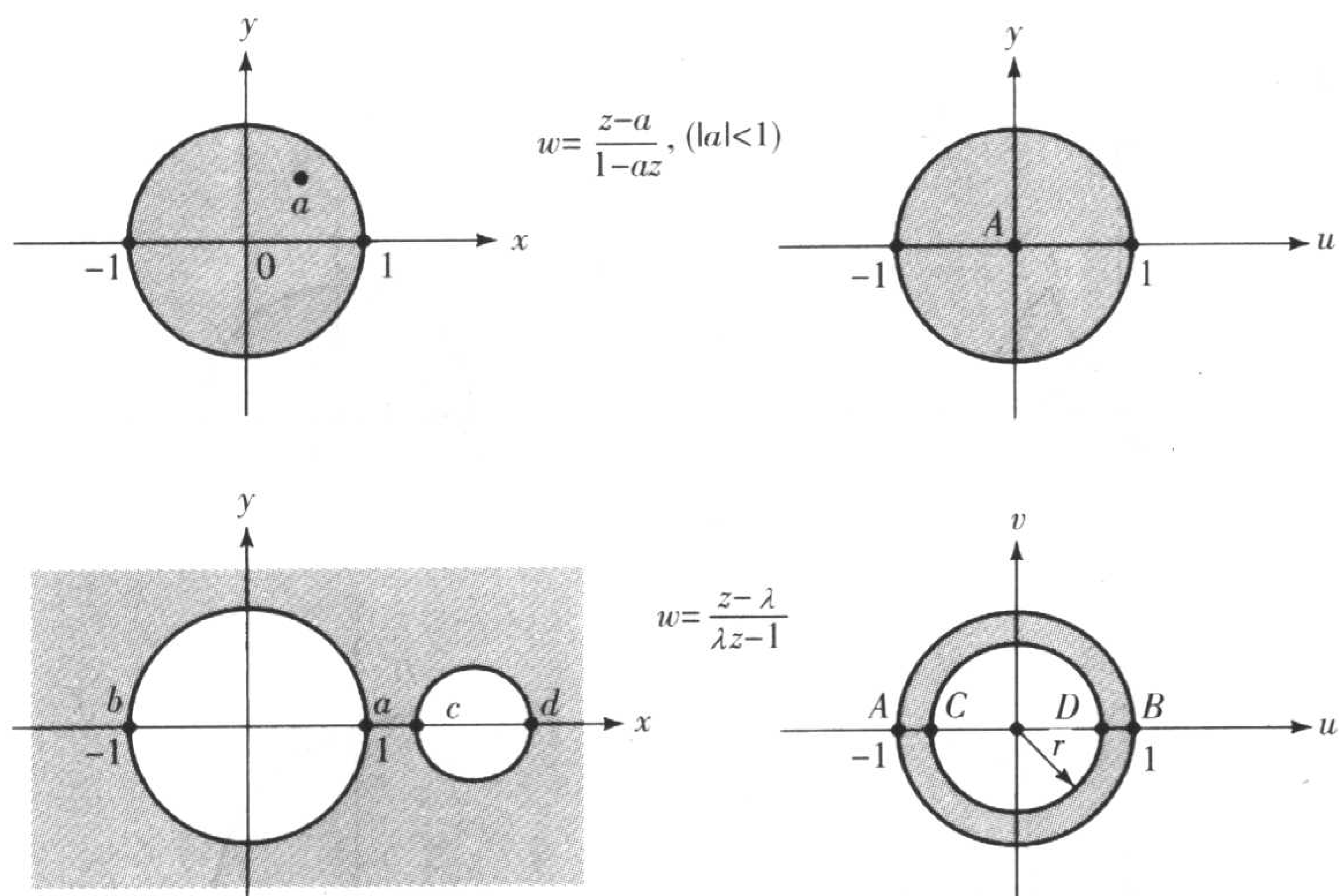
B.1　默比乌斯变换











$$\lambda=\frac{1+cd+\sqrt{(c^2-1)(d^2-1)}}{c+d}\quad(1<c<d)$$

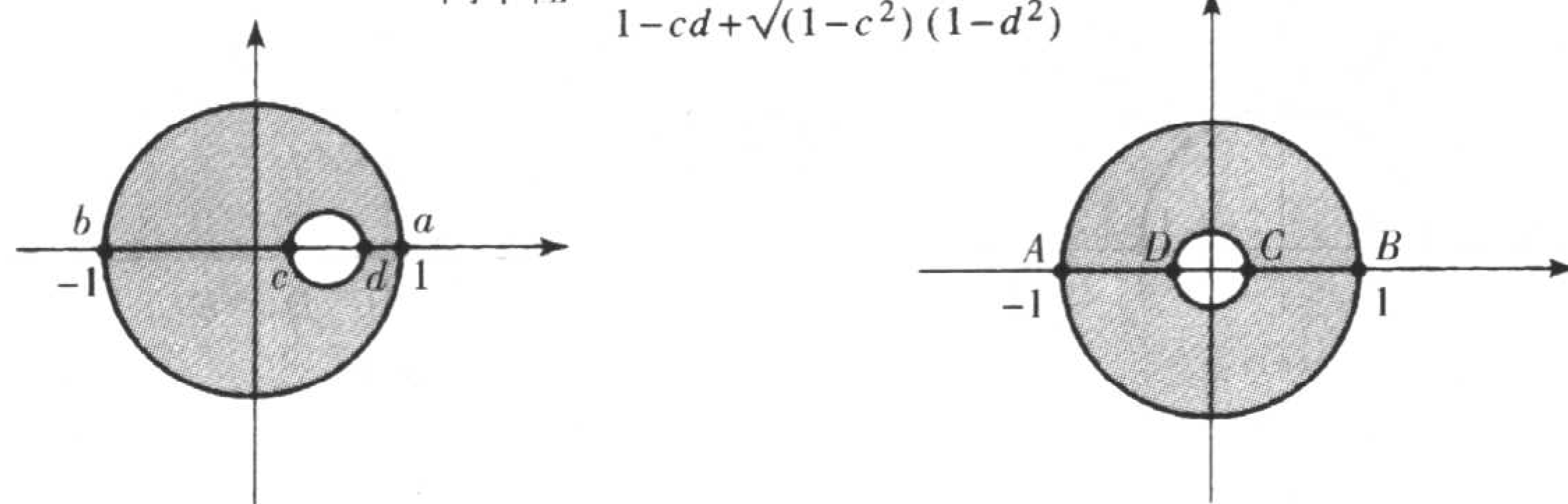
$$r=\frac{cd-1-\sqrt{(c^2-1)(d^2-1)}}{d-c}\quad(0<r<1)$$

532

$$w=\frac{z-\lambda}{\lambda z-1}$$

$$\lambda=\frac{c+d}{1+cd+\sqrt{(1-c^2)(1-d^2)}}$$

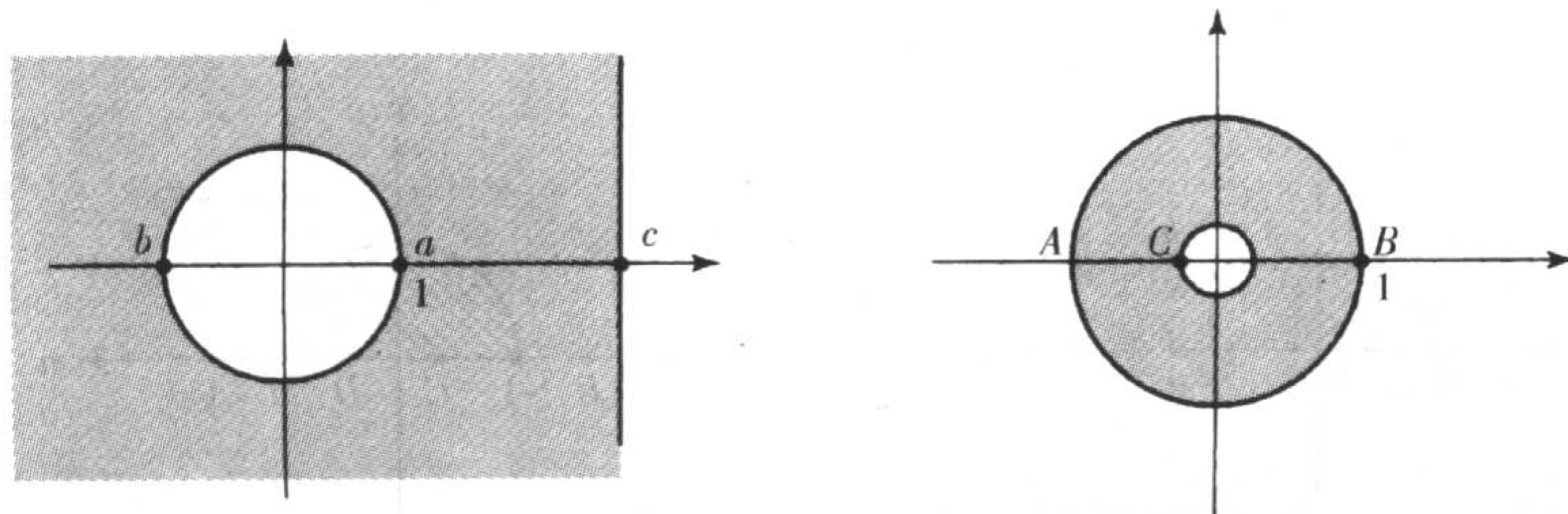
$$\text{内半径}=\frac{d-c}{1-cd+\sqrt{(1-c^2)(1-d^2)}}$$



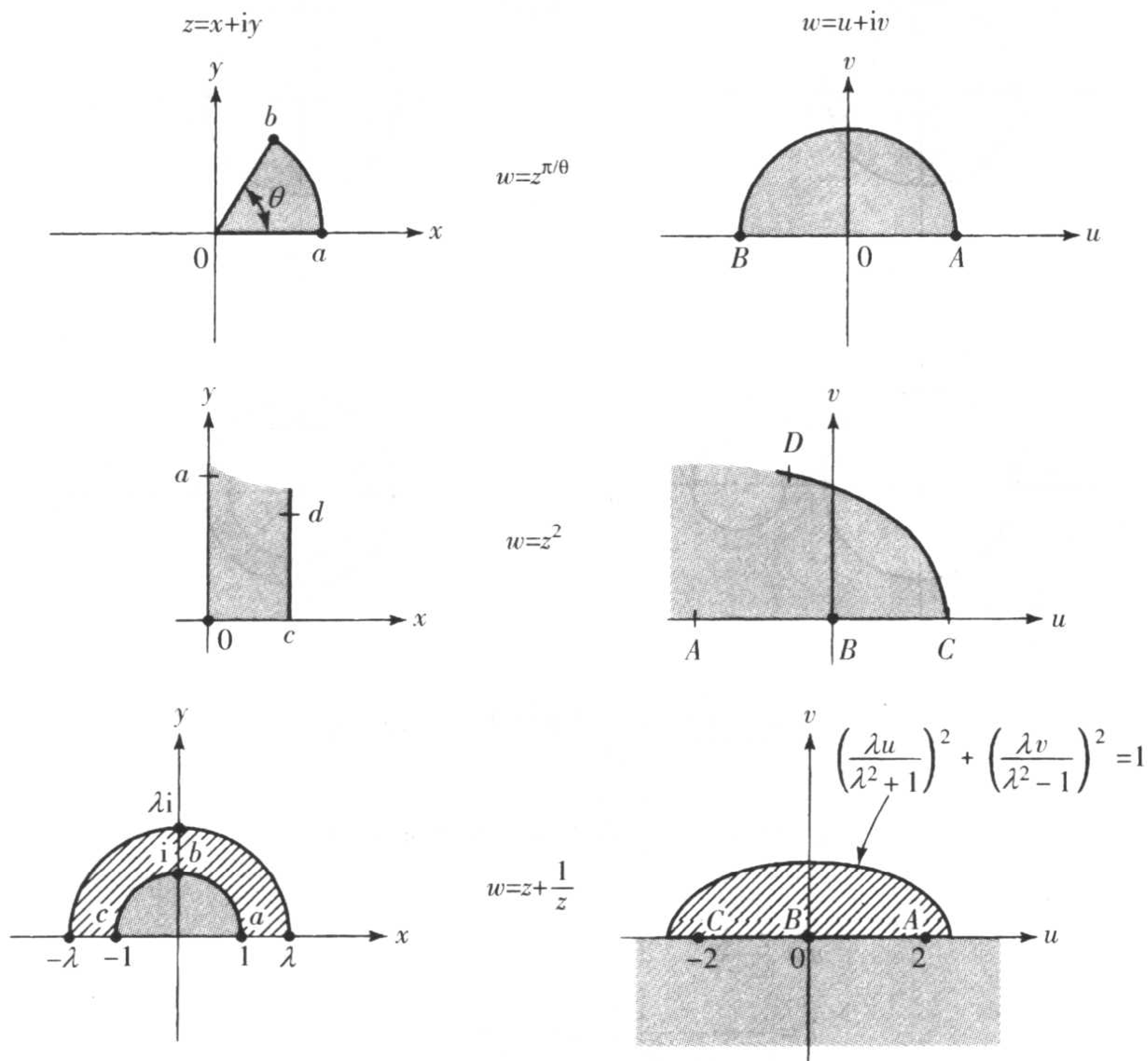
$$w=\frac{z-\lambda}{\lambda z-1}$$

$$\lambda=c+\sqrt{c^2-1}$$

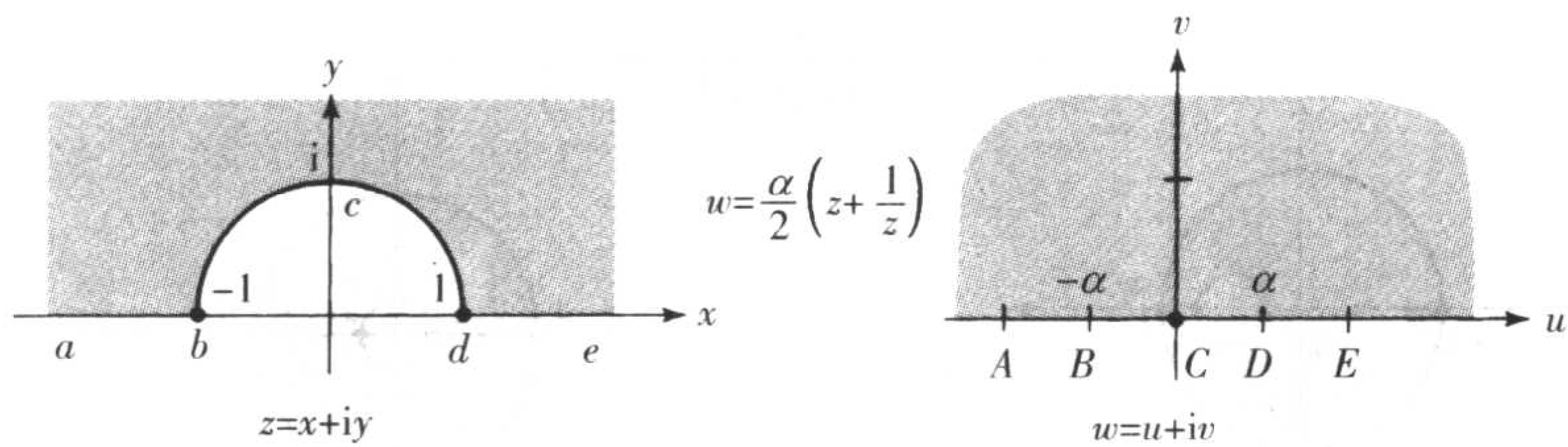
$$\text{内半径}=c-\sqrt{c^2-1}$$

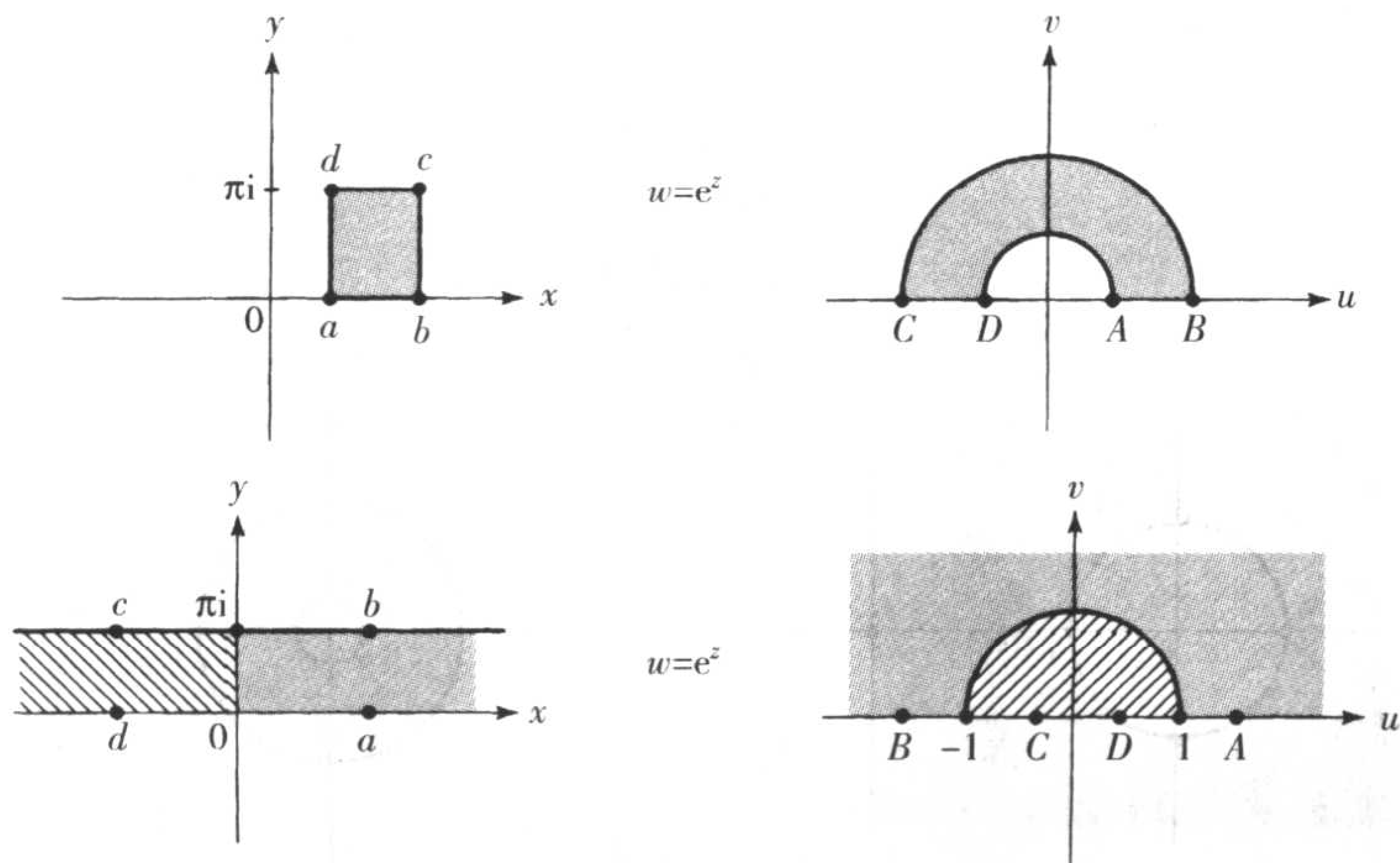


B.2 其他变换

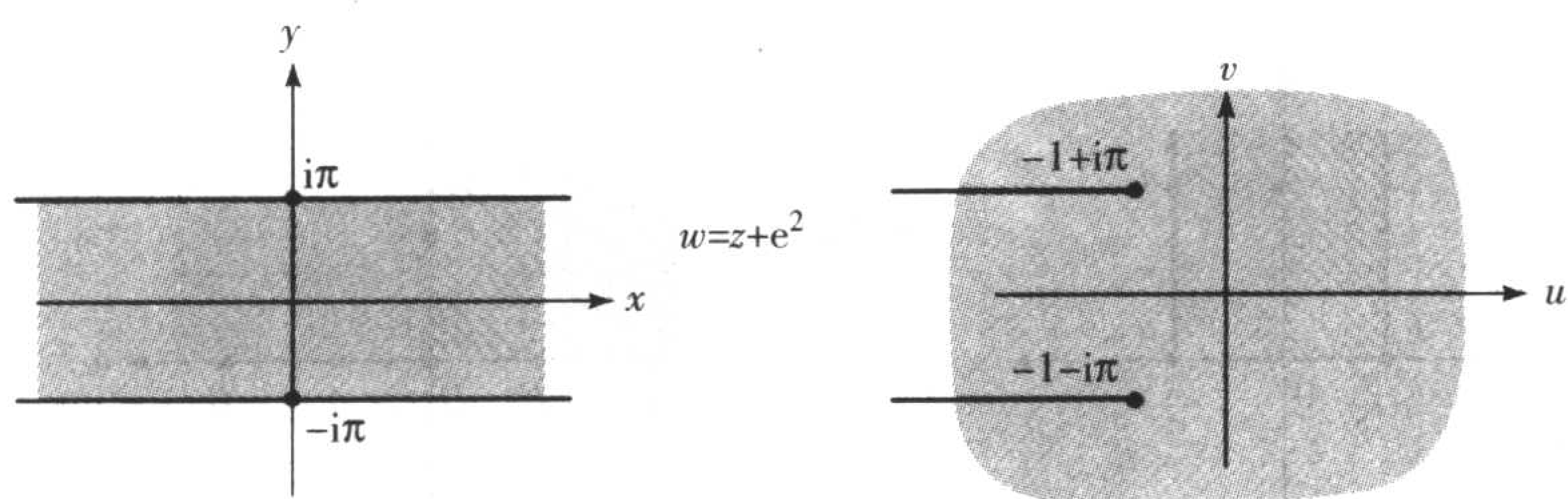


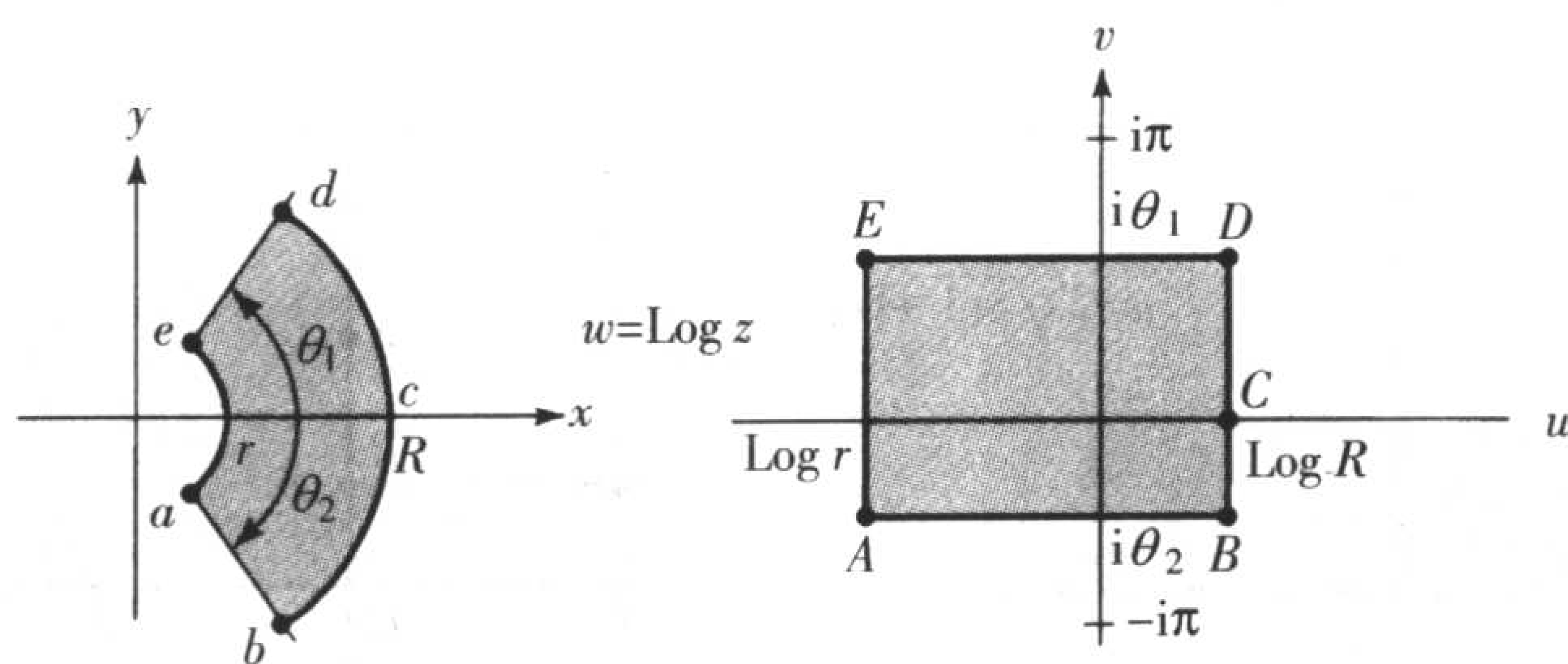
533

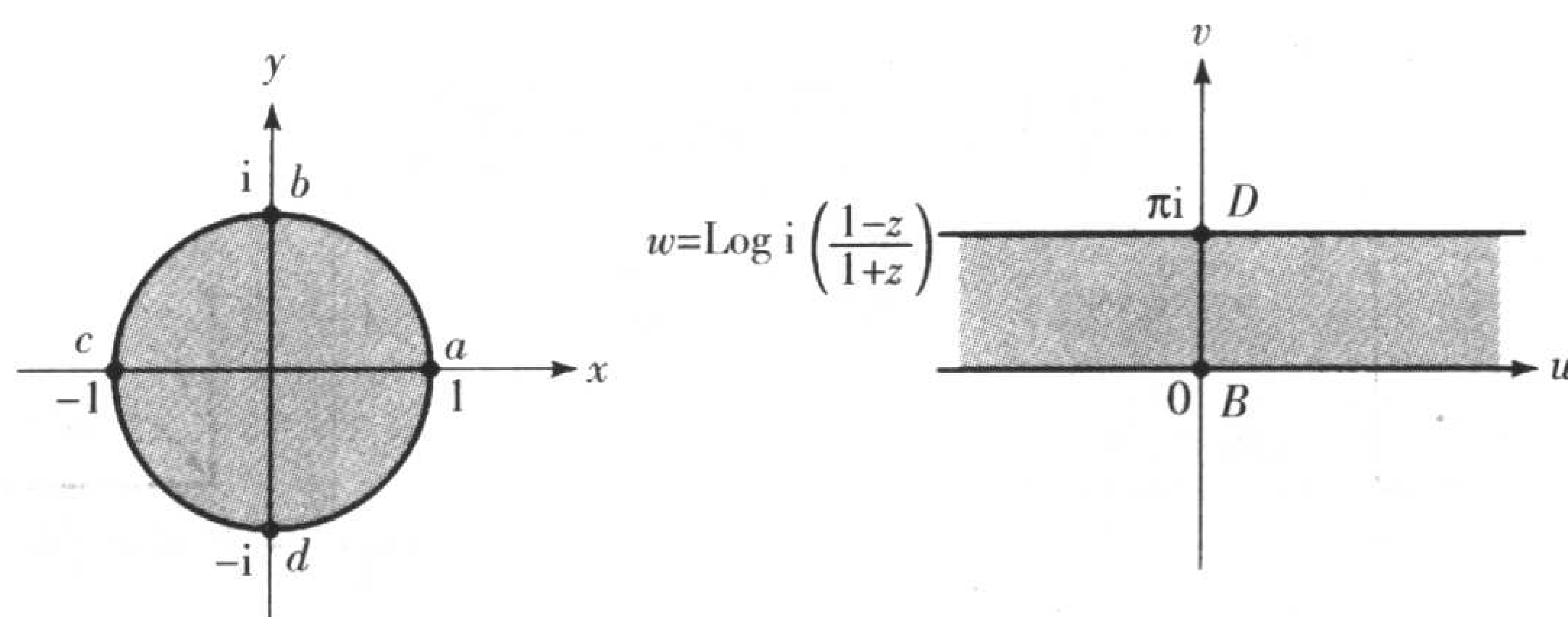


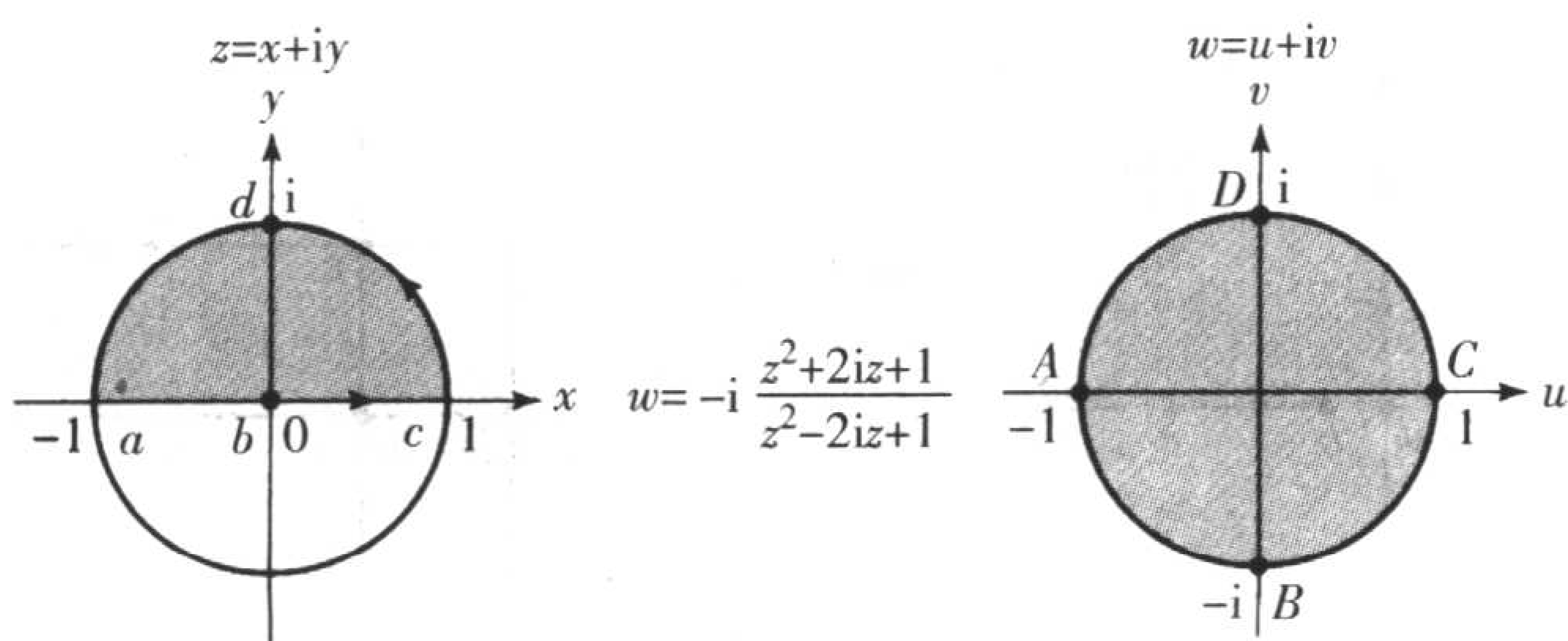


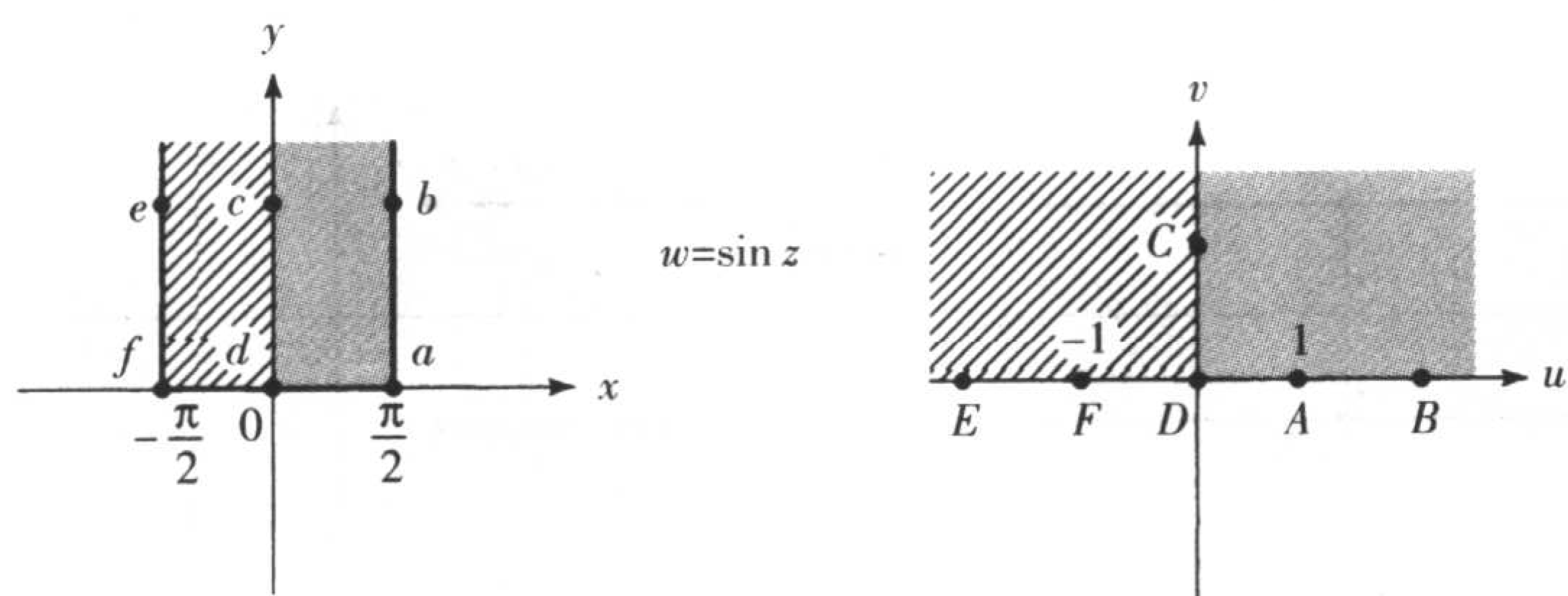
534


y
iπ
−iπ
x
w=z+e^z
v
−1+iπ
−1−iπ
u

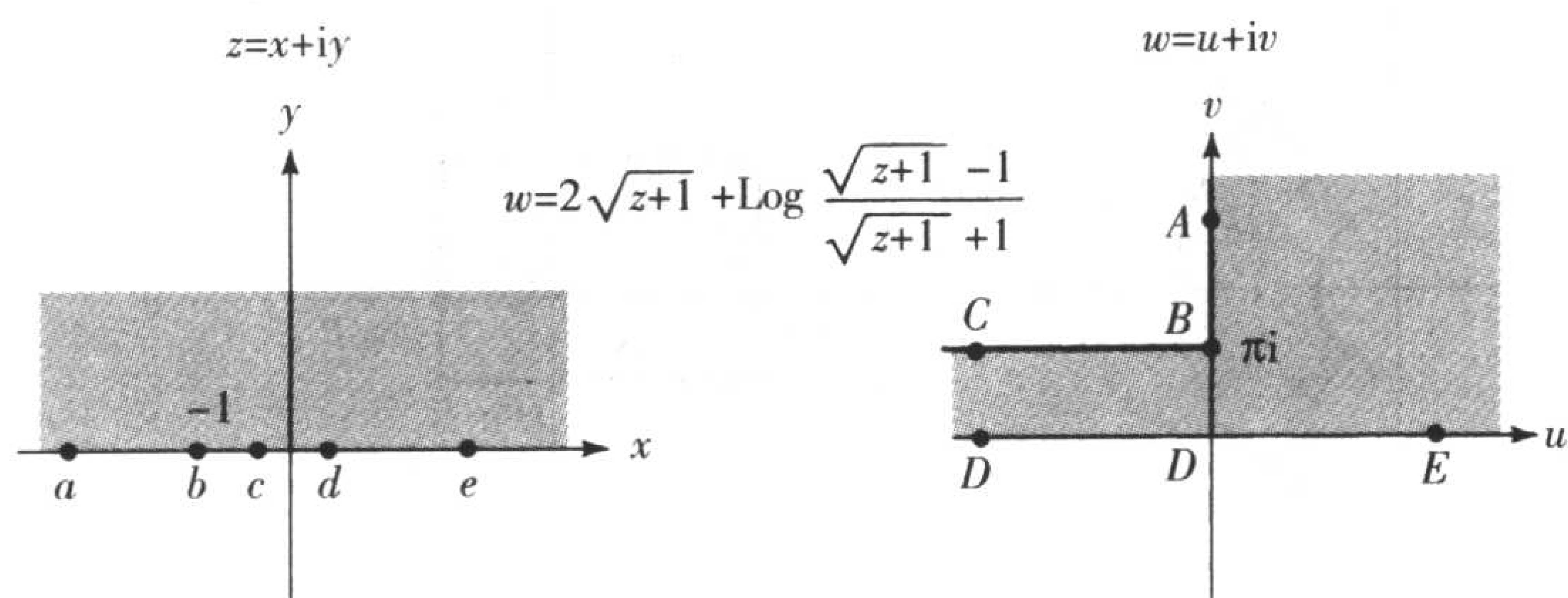

y
d
e
θ1
c
r
R
θ2
a
b
x
w=Log z
v
iπ
iθ1
E
D
C
Log r
Log R
A
iθ2
B
−iπ
u


y
i
b
c
a
−1
1
−i
d
x
w=Log i ((1−z)/(1+z))
v
πi
D
0
B
u

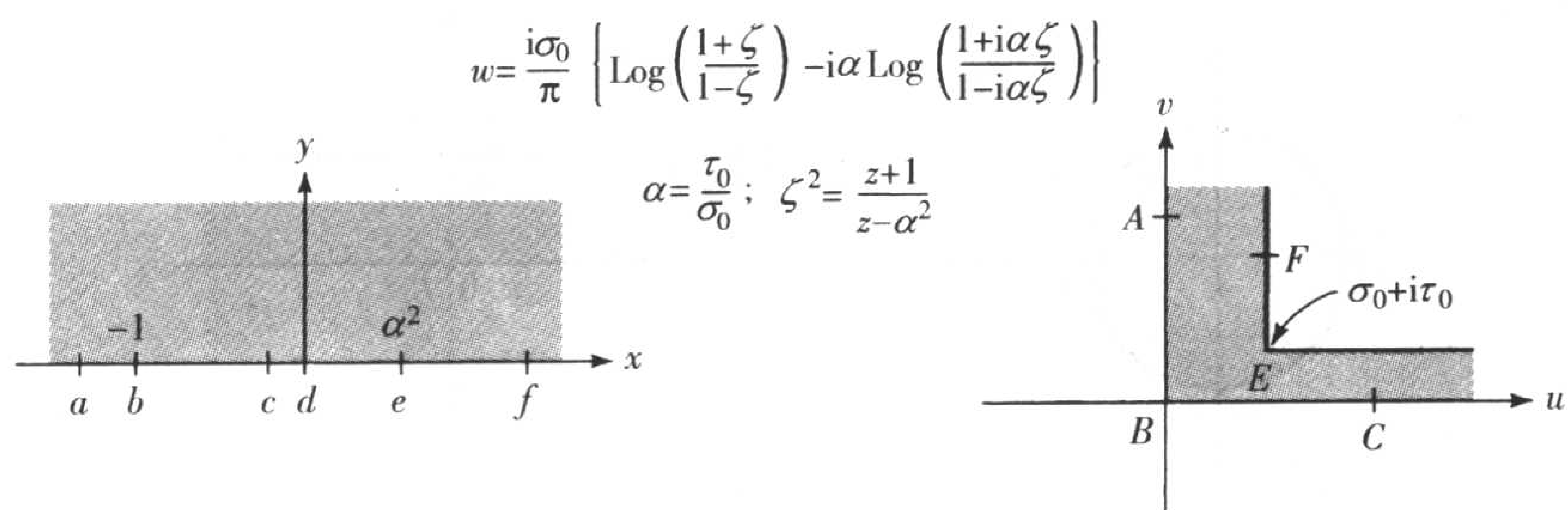

z=x+iy
y
d
i
−1
a
b
0
c
1
x
w=−i (z²+2iz+1)/(z²−2iz+1)
w=u+iv
v
D
i
A
C
−1
1
u
−i
B



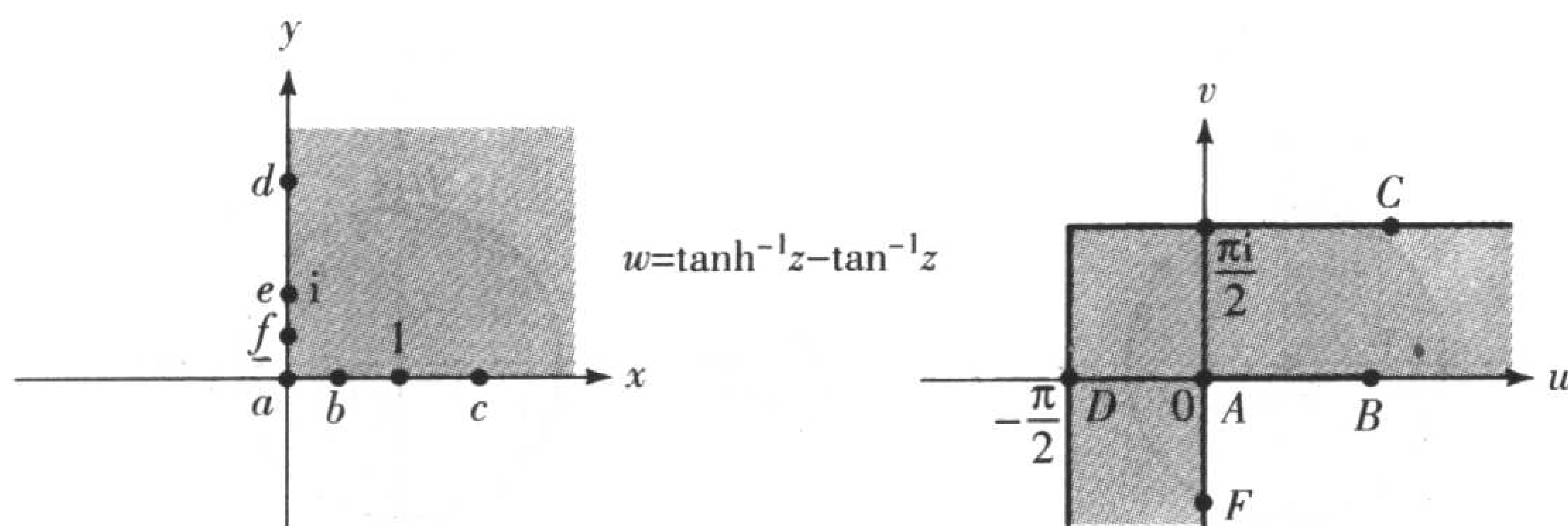
y
e
c
b
f
d
a
x
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
$w=\sin z$
v
C
−1
1
u
E
F
D
A
B



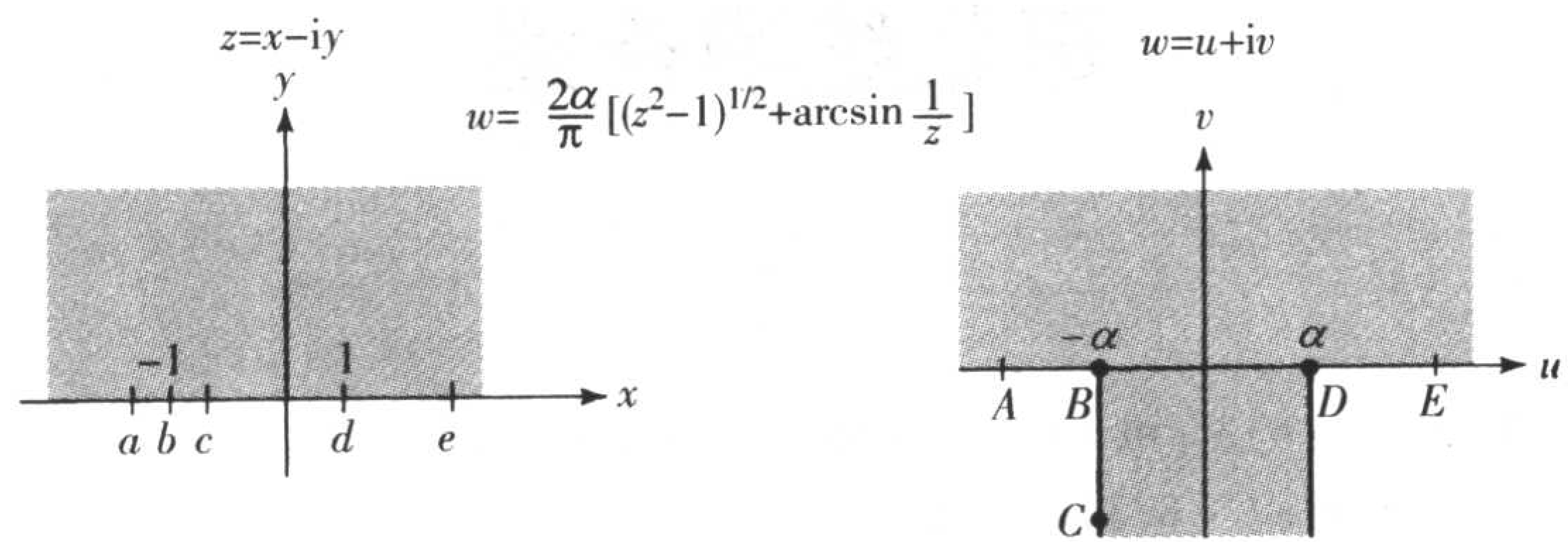
$z=x+iy$
$w=u+iv$
y
−1
x
a
b
c
d
e
$w=2\sqrt{z+1}+\text{Log}\,\frac{\sqrt{z+1}-1}{\sqrt{z+1}+1}$
v
A
C
B
πi
u
D
D
E



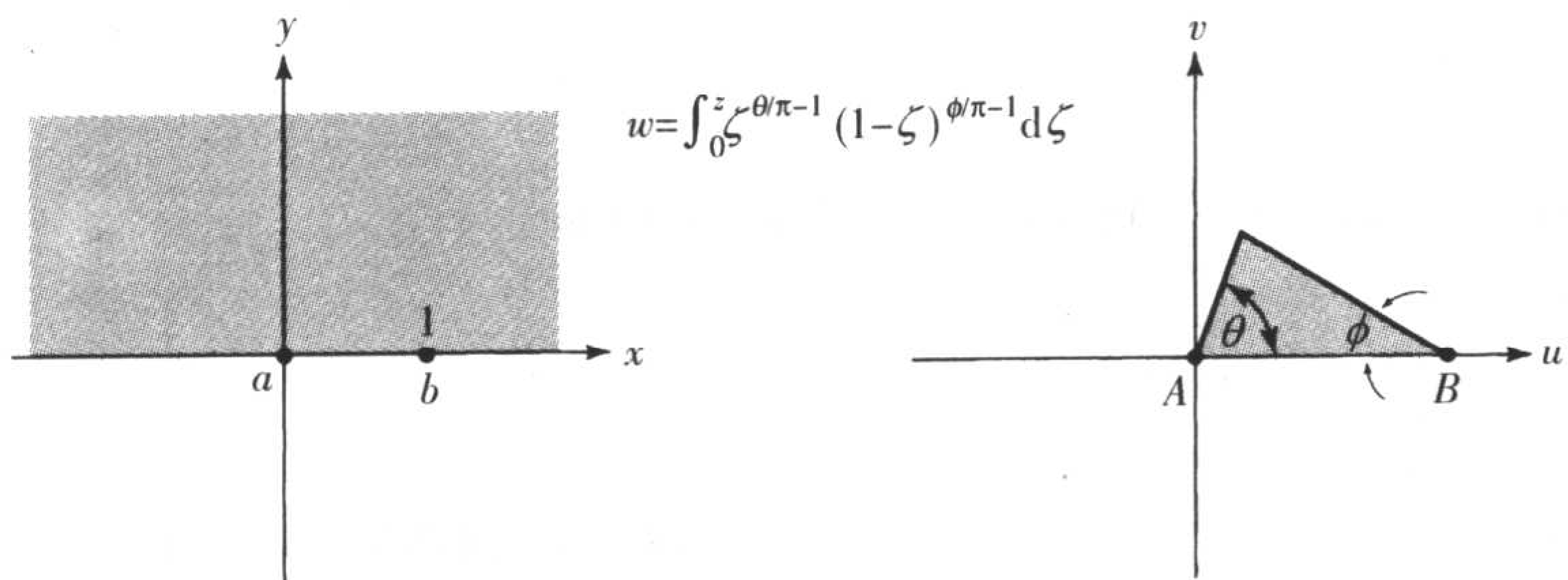
$w=\frac{i\sigma_0}{\pi}\left\{\text{Log}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)-i\alpha\,\text{Log}\left(\frac{1+i\alpha\zeta}{1-i\alpha\zeta}\right)\right\}$
$\alpha=\frac{\tau_0}{\sigma_0}$; $\zeta^2=\frac{z+1}{z-\alpha^2}$
y
−1
α^2
x
a
b
c
d
e
f
v
A
F
$\sigma_0+i\tau_0$
E
u
B
C



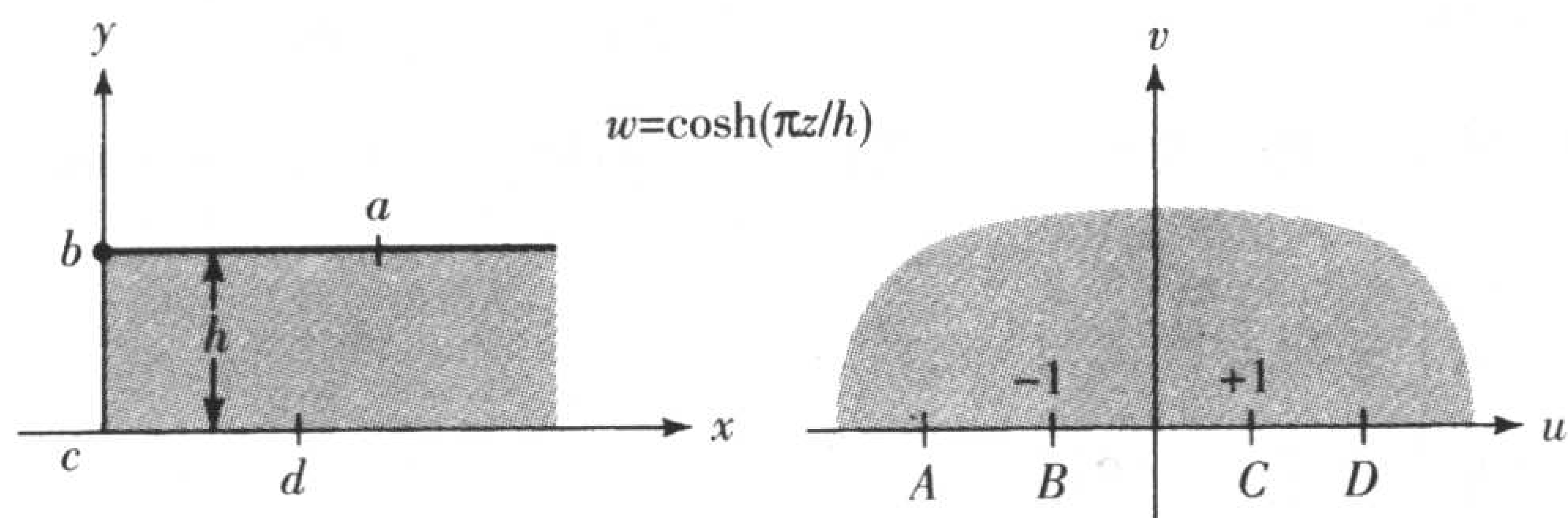
y
d
e
i
f
1
x
a
b
c
$w=\tanh^{-1}z-\tan^{-1}z$
v
C
$\frac{\pi i}{2}$
u
$-\frac{\pi}{2}$
D
0
A
B
F



z=x−iy
w=u+iv
$w=\frac{2\alpha}{\pi}[(z^2-1)^{1/2}+\arcsin\frac{1}{z}]$
y
x
−1
1
a b c d e
v
u
−α
α
A B D E
C



$w=\int_0^z\zeta^{\theta/\pi-1}(1-\zeta)^{\phi/\pi-1}d\zeta$
y
x
1
a
b
v
u
θ
ϕ
A
B



$w=\cosh(\pi z/h)$
y
x
a
b
h
c
d
v
u
−1
+1
A B C D

537

奇数练习答案

第 1 章

练习 1.1，4 页[⊖]

5. (a) $0+(-3/2)\mathrm{i}=-3\mathrm{i}/2$ (b) $3+0\mathrm{i}=3$ (c) $0+(-2)\mathrm{i}=-2\mathrm{i}$

7. (a) $8+\mathrm{i}$ (b) $1+\mathrm{i}$ (c) $0+(-8/3)\mathrm{i}=-8\mathrm{i}/3$

9. $\frac{61}{185}-\frac{107}{185}\mathrm{i}$

11. $2+0\mathrm{i}=2$

13. $6+5\mathrm{i}$

17. $8-10\mathrm{i}$

19. $a^3-3ab^2+5a^2-5b^2=a$，$3a^2b-b^3+10ab=b+3$，其中 $z=a+bi$

21. $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=-\mathrm{i}$

练习 1.2，12 页

3. -3

7. (a) 水平直线 $y=-2$
   (b) 圆，圆心为 $1-\mathrm{i}$，半径为 3
   (c) 圆，圆心为 $\mathrm{i}/2$，半径为 2
   (d) 连接 $z=1$ 与 $z=-\mathrm{i}$ 的线段的垂直平分线
   (e) 顶点为 -1 焦点为 0 的抛物线 $y^2=4(x+1)$
   (f) 焦点在 ±1 的椭圆
   (g) 圆，圆心为$\frac{9}{8}$，半径为$\frac{3}{8}$
   (h) 半平面 $x\geqslant4$
   (i) 圆心为 i，半径为 2 的圆内部的所有点(开圆盘)
   (j) 圆 $|z|=6$ 外的所有点

539

练习 1.3，22 页

3. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

5. (a) 1 (b) $5\sqrt{26}$ (c) $5\sqrt{5}/2$ (d) 1

7. (a) 辐角为 $\pi+2k\pi$ 极形式为 $\frac{1}{2}\mathrm{cis}(\pi)$
   (b) 辐角为 $3\pi/4+2k\pi$ 极形式为 $3\sqrt{2}\mathrm{cis}(3\pi/4)$
   (c) 辐角为 $-\pi/2+2k\pi$ 极形式为 $\pi\mathrm{cis}(-\pi/2)$
   (d) 辐角为 $7\pi/6+2k\pi$ 极形式为 $4\mathrm{cis}(7\pi/6)$
   (e) 辐角为 $7\pi/12+2k\pi$ 极形式为 $2\sqrt{2}\mathrm{cis}(7\pi/12)$
   (f) 辐角为 $5\pi/3+2k\pi$ 极形式为 $4\mathrm{cis}(5\pi/3)$
   (g) 辐角为 $5\pi/12+2k\pi$ 极形式为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{cis}(5\pi/12)$
   (h) 辐角为 $13\pi/12+2k\pi$ 极形式为 $\frac{\sqrt{14}}{2}\mathrm{cis}(13\pi/12)$

9. 向量 z 绕原点逆时针旋转角度 ϕ

13. (b)，(d)

⊖ 这是指英文原书页码，与书中页边标注的页码一致. ——编辑注

21. $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$，其中 θ 由下面的两个方程决定：

$$\cos\theta=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)/r,\sin\theta=(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)/r$$

23. 位于单位圆内或圆周上的三个质点的质心也位于圆的内部或圆周上

29. $l=0.0732\text{m}$，$dl/dt=-0.1155\text{m/sec}$

练习 1.4，31 页

1. (**a**) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$　(**b**) $e^2 i$　(**c**) $e^{\cos 1}\cos(\sin 1)+ie^{\cos 1}\sin(\sin 1)$

3. (**a**) $\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\pi/4}$　(**b**) $16\pi e^{i4\pi/3}$　(**c**) $8e^{i3\pi/2}$

11. (a)，(c)，(d)

17. (**a**) 圆周 $|z|=3$，逆时针　(**b**) 圆周 $|z-i|=2$，逆时针
(**c**) 圆周 $|z|=2$ 的上半部分，逆时针　(**d**) 圆周 $|z-(2-i)|=3$，顺时针

21. $\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|=|1+z+\cdots+z^{n-1}|\leqslant 1+1+\cdots+1=n$，其中 $z=e^{i\theta}\neq 1$

23. (**a**) $\frac{35\pi}{64}$　(**b**) $\frac{5\pi}{8}$

540

练习 1.5，37 页

5. (**a**) $2(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$，$2(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)$，$2(\cos 5\pi/4+i\sin 5\pi/4)$，$2(\cos 7\pi/4+i\sin 7\pi/4)$

(**b**) 1，$\cos 2\pi/5+i\sin 2\pi/5$，$\cos 4\pi/5+i\sin 4\pi/5$，$\cos 6\pi/5+i\sin 6\pi/5$，$\cos 8\pi/5+i\sin 8\pi/5$

(**c**) $\cos\pi/8+i\sin\pi/8$，$\cos 5\pi/8+i\sin 5\pi/8$，$\cos 9\pi/8+i\sin 9\pi/8$，$\cos 13\pi/8+i\sin 13\pi/8$

(**d**) $\sqrt[3]{2}[\cos(-\pi/9)+i\sin(-\pi/9)]$，$\sqrt[3]{2}(\cos 5\pi/9+i\sin 5\pi/9)$，$\sqrt[3]{2}(\cos 11\pi/9+i\sin 11\pi/9)$

(**e**) $\sqrt[4]{2}(\cos 3\pi/8+i\sin 3\pi/8)$，$\sqrt[4]{2}(\cos 11\pi/8+i\sin 11\pi/8)$

(**f**) $\sqrt[12]{12}\exp[i\pi(1+8k)/24]$，$k=0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. (**a**) $-\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{23}}{4}$　(**b**) $2-i$，$1-i$　(**c**) $1\pm\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}$

9. 1，$1+i\sqrt{3}$，$1-i\sqrt{3}$

11. $z=1/(\omega-1)$，$\omega=e^{i2k\pi/5}$，$k=1, 2, 3, 4$

15. $\sqrt[4]{8}(\cos 5\pi/8+i\sin 5\pi/8)$，$\sqrt[4]{8}(\cos 13\pi/8+i\sin 13\pi/8)$

19. (**b**) $\frac{\pm\sqrt{2}+2i}{3}$

21. (**a**) $\pm(3+i)$　(**b**) $\pm(3+2i)$　(**c**) $\pm(5+i)$
(**d**) $\pm(2-i)$　(**e**) $\pm(1+3i)$　(**f**) $\pm(3-i)$

练习 1.6，42 页

3. (b)，(c)，(f)

5. (a)，(c)

7. (a), (b), (c), (d), (e)

11. S 中的所有点和 0

17. 不是，$S\cap T$ 可能是不连通的

19. D 不连通

21. $\ln(x^2+y^2)+C$

541

23. (a)和(d)

练习 1.7，50 页

1. (a) $(0, 1, 0)$ (b) $\left(\frac{12}{101}, \frac{-16}{101}, \frac{99}{101}\right)$ (c) $\left(\frac{-12}{25}, \frac{16}{25}, \frac{-3}{5}\right)$

5. (a)半球面 $x_1>0$ (b)碗 $x_3<-\frac{3}{5}$ (c)带 $0<x_3<\frac{3}{5}$

(d)圆屋顶 $x_3>0.8$ (e)大圆 $x_1=x_2$，$-1\leqslant x_3\leqslant 1$(45 度和 225 度经线)

第 2 章

练习 2.1，56 页

1. (a) $3x^2-3y^2+5x+1+i(6xy+5y+1)$

(b) $x/(x^2+y^2)-iy/(x^2+y^2)$

(c) $x/[x^2+(y-1)^2]+i(1-y)/[x^2+(y-1)^2]$

(d) $(2x^2-2y^2+3)/\sqrt{(x-1)^2+y^2}+i4xy/\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

(e) $e^{3x}\cos 3y+ie^{3x}\sin 3y$ (f) $2\cos y\cosh x+i2\sin y\sinh x$

3. (a)半平面 $\mathrm{Re}\,\omega>5$ (b)上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega\geqslant 0$ (c) $|\omega|\geqslant 1$ (d)扇形 $|\omega|<2$，$-\pi<\mathrm{Arg}\omega<\pi/2$

5. (a)定义域为 $\mathbf{C}$，值域为 $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ (c)圆周 $|\omega|=e$

(d)射线(半直线) $\mathrm{Arg}\omega=\pi/4$ (e)无限扇形 $0\leqslant\mathrm{Arg}\omega\leqslant\pi/4$

练习 2.2，63 页

1. 在 0 的左右两侧交替且逐渐趋向 0

7. (a)收敛于 0 (b)不收敛 (c)收敛于 π (d)收敛于 $2+i$ (e)收敛于 0 (f)不收敛

11. (a) $-8i$ (b) $-7i/2$ (c) $6i$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $2z_0$ (f) $4\sqrt{2}$

13. 除 $z=-1$ 外极限都存在；除 $z=-1$ 和 $z=0$ 外连续；$z=0$ 是可去间断点

17. 不存在

19. $-\frac{1}{2}-i$

542

21. (a) 1 (b) 0 (c) $-\frac{\pi}{2}+i$ (d) 1

练习 2.3，70 页

7. (a) $18z^2+16z+i$ (b) $-12z(z^2-3i)^{-7}$ (c) $\frac{(iz^3+2z+\pi)2z-(z^2-9)(3iz^2+2)}{(iz^3+2z+\pi)^2}$

(d) $(z+2)^2[-5z^2+(-16-i)z+3-8i]/(z^2+iz+1)^5$

(e) $24i(z^3-1)^3(z^2+iz)^{99}(53z^4+28iz^3-50z-25i)$

9. (a) $2-3i$ (b) $\pm i$ (c) $\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{15})$ (d) $\frac{1}{2}$, 1

11. (a)处处不解析 (b)处处不解析 (c)除 $z=5$ 外解析
(d)处处解析 (e)处处不解析 (f)除 $z=0$ 外解析
(g)处处不解析 (h)处处不解析

13. (a)(b)(d)(f)(g)

15. $\frac{3}{5}$

练习 2.4，77 页

3. $g(z)=3z^2+2z-1$

5. $f'(z)=2e^{x^2-y^2}(x+iy)[\cos(2xy)+i\sin(2xy)]$

7. 提示：如果在 D 内有 $f'=g'$，考虑 $h:=f-g$.

9. 如果 F 解析，则 $\mathrm{Im}\,F(z)\equiv 0$ 蕴涵 $F(z)$ 是常数，矛盾．

11. 提示：考虑 $f(z)+\overline{f(z)}$.

13. 提示：由条件(8)知，$|f(z)|\equiv$ 常数．现在利用习题 12 的结果．

练习 2.5，84 页

3. (a) $v=-x+a$ (b) $v=-e^x\cos y+a$ (c) $v=y^2/2-y-x^2/2-x+a$
(d) $v=\cos x\sinh y+a$ (e) $v=\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)+a=\mathrm{Arg}z+a$
(f) $v=-\mathrm{Re}(e^{z^2})+a=-e^{x^2-y^2}\cos(2xy)+a$

7. $\phi(x,y)=x+1$

9. $\phi(x,y)=xy-1$

13. (一个例子) $\phi(r,\theta)=r^4\sin 4\theta=4x^3y-4xy^3$

543

15. $\mathrm{Re}\,\frac{40}{63}(z^3-z^{-3})$

17. (a) $\phi(x,y)=\mathrm{Re}(z^2+5z+1)$ (b) $\phi(x,y)=2\mathrm{Re}\left(\frac{z^2}{z+2i}\right)$

19. $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2z^2}\right)+\frac{1}{2}$

练习 2.6，90 页

3. 参见图 2.6(a)

练习 2.7，95 页

1. 固定 $\xi_{\pm}=\frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$，对 $-\frac{3}{4}<c<\frac{1}{4}$，$\xi_-$ 稳定

3. (a) i 和 −i 是固定且不稳定的 (b) $\frac{1}{2}$ 和 −1 是固定且不稳定的，$-\frac{1}{2}$ 是固定且稳定的

5. $(-1+\sqrt{5})/2$ 是固定且稳定的，$(-1-\sqrt{5})/2$ 是固定且不稳定的

9. 如果 $|\alpha|\leqslant 1$，则整个复平面是充满茹利亚集；如果 $|\alpha|>1$，原点是充满茹利亚集．

第 3 章

练习 3.1，108 页

1. $2(z+1)^2(z^2+9)$

3. (a) $z^3(z+1+i)^2$ (b) $(z-2)(z+2)(z+2i)(z-2i)$

(c) $(z-\omega_7)(z-\omega_7^2)\cdots(z-\omega_7^6)$，其中 $\omega_7=e^{i2\pi/7}$

5. (a) $42+83(z-2)+80(z-2)^2+40(z-2)^3+10(z-2)^4+(z-2)^5$

(b) $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}2^{10-k}(z-2)^k$（$[(z-2)+2]^{10}=z^{10}$的二项式展开式）

(c) $(z-2)^3+(z-2)^4$

11. (a) 0 是三阶极点，$(-1-\sqrt{2})i$ 是一阶极点，$(-1+\sqrt{2})i$ 是一阶极点．

(b) 2 是一阶极点，3 是二阶极点．　(c) -2 是六阶极点．　(d) -2 是一阶极点

13. (a) $\frac{(3+i)/2}{z}-\frac{3+i}{z+1}+\frac{(3+i)/2}{z+2}$　(b) $\frac{i}{z}+\frac{i/2}{z+i}-\frac{3i/2}{z-i}$

(c) $\frac{1/6+i\sqrt{3}/6}{(z+1/2+i\sqrt{3}/2)^2}-\frac{i\sqrt{3}/9}{z+1/2+i\sqrt{3}/2}+\frac{1/6-i\sqrt{3}/6}{(z+1/2-i\sqrt{3}/2)^2}+\frac{i\sqrt{3}/9}{z+1/2-i\sqrt{3}/2}$

(d) $\frac{5}{2}z^2-\frac{15}{4}z+\frac{47}{8}+\frac{33/16}{z+1/2}-\frac{9}{z+1}$

544

15. (a) $\frac{3-2i}{4}$　(b) $-\frac{1}{512}$　(c) 6　(d) 0　(e) 3

练习 3.2，115 页

3. $z\neq 2k\pi i$ 时，和为$\frac{1-e^{101z}}{1-e^z}$；$z=2k\pi i$ 时，和为 101.

5. (a) $e^2\frac{\sqrt{2}}{2}+ie^2\frac{\sqrt{2}}{2}$　(b) ie^2　(c) $i\sinh 2$　(d) $\cos(1)\cosh(1)+i\sin(1)\sinh(1)$

(e) $-\sinh(1)$　(f) 0

9. (a) $2\pi z\exp(\pi z^2)$　(b) $-2\sin(2z)-(i/z^2)\cos(1/z)$

(c) $2\cos(2z)\exp[\sin(2z)]$　(d) $3\tan^2 z\sec^2 z$

(e) $2(\sinh z+1)\cosh z$　(f) $1-\tanh^2 z=\mathrm{sec\,h}^2 z$

17. (a) $z=ik\pi/2$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$　(b) $z=2k\pi-i\ln 3$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$　(c) 无解

19. 提示：如果 $z_1\neq z_2$，$e^{z_1}=e^{z_2}$，则 $|z_1-z_2|=|2k\pi i|\geq 2\pi$

21. (a) 沿负虚轴和区间$[-1,1]$割开的平面　(b) 上半平面

25. $z=\frac{1}{\mathrm{Log}\omega+i2\pi k}$时 $e^{1/z}=\omega$，因此容易选择一个整数 k 使得对于这些 ω 中的任一个，有 $|z|\leq 0.001$.

练习 3.3，123 页

1. (a) $i(\pi/2+2k\pi)$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(b) $\frac{1}{2}\mathrm{Log}2+i(7\pi/4+2k\pi)$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(c) $-i\pi/2$　(d) $\mathrm{Log}2+i(\pi/6)$

5. (a) $\mathrm{Log}2+i(\pi/2+2k\pi)$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(b) $\pm\sqrt[4]{2}\exp(i\pi/8)$

(c) $i(2\pi/3+2k\pi)$，$i(4\pi/3+2k\pi)$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

9. 剖面：$\mathbf{C}\setminus\{z=x+i: x\geq 4\}$，$f'(z)=-1/(4+i-z)$

11. （一个例子）$f(z)=\mathrm{Log}(z^2+2z+3)$，$f'(-1)=0$

13. (a) $\mathrm{Log}(2z-1)$

(b) $\mathcal{L}_0(2z-1)$，其中$\mathcal{L}_0(re^{i\theta})=\mathrm{Log}r+i\theta$，$0<\theta<2\pi$

(c) $\mathcal{L}_{\pi/2}(2z-1)$，其中$\mathcal{L}_{\pi/2}(re^{i\theta})=\text{Log}r+i\theta,\ \pi/2<\theta<5\pi/2$

15. $\omega=(1/\pi)\text{Log}z$

19. 选择 $\arg z$ 的一个分支，使之在半抛物线的补集上连续；即 $\arg(re^{i\theta})=\theta$，其中 $g(r)<\theta<g(r)+2\pi, g(r)=\text{Tan}^{-1}\sqrt{2/(\sqrt{1+4r^2}-1)}$.

545

练习 3.4，129 页

1. 5

3. 0

5. $\dfrac{B-A}{\text{Log}r_1-\text{Log}r_2}\text{Log}\ |z|+\dfrac{A\text{Log}r_1-B\text{Log}r_2}{\text{Log}r_1-\text{Log}r_2}$

7. $\text{Im}\ [(\log z)^2/2]$

练习 3.5，136 页

1. (a) $\exp(-\pi/2-2k\pi)$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$　(b) $+1,\ -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\exp[-2k\pi^2+\pi i\text{Log}2]$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(d) $(1+i)\exp[2k\pi+\pi/4-(i/2)\text{Log}2]$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

(e) $-2+2i$

3. (a) 2　(b) $e^{-\pi}$　(c) $(1+i)\exp[(i/2)\text{Log}2-\pi/4]$

5. 例如，取 $z_1=-1+i$，$z_2=i$，$\alpha=1/2$.

7. $(1+i)\exp(-\pi/2)$

11. $z=\pi/4+k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

15. (a) $i\exp\left[\dfrac{1}{2}\text{Log}(1-z^2)\right]$　(b) $z\exp\left[\dfrac{1}{2}\text{Log}(4/z^2+1)\right]$

(c) $z^2\exp\left[\dfrac{1}{2}\text{Log}(1-1/z^4)\right]$ (d) $z\exp\left[\dfrac{1}{3}\text{Log}(1-1/z^3)\right]$

17. $x>1$ 时，$0<\text{Sec}^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$；当 $x<-1$ 时，$\pi/2<\text{Sec}^{-1}x<\pi$

19. $z=\text{Log}(-1\pm\sqrt{1+\omega})$；$z=\text{Log}3+i\pi(2k+1)$或 $z=i2\pi k$，k 为任意整数.

练习 3.6，143 页

1. $I_s=\dfrac{\sin(\omega t-\phi_0)}{R}$

5. $I_s\to\dfrac{1}{R}$

7. (b)任意数量对称放置的传感器能有效地工作，两个传感器的情况则有所不同(只需将它们放置于合适的角度即可.)

546

第 4 章

练习 4.1，159 页

1. (a) $z(t)=(1+i)+t(-3-4i)$, $0\leqslant t\leqslant1$　(b) $z(t)=2i+4e^{-it}$, $0\leqslant t\leqslant2\pi$

(c) $z(t)=Re^{it}$, $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$　(d) $z(t)=t+it^2$, $1\leqslant t\leqslant3$

3. $z(t)=a\cos t+ib\sin t$, $0\leqslant t\leqslant2\pi$

5. 是

$$7.\ z(t)=\begin{cases}-1-\mathrm{i}+8t & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{4}\\ 1-\mathrm{i}+8\mathrm{i}\left(t-\dfrac{1}{4}\right) & \dfrac{1}{4}\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 1+\mathrm{i}-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant \dfrac{3}{4}\\ -1+\mathrm{i}-8\mathrm{i}\left(t-\dfrac{3}{4}\right) & \dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

长度 =8

$$9.\ z(t)=\begin{cases}-2+\exp(-6\pi\mathrm{i}t) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3}\\ -1+6\left(t-\dfrac{1}{3}\right) & \dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{2}{3}\\ 2-\exp\left[6\pi\mathrm{i}\left(t-\dfrac{2}{3}\right)\right] & \dfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

11. 15π

13. (a)时刻 t 的瞬时速度

(b)时刻 t 的瞬时速率

(c)时间段 $\mathrm{d}t$ 内产生的无限小(微分)距离

(d)时刻 $t=a$ 到时刻 $t=b$ 移动的距离

练习 4.2，170 页

1. 是

3. (a) $1+\mathrm{i}/3$ (b) $(1+\mathrm{i})\sinh 2$ (c) $\dfrac{\mathrm{i}}{12}[1-(1+2\mathrm{i})^6]=\dfrac{11}{3}-\dfrac{29\mathrm{i}}{3}$ (d) $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}-\dfrac{1}{8+2\mathrm{i}}=-\dfrac{2}{17}-\dfrac{8\mathrm{i}}{17}$

5. $4\pi\mathrm{i}$

7. $\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$

9. $\dfrac{13}{10}+\dfrac{\mathrm{i}}{6}$

11. (a) $3+\mathrm{i}$ (b) $3+\mathrm{i}$ (c) $3+\mathrm{i}$

547

13. $-2\mathrm{i}$

练习 4.3，178 页

1. (a) $-3+2\mathrm{i}$ (b) $-2\sinh 1$ (c) $\mathrm{i}\pi$ (d) 0 (e) $-\dfrac{\mathrm{i}}{3}\sinh^3 1$ (f) $\dfrac{e^{\pi}}{2}+\dfrac{e^{\mathrm{i}}}{2}(\cosh 1+\mathrm{i}\sinh 1)$

(g) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{2}{3}(\sqrt{\pi})^3+\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}$ (h) $\pi-2+\mathrm{i}\left(2-\dfrac{\pi^2}{4}\right)$ (i) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arctan 2+\dfrac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{Log}5$

5. 提示：考虑定理 7.

7. 提示：考虑 $\log(z-z_0)$ 的一个分支，其分支切割与 C 不相交

练习 4.4，199 页

1. (a)，(c)

3. (a)，(b)，(d)，(e)

5. $z(s, t) = (2-s)\cos 2\pi t + i(3-2s)\sin 2\pi t$, $0 \leq s, t \leq 1$

9. (a), (c), (d), (f)

11. 因为整个平面 **C** 是单连通的，可应用定理 10(或定理 13).

13. (a) π　(b) 0　(c) $-\pi$

15. $-4\pi i$

17. 0

练习 4.5，212 页

1. 0

3. (a) $-2\pi i$　(b) $\frac{3\pi i e^{3/2}}{2}$　(c) $\frac{2\pi i}{9}$　(d) $10\pi i$　(e) $-2e\pi i$　(f) $-i\pi/2$

5. $G(1) = 4\pi i$, $G'(i) = -2\pi(2+i)$, $G''(-i) = 4\pi i$

7. $\frac{-2\pi i}{9}$

9. $|f^n(0)| \leq Mn!$

11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \operatorname{Re} f''$

13. $g(z)$ 在 Γ 的内部不解析；注意：$G(z) \equiv 0$.

548

练习 4.6，219 页

3. 提示：对圆盘 $\{\zeta : |\zeta - z| \leq r - |z|\}$ 应用柯西估计.

5. $|e^{f(z)}| \leq e^M$，因此 $e^{f(z)} \equiv$ 常数，这意味着 $f'(z)e^{f(z)} \equiv 0$. 因而 $f'(z) \equiv 0$.

7. 如果 f 是整函数，且当 $|z| > r_0$ 时有 $|f(z)| \leq M|z|^n$，其中 n 是非负整数，则 f 一定是次数不超过 n 的多项式.

15. 提示：设 f 无零点，应用最大模和最小模原理(习题 14).

17. $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

练习 4.7，225 页

1. $\phi(z) \equiv -5$

5. 在上半平面考虑 $\phi_1(x, y) = y$ 和 $\phi_2(x, y) \equiv 0$

11. 3

15. $y > 0$ 时，$\frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-1-x}{y}\right)\right]$.

第 5 章

练习 5.1，239 页

1. (a) $\frac{9}{10} + i\frac{3}{10}$　(b) $3(1-i)$　(c) $\frac{3}{5}$　(d) $\frac{-2+i}{5 \cdot 2^{13}}$　(e) $\frac{9}{8}$　(f) -1

3. 提示：如果 $z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \cdots$ 在它们的极限 L 的 ε 邻域内，那么任意两个 z_j 又离多远呢？

5. 应用习题 3.

7. (a) 发散　(b) 收敛　(c) 发散　(d) 发散　(e) 收敛　(f) 发散

9. 提示：比较 $|z|$ 与 $|x| + |y|$.

11. (a) $|z| < 1$　(b) $|z - i| < 2$　(c) 所有的 z　(d) $|z + 5i| < 1$

549 17. 提示：对不等式 $x^n < \frac{1}{2}$ 应用对数函数 Log.

练习 5.2，249 页

3. 提示：用链式法则来求复合函数的导数.

5. (a) $\sum_{j=0}^{\infty}(-z)^j$，$|z|<1$　(b) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{2j}}{j!}$，所有 z　(c) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j 3^{2j+1} z^{2j+4}}{(2j+1)!}$，所有 z

(d) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i^j[1+(-1)^j]-i}{j!}z^j$，所有 z（注意对奇数 j，$1+(-1)^j=0$.）

(e) $i+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{(1-i)^{j+1}}(z-i)^j$，$|z-i|<\sqrt{2}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4-\cdots\right\}$，所有 z

(g) $\sum_{j=1}^{\infty}jz^j\left(=z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}\right)$，$|z|<1$

7. $2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{2j+1}}{2j+1}$，$|z|<1$

11. (a) $1+z-\frac{z^3}{3}+\cdots$　(b) $-1-2z-\frac{5z^2}{2}-\cdots$　(c) $1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+\cdots$　(d) $z-\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\cdots$

13. $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$

17. $f(z)=(1-z)^{-1}$ 在 $z=1$ 点不解析

19. 九项（$n=0,\cdots,8$）

练习 5.3，258 页

3. (a) $|z|=1$　(b) $|z-1|=\frac{1}{2}$　(c) $|z|=0$

(d) $|z-i|=3$　(e) $|z+2|=\frac{1}{\sqrt{10}}$　(f) $|z|=2$

550 5. (a) $\frac{6!\,6^3}{3^6}$　(b) $2\pi i$　(c) 0　(d) 0

7. $z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{10}$

9. 提示：该多项式在曲线 C 上及其内部是解析的.

11. (b) 提示：证明在一段实区间上相等的两个解析函数有相同的导数.

13. (a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2^k k!}=e^{z^2/2}$

(b) $1+z-\frac{4}{2!}z^2-\frac{4}{3!}z^3+\frac{4^2}{4!}z^4+\frac{4^2}{5!}z^5+\cdots$

$$=\left[1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\cdots\right]+\frac{1}{2}\left[(2z)-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\cdots\right]$$

$$=\cos 2z+\frac{1}{2}\sin 2z$$

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^{2k}=\frac{1}{(1-z^2)^2}$

15. (a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left[\int_{-1}^{2}t^{2k+1}g(t)\,dt\right]z^{2k+1}$ (b) 提示：对(a)逐项求导.

练习 5.4，266 页

1. (a) 2 (b) ∞ (c) 0 (d) ∞.

3. (a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{3}$ (d) e（提示：运用比值判别法.） (e) 1 (f) 1.

5. (a) R (b) R^4 (c) $\sqrt{R}$ (d) R (e) ∞（如果 $R>0$）

9. $f(z)=a_0+\sum_{j=0}^{\infty}z^{2^j}$，$|z|<1$

11. 1，ζ，$\frac{(3\zeta^2-1)}{2}$，$\frac{(5\zeta^3-3\zeta)}{2}$

练习 5.5，276 页

551

1. (a) $\sum_{j=-1}^{\infty}(-1)^{j+1}z^j$ (b) $\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j z^{-j}$ (c) $-\sum_{j=-1}^{\infty}(z+1)^j$ (d) $\sum_{j=2}^{\infty}(z+1)^{-j}$

3. (a) $\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left[(-1)^j-\left(\frac{1}{2}\right)^j\right]z^j$ (b) $\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}z^{-j}-\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j z^j$ (c) $\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}[(-1)^{j-1}+2^j]z^{-j}$

5. $\frac{\frac{5}{4}}{(z-4)^3}+\sum_{j=-2}^{\infty}(-1)^{j+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{j+4}(z-4)^j$

7. (a) $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{3}{2z^4}+\cdots$ (b) $\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{z}{12}+\cdots$ (c) $\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}+\cdots$ (d) $\frac{1}{e}\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\right]$

9. $\frac{1}{2}<|z|<2$

11. $\sum_{j=n}^{\infty}\alpha^{j-n}\frac{(j-1)!}{(j-n)!\,(n-1)!}z^{-j}$

13. 提示：利用(1)式.

练习 5.6，285 页

1. (a) 0 为二阶极点，-1 为可去奇点.
   (b) 0 为本性奇点.
   (c) $\pm i$ 为单极点.
   (d) $2n\pi i\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 为单极点.
   (e) $\frac{2n+1}{2}\pi\,(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 为单极点.
   (f) 0 为本性奇点.
   (g) 0 为可去奇点.
   (h) 0 为本性奇点，$\frac{1}{n\pi}\,(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 为单极点.

3. 可以是：

   (a) $\frac{(z-i)^2}{(z-2+3i)^5}$ (b) $ze^{1/(z-1)}$ (c) $\frac{(\sin z)e^{1/(z-i)}}{z(z-1)^6}$ (d) $\frac{e^{1/[z(z-1)]}}{(z-1-i)^2}$

5. (a) 错 (b) 对 (c) 对 (d) 错 (e) 对

7. 本性奇点.

9. 是的；$e^{1/z}$ 在负实轴上是有界的.

552

11. 提示：比如，若 $\operatorname{Re} f\leq M$，那么 $e^{f(z)}$ 就有一个可去奇点，现可取对数.

13. 提示：对于 a_{-j} 应用公式时可选取一个很小的周线.

19. (b) $0+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\right)z+(0)z^2+\left(\frac{7}{360}-\frac{2}{\pi^4}\right)z^3+(0)z^4+\cdots$，半径为 2π

(c) $\cdots+\frac{-2\pi^2}{z^3}-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\right)z+\left(\frac{7}{360}-\frac{2}{\pi^4}\right)z^3+\cdots$

练习 5.7，290 页

1. (a)本性奇点 (b)本性奇点 (c)解析 (d)2 阶零点 (e)2 阶极点 (f)本性奇点
   (g)本性奇点 (h)不是孤立奇点 (i)解析

3. (a) $1+2\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/z^j$, $|z|>1$ (b) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j/z^{2j}$, $|z|>1$ (c) $\sum_{j=0}^{\infty}i^j/z^{3j+3}$, $|z|>1$

5. $(\deg Q)-(\deg P)$.

7. 注意 $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i$.

11. $\deg(P)-\deg(Q)=1$，0，或者 -1.

练习 5.8，301 页

1. z^2.

3. $\sin\frac{1}{1-z}$的零点为 $z=1-\frac{1}{n\pi}$，$n=1, 2, \cdots$.

5. 除 $0\leqslant\alpha<1$ 的所有值.

7. 它们的和都是$\frac{1}{1-z}$.

9. (a)不是 (b)是 (c)是 (d)不是 (e)是 (f)是

11. $f(z)=zg'(z)$.

15. 若 $\phi(x, y)\to 0$，那么它可就可以调和开拓成关于 y 的奇函数．若$\partial\phi/\partial y\to 0$，那么 ϕ 就可以调和开拓成关于 y 的偶函数．

553

第 6 章

练习 6.1，313 页

1. (a) $\mathrm{Res}(2)=e^6$ (b) $\mathrm{Res}(1)=-2$，$\mathrm{Res}(2)=3$ (c) $\mathrm{Res}(0)=0$ (d) $\mathrm{Res}(-1)=-6$
   (e) $\mathrm{Res}(0)=1$，$\mathrm{Res}(-1)=-5/2e$ (f) $\mathrm{Res}(0)=1/3$
   (g) $\mathrm{Res}\left[\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\right]=-1$，$n=0, 1, 2, \cdots$
   (h) $\mathrm{Res}(n\pi)=(-1)^n(n\pi-1)$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ (i) $\mathrm{Res}(1)=-2$.

3. (a) $\pi i\sin 2$ (b) $\frac{\pi i(e^2-1)}{4}$ (c) $-8\pi i$ (d) $\pi i\left[\frac{(2-5i)e^{2i}}{58}-\frac{12-5i}{50}\right]$ (e) $\frac{\pi i}{3}$
   (f) 0 (g) 0.

5. 不是；是(例如 $1/z^2$).

7. $2\pi i$

练习 6.4，336 页

5. $\frac{\pi\sin 3}{2e^3}$

7. $\frac{\pi}{3e}\left(1-\frac{1}{2e}\right)$

9. $\frac{i\pi}{e^6}$

11. $m>0$，$\deg P<\deg Q$

练习 6.5，344 页

1. (a) $\frac{i\pi}{2}$ (b) $\frac{3\pi i e^{3i}}{8}$ (c) 0 (d) $-\pi i$

9. $\frac{3\pi}{4}$

11. $-\pi\cot(a\pi)$

554

练习 6.6，354 页

9. (a) $\pi/4-\text{Log}\sqrt{2}$ (b) $2\pi\sqrt{3}/9$

13. $2\pi\sqrt{3}/3$

练习 6.7，364 页

1. (a)，(c)，(e)和(f)

3. 1

7. 提示：与 $f(z)=27$ 比较.

9. 4

13. 提示：设 $h(z)=-f(z)$.

15. 提示：f 和 $f+h$ 有相同的极点，然后应用习题 14.

21. $F(z)$ 的零点是 $P(z)$ 等于 1 的点，再应用以前的定理.

第 7 章

练习 7.1，374 页

1. $\text{Log}|w|+\text{Arg}w$；$e^x\cos y+e^x\sin y$

3. $a_4+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{3}(a_k-a_{k+1})\text{Arg}(z-x_k)$

5. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-1}{(1+x)^2+y^2}$

7. 这些式子恰是 $f^{-1}(w)$ 的柯西–黎曼方程.

练习 7.2，382 页

1. (a) 1；$f(-1+\zeta)=f(-1-\zeta)$
   (b) 1；$f(n\pi+\zeta)=f(n\pi-\zeta)$
   (c) 2；$f(r)=f(re^{i2\pi/3})=f(re^{i4\pi/3})$

3. $\alpha>1(\alpha<1)$ 时辐角增加(减少).

5. 纯虚常数.

11. (a) 整个上半平面：$\text{Im}\,w>0$ (b) 除对数螺线 $\rho=e^{\phi}$，$-\infty\le\phi<\infty$ 外的整个平面.
   (c) $\{w:|w|<1,\ \text{Im}\,w>0\}$. (d) $\{w:|w|>1,\ \text{Im}\,w>0\}$.
   (e) 上半圆环 $\{w:e<|w|<e^2,\ \text{Im}\,w>0\}$. (f) $\{w:|w|>1\}$ 和 $\{w:|w|<1\}$.

555

13. (a) 上半平面：$\text{Im}\,w>0$ (b) 第四象限 (c) 除实区间 $(-\infty,-1]$，$[1,\infty)$ 外的整个平面
   (d) 除实线段 $[-\cosh 1,-1]$，$[1,\cosh 1]$ 外的椭圆 $(u^2/\cosh^2 1)+(v^2/\sinh^2 1)=1$ 的内部.

练习 7.3，392 页

1. $w=3iz+5$

3. (a) $\{w: |w-2+2i| \leqslant 1\}$　(b) $\{w: |w-6i| \leqslant 3\}$　(c) $\left\{w: \operatorname{Re}(w) \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

(d) $\left\{w: \operatorname{Re}(w) \geqslant \frac{3}{2}\right\}$　(e) $\left\{w: \left|w-\frac{2}{3}\right| \leqslant \frac{1}{3}\right\}$

5. $w = e^{3\pi i/4}\left(\frac{z+i}{z-1}\right)$

7. (a) $w = iz$　(b) $w = \frac{2z}{z+1}$　(c) $w = \frac{z+i}{z-1}$　(d) $w = \frac{z+1}{z-1}$.

9. 圆周 $C_1: |w-(1-i)/2| = 1/\sqrt{2}$ 和 $C_2: |w-(1+i)/2| = 1/\sqrt{2}$ 的外部区域.

11. $w = \exp\left(4\pi\left[-i\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{4}\right)\right]\right)$.

练习 7.4，403 页

1. $z-2$

3. (a) $\frac{4-3i}{25}$　(b) $\frac{7-i}{6}$　(c) $\frac{5-2i}{3}$.

5. $\lambda > 0$

7. 不是.(这与对称原理矛盾.)

9. 0

17. $w = \frac{i-2z}{2+iz}e^{i\theta}$ (θ 为任意实角).

19. $w = \frac{az+b}{cz+d}$，其中 a，b，c，d 为实数，并且 $ad-bc>0$.

556

21. (b) 不是.(例如，旋转和反演就不能互换.)

练习 7.5，416 页

1. $w = A(z-x_1)^2 - 1$，其中 $A<0$.

3. $w = \frac{i}{2} - \frac{i}{\pi}\sin^{-1}z$

5. $w = -\frac{2}{\pi}(\sin^{-1}z + z\sqrt{1-z^2})$

7. $w = \frac{i}{\pi}\sqrt{z^2-1} + \frac{\sin^{-1}z}{\pi} + \frac{1}{2}$

9. $w = \frac{1}{\pi}\operatorname{Log}\left(\frac{z-x_2}{x_2-x_1}\right)$，其中 $x_1 < x_2$.

11. $S-C$ 变换通过区间 (x_{j-1}, x_j) 的解析开拓把下半平面映射到多边形 P 关于 $f(x_{j-1})$ 和 $f(x_j)$ 对称的图形.

练习 7.6，430 页

1. $\phi(x, y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

3. $T(x, y) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) - 1$

5. $\phi(x, y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}+1}\right)$

7. (a) $T(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi}[\operatorname{Arg}(\cos(\pi iz)+1) + \operatorname{Arg}(\cos(\pi iz)-1)]$

(**b**) $T(x,\ y)=\frac{2}{\pi}\text{Arg}(e^{\pi z}+1)-\frac{1}{\pi}\text{Arg}(e^{\pi z})$.

9. $\phi(x,\ y)=(\text{Log}s)^{-1}\text{Log}\left|\frac{4-\lambda z}{4\lambda-z}\right|$，其中 $\lambda=\frac{19+\sqrt{105}}{16}$，$s=\frac{13-\sqrt{105}}{8}$.

11. 在 $S-C$ 映射方程 $w=f(x+\mathrm{i}y)$ 中，保持 y 为常数就可以得到流线的参数表达式.

练习 7.7，439 页

1. 等温线：$z(t)=g(a+\mathrm{i}t)$，$t\geqslant0$，$-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$，其中 $g(w)=\frac{1}{2}+\frac{w-\cos w}{\pi}$ 把半带形区域 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$，$v>0$ 映到给定的区域.

557

3. $T(z)=\frac{2}{\pi}\text{Re}\left[\sin^{-1}(z^2)\right]$

5. $T(z)=-\frac{20}{\pi}\text{Re}\left[\sin^{-1}(-e^{-\pi z})\right]$

7. 流线：$\text{Im}(z^{\pi/\alpha}+z^{-\pi/\alpha})=$ 常数.

第 8 章

练习 8.1，459 页

1. (**a**) $\frac{\mathrm{i}}{8}\left[-3e^{\mathrm{i}t}+3e^{-\mathrm{i}t}+e^{3\mathrm{i}t}-e^{-3\mathrm{i}t}\right]$　(**b**) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{12(-1)^n}{\pi(9-4n^2)(1-4n^2)}e^{\mathrm{i}2nt/3}$

   (**c**) $c_n=\frac{2(-1)^n}{n^2}$，其中 $n\neq0$，$c_0=\frac{\pi^2}{3}$　(**d**) $c_n=(-1)^n\left[\frac{\mathrm{i}\pi}{n}-\frac{2\mathrm{i}}{\pi n^3}\right]+\frac{2\mathrm{i}}{\pi n^3}$，其中 $n\neq0$，$c_0=0$.

3. (a)，(b)

5. $\bar{c}_n=c_{-n}$

7. (**a**) $\frac{1}{8}+\frac{\cos 2t}{2}-\frac{\cos 4t}{104}$　(**b**) $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{c_ne^{\mathrm{i}nt}}{1+\mathrm{i}n-n^2}$，$c_n$ 和习题 1(c) 相同.

   (**c**) $\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{c_ne^{\mathrm{i}nt}}{2+4\mathrm{i}n-n^2}$，$c_n$ 同例 4.

11. $u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx\sin nt$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1(\xi)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$c_n=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}f_2(\xi)\sin n\xi\,\mathrm{d}\xi$$

练习 8.2，473 页

1. (**a**) $G(\omega)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)$　(**b**) $G(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2/4}$　(**c**) $G(\omega)=\frac{-\mathrm{i}\omega e^{-\omega^2/4}}{4\sqrt{\pi}}$

   (**d**) $G(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\\ \frac{1}{4}, & \omega=\pm1\end{cases}$　(**e**) $G(\omega)=\begin{cases}-\frac{\mathrm{i}}{2}\sin\omega, & |\omega|\leqslant\pi\\ 0, & |\omega|\geqslant\pi\end{cases}$

558

3. (a) $G(\omega)=\dfrac{e^{-|\omega|/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{|\omega|}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{|\omega|}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $G(\omega)=-\dfrac{ie^{-|\omega|/\sqrt{2}}}{2}\sin\dfrac{\omega}{\sqrt{2}}$

(c) $G(\omega)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2/4}$

练习 8.3，484 页

1. (a) $\dfrac{3s}{s^2+4}-\dfrac{8}{s+2}$ (b) $\dfrac{2}{s}-\dfrac{\pi}{(4-s)^2+\pi^2}$ (c) $\dfrac{1}{s}(1-e^{-s})$

(d) $\dfrac{1}{s}(e^{-s}-e^{-2s})$ (e) $\dfrac{2}{s(s^2+4)}$ (f) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$.

3. (a) $\dfrac{1}{2}\sin(2t)$ (b) $4te^t$ (c) $e^{-2t}-te^{-2t}$ (d) $\dfrac{1}{2}[1-2e^{-t}+e^{-2t}]$

(e) $e^{-2t}\left(\cos\sqrt{3}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\right)$.

5. (a) $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{3t}+\dfrac{5}{2}e^t$ (b) $f(t)=4e^{2t}-3e^{3t}$

(c) $f(t)=\dfrac{28}{39}e^{2t}-\dfrac{5}{6}e^{-t}-\dfrac{1}{13}e^{-t}\sin 2t+\dfrac{3}{26}e^{-t}\cos 2t$

(d) $f(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t\leqslant 3\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2t-6}-e^{t-3}, & 3\leqslant t\leqslant 6\\ \dfrac{1}{2}e^{2t-6}-\dfrac{1}{2}e^{2t-12}+e^{t-6}-e^{t-3}, & t\geqslant 6\end{cases}$

7. (b) 提示：考虑 $F(s)$ 的部分分式展开式，并且和表格内的值比较.

9. (b) i. $x(t)=\cos\sqrt{3}t$，$y(t)=-\cos\sqrt{3}t$； ii. $x(t)=y(t)=\cos t$；

iii. $x(t)=\dfrac{1}{2}(\cos t+\cos\sqrt{3}t)$，$y(t)=\dfrac{1}{2}(\cos t-\cos\sqrt{3}t)$.

(c) (i)，(ii).

练习 8.4，494 页

3. 用 $|\alpha|$ 乘以半径.

5. (a) $a(n)=-(-3)^{-n}(n\leqslant -1)$，其他情况为 0

559

(b) $a(n)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n(n\geqslant 0)$，其他情况为 0

(c) $a(n)=(-1)^n2^{n+3}(n\leqslant -4)$，其他情况为 0

(d) $a(n)=(-2)^{n+3}(n\geqslant -3)$，其他情况为 0

(e) $a(n)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(n\geqslant 1)$，$-3^{n-1}(n\leqslant -1)$，$-\dfrac{1}{3}(n=0)$

(f) $a(n)=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-3\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n(n\geqslant 0)$，其他情况为 0

(g) $a(n)=4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2n-4(n\geqslant 0)$，其他情况为 0

(**h**) $a(n)=\frac{1}{\alpha^n}[\alpha^{-1}-\alpha]\,(n\geqslant 1)$，$\frac{1}{\alpha}(n=0)$，其他情况为 0.

7. (**a**) 2^{-n+1} (**b**) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-2)^n$ (**c**) $\frac{1}{2}+2^{n+1}-\frac{3^n}{2}$

练习 8.5，507 页

3. 提示：利用 6.5 节引理 4.

7. (**b**) $\mathrm{p.v.}\ \frac{1}{x-x_0}-\mathrm{i}\pi\delta(x-x_0)$

560

索　引

索引中的页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U